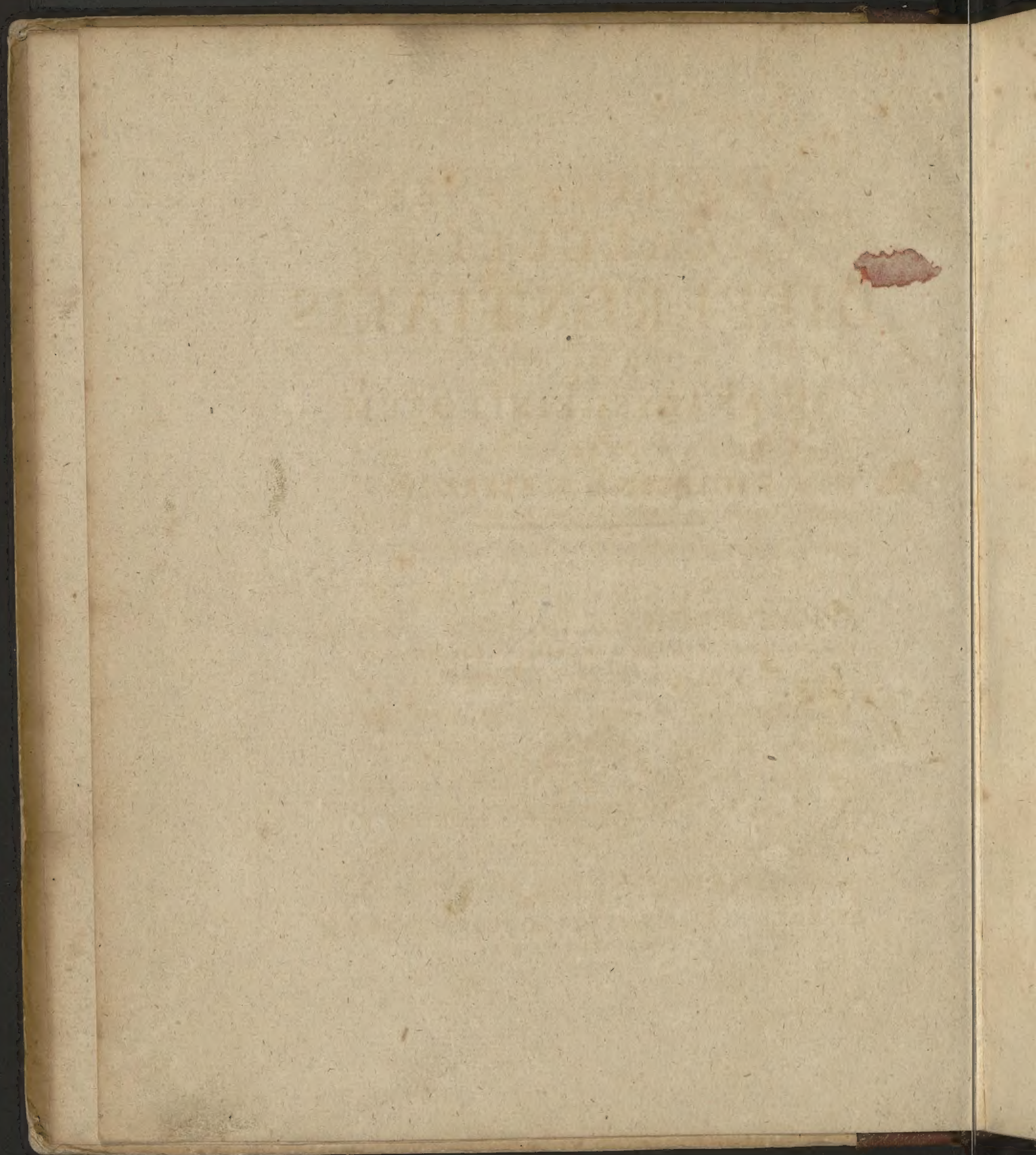


Q. XI. 17. ~~none~~ ~~Q. XII. 5~~
Mathes 551.

1415



874 gibet now
2
INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.



IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.



INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS



IN ANNALE FINITORUM
ET ALIIS
TOMI PRIMI

LIBRO PRIMO
CAPITULUM PRIMUM
DE NUMERIS

ACADEMIAE PADOVAE
PUBLI



P R A E F A T I O.

Quid sit Calculus Differentialis, atque in genere Analysis Infinitorum? iis qui nulla adhuc eius cognitione sunt imbuti, vix explicari potest: neque hic, uti in aliis disciplinis fieri solet, exordium tractationis a definitione commode sumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; sed quoniam ad eam intelligendam eiusmodi opus est notionibus, non solum in vita communi, verum etiam in ipsa Analysis finitorum minus usitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione euolui atque explicari solent: quo fit, ut eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam satis dilucide fuerint perspecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles versatur: etsi enim omnis quantitas sua natura in infinitum augeri & diminui po-

test; tamen dum calculus ad certum quoddam institutum dirigitur, aliae quantitates constanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctioris ac diminutionis variari: ad quam distinctionem notandam illae quantitates constantes, hae vero variabiles vocari solent; ita ut hoc discrimen non tam in rei natura, quam in quaestione, ad quam calculus refertur, indole sit positum. Quoniam haec differentia inter quantitates constantes & variabiles exemplo maxime illustrabitur, consideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii explosi; siquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in ista inuestigatione est habenda: primo scilicet quantitas pulueris pyrii; tum eleuatio tormenti supra horizontem; tertio longitudo iactus super plano horizontali; quarto tempus, quo globus explosus in aere versatur: ac nisi experimenta eodem tormento instituantur, insuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a varietate tormenti & globi animum remoueamus, ne in quaestiones nimium implicatas incidamus. Quodsi ergo seruata perpetuo eadem
pul-

pulveris pyrii quantitate, eleuatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulueris sensus impulsus erit quantitas constans, eleuatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; siquidem pro omnibus eleuationis gradibus has res definire velimus, ut inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus eleuationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si seruata eadem tormenti eleuatione, quantitas pulueris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim eleuatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulueris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, ut mutata una reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulueris

pyrii eadem manebat, mutata tormenti eleuatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; suntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab eleuatione tormenti, hacque mutata simul certas quasdam mutationes patientes: posteriori vero casu pendent a quantitate pulueris pyrii, cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatione latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcumque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuiusmodi sunt quadratum eius xx , aliaeue potentiae quaecunque, nec non quantitates ex his utcumque compositae; quin etiam transcendentes, & in genere quaecunque ita ab x pendent, ut aucta vel diminuta x ipsae mutationes recipiant. Hinc iam nascitur quaestio, qua quaeritur, si quantitas x data quantitate siue augeatur siue diminuat, quantum inde quacuis eius functiones immutentur,

tur, seu quantum incrementum decrementumve accipiant. Casibus quidem simplicioribus haec quaestio facile resolvitur: si enim quantitas x augeatur quantitate ω , eius quadratum xx hinc incrementum capiet $2x\omega + \omega\omega$; sicque incrementum ipsius x se habebit ad incrementum ipsius xx ; ut ω ad $2x\omega + \omega\omega$, hoc est, ut 1 ad $2x + \omega$; similique modo in aliis casibus ratio incrementi ipsius x ad incrementum, vel decrementum, quod quaevis eius functio inde adipiscitur, considerari solet. Est vero investigatio rationis huiusmodi incrementorum ipsa non solum maximi momenti, sed ei etiam uniuersa Analysis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, sumamus exemplum superius quadrati xx , cuius incrementum $2x\omega + \omega\omega$, quod capit, dum ipsa quantitas x incremento ω augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, ut $2x + \omega$ ad 1 ; unde perspicuum est, quo minus sumatur incrementum ω , eo propius istam rationem accedere ad rationem $2x$ ad 1 ; neque tamen ante prorsus in hanc rationem abit, quam incrementum illud ω plane euanescat. Hinc intelligimus, si quantitatis variabilis x incrementum ω in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius xx

in.

incrementum inde oriundum quidem evanescere, verumtamen ad id rationem tenere ut $2x$ ad 1 ; & quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius x est intelligendum; quippe quarum incrementa evanescunt, quae capiunt, dum ipsa quantitas x incrementum evanescens sumit, ad hoc ipsum certam & assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem Calculi Differentialis, qui est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur: hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportionem mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescencia defi-

definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili verò modo calculi integralis ratio est comparata, qui convenientissime ita definitur, ut dicatur esse methodus ex cognita ratione incrementorum evanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inveniendi. Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parva quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati x incrementum tribuatur ω , ut abeat in $x + \omega$, eius quadratum xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$, ideoque incrementum capit $2x\omega + \omega\omega$; quare incrementum ipsius x , quod est ω , se habebit ad incrementum quadrati, quod est $2x\omega + \omega\omega$, uti 1 ad $2x + \omega$; quae ratio abit in 1 ad $2x$, tum demum, cum ω evanescit. Fiat igitur

$\omega = 0$, & ratio istorum incrementorum euanescentium,
 quae sola in calculo differentiali spectatur, utique est ut
 1 ad 2x; neque vicissim haec ratio veritati esset con-
 sentanea, nisi reuera illud incrementum ω euanesceret,
 penitusque nihilo fieret aequale. Quodsi ergo hoc nihi-
 lum per ω indicatum referat incrementum quantitatis x,
 quia hoc se habet ad incrementum quadrati xx ut 1 ad
 2x, erit quadrati xx incrementum $= 2x\omega$, ideoque
 etiam nihilo aequale; unde simul constat annihilationem
 horum incrementorum non obstare, quominus eorum ra-
 tio, quae est ut 1 ad 2x sit determinata. Quod nihi-
 lum iam hic littera ω exhibetur, id in calculo differen-
 tiali, quia ut incrementum quantitatis x spectatur, signo
 dx repraesentari, eiusque differentiale vocari solet; posi-
 toque dx loco ω , ipsius xx differentiale erit $2x dx$.
 Simili modo ostenditur fore cubi x^3 differentiale $= 3x^2 dx$,
 & in genere cuiusque dignitatis x^n differen-
 tiale fore $= nx^{n-1} dx$. Quaecunque autem aliae func-
 tiones ipsius x proponantur, in calculo differentiali regu-
 lae traduntur eorum differentialia inueniendi: verum per-
 petuo tenendum est, cum haec differentialia absolute sint
 ni-

nihila, ex iis nihil aliud concludi; nisi eorum rationes mutuas, quae utique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obiectationes, quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere; peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parva negligenterentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinite parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul rejiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per Calculum differentialem eadem conclusiones ac per Geometriam

elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam si ea infinite parua, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde necessario error, isque eo maior, quo magis ea coaceruantur, resultare debet; hocque si minus eueniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compensantur, esset tribuendum, quam ipse calculus ab erroris suspitione liberaretur. Quodsi autem nullo nouo errore huiusmodi compensatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipsum, quod volo, euincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & absolute pro nihilo esse habenda; neque infinite parua, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parua ita describuntur, ut instar puluisculorum respectu vasti montis vel etiam totius globi terrestris spectari debeant: etsi enim qui magnitudinem totius globi terrestris calculo determinare suscepit, ei error non vnius sed plurium millium puluisculorum facile condonari soleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque grauis esset haec obiectio, si vllam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu est, quid lucri inde sperent, qui
in-

infinite parva a nihilo distingui volunt: metuunt autem, ne, si plane evanescant, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perducere sentiunt, tollatur: quomodo enim absolute nihila inter se comparari queant, nullo modo concipi posse profitentur. Necesse ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem instituant: hanc tamen magnitudinem tam parvam admittere coguntur, ut quasi esset nulla, spectari ac sine errore in calculo negligi possit. Neque tamen certam ac definitam ipsi magnitudinem, licet incomprehensibiliter parvam, assignare audent; semper enim si eam bis terue minorem assumerent, eodem modo comparationes se essent habiturae. Ex quo perspicuum est, nihil plane ipsam magnitudinem ad comparationem instituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamsi illa magnitudo penitus evanescat. Ex dictis autem supra manifestum est, eam comparationem, quae in calculo differentiali spectatur, ne locum quidem habere, nisi illa incrementa prorsus evanescant: incrementum enim quantitatis x , quod in genere indicavimus per ω , ad incrementum quadrati xx , quod est $2x\omega + \omega\omega$, rationem

habet ut 1 ad $2x + \omega$; quae semper differt a ratione 1 ad $2x$, nisi sit $\omega = 0$; at si statuamus esse $\omega = 0$, tum demum vere affirmare possumus, hanc rationem fieri exacte ut 1 ad $2x$. Interim tamen perspicitur, quominus illud incrementum ω accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei conuenit, haec incrementa primum ut finita considerare, atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum illorum constituit, verum est objectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is iecisse existimandus est, cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa, dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum evanescent, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem speculationis vestigiaprehendimus apud antiquissimos Auc-

tores, quibus idcirco idea quaedam levisque cognitio *Analysis infinitorum* abiudicari nequit. Paullatim deinde haec scientia maiora accepit incrementa, neque subito ad id fastigium, in quo nunc cernitur, est euecta; etiamsi quidem in ea multo plura adhuc sint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, utcumque sint compositae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa evanescentia inter se comparandi; sed sensim haec inuentio ad functiones continuo magis complicatas processit. Quod scilicet ad functiones rationales attinet, ratio ultima, quam earum incrementa evanescentia inter se tenent, multo ante NEUTONI ac LEIBNIZII tempora assignari potuit; ita ut Calculus differentialis, quatenus ad solas functiones rationales applicatur, diu ante haec tempora inuentus sit censendus. Tum vero nullum est dubium, quin NEUTONO eam Calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales versatur, acceptam referre debeamus; ad quam insigni suo Theoremate de evolutione generali potestatum binomii feliciter est deductus, quo eximio inuento limites calculi
dif-

differentialis iam mirifice erant amplificati. LEIBNIZIO autem non minus sumus obstricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut singulare artificium spectatum, in formam disciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in systema collegerit, ac dilucide explicauerit. Hinc enim maxima subsidia suggerebantur, ad hunc calculum ulterius excolendum, & ea, quae adhuc desiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur studio cum Ipsius LEIBNIZII, tum BERNOUILLIORUM ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, sunt promoti, tum vero etiam solidissima fundamenta Calculi integralis constituta; quibus insistentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt. NEUTONUS vero etiam amplissima dederat specimina Calculi integralis, cuius prima inuentio, cum a prima origine calculi differentialis vix separari queat, non ita absolute constitui potest; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda restat, hic calculus ne nunc quidem pro absolute inuento haberi potest; sed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre

con-

contigerit, id grata mente agnoscere debemus. Atque haec de gloria inuentionis huius calculi tenenda esse iudico, de qua quidem antehac tantopere est disceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae isti calculo a diuersarum nationum Mathematicis imponi solent, attinet, ea omnia huc redeunt, ut cum data hic definitione egregie consentiant: siue enim incrementa illa euanescentia, quorum ratio consideratur, differentialia vocentur, siue fluxiones, ea semper nihilo aequalia sunt intelligenda; in quo vera notio infinite paruorum constitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus secundi & altiorum ordinum curiose magis quam utiliter sunt disputata, reddentur planissima, cum omnia per se aequae euanescant, neque ea vnquam per se, sed potius eorum relatio mutua spectari soleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa euanescentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, si & huius functionis incrementum euanesceat cum aliis conferatur, res ad differentialia secunda referri est censenda; sicque porro progressio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita ut semper quantitates finitae reuera animo ob-

versentur, signaque differentialium tantum ad eas commodè repraesendandas adhibeantur. Primo quidem intuitu ista *Analysis* infinitorum descriptio plerisque levis ac nimis sterilis videatur, etsi species illa arcana infinite parvorum re haud plus polliceatur: verum si rationes, quae inter incrementa evanescentia functionum quarumvis intercedunt, probe cognoscamus, hæc cognitio saepenumero per se maximi est momenti; tum vero in plerisque iisque maximi arduis investigationibus ita est necessaria, ut sine eius adminiculo nihil plane intelligi possit. Veluti si quaestio sit de motu globi ex tormento explosi, simulque ratio resistentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per spatium finitum sit futurus, nullo modo statim definire licet, dum tam directio semitæ, in qua globus incedit, quam ipsius celeritas, a qua resistentia pendet, quovis momento immutatur. Quo minus autem spatium, per quod motus fiat, consideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodsi autem illud spatium plane evanescens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum resistentiae per regulas motus ac-

curate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse esse arbitror usum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel leuissimam inuestigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingredietur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysisi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, ut rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes usus huius Analyseos sublimioris usque adeo diffunditur, ut omnia, quae sine eius interuentu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro vniuersum Calculum differentialem ex veris principiis deriuare, atque ita copiose pertractare, ut nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inuenta. In duas opus

diuisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi; neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inueniendi; siue functiones unicam variabilem siue duas pluresue inuoluant. In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysis finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. De usu autem huius calculi in Geometria linearum curuarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent euoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, ut ne vlla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.





INDEX CAPITUM

PARTIS PRIORIS.

Caput I.	<i>De Differentiis finitis.</i>	— —	pag. 3
Cap. II.	<i>De Vfu Differentiarum in Doctrina serie-</i> <i>rum.</i>	— — —	39
Cap. III.	<i>De Infinitis & infinite parvis.</i>	—	70
Cap. IV.	<i>De Differentialium cuiusque ordinis natura.</i>	—	98
Cap. V.	<i>De Differentiatione functionum algebraicarum</i> <i>unicam variabilem inuoluentium.</i>	—	124
Cap. VI.	<i>De Differentiatione functionum transcenden-</i> <i>tium.</i>	— — —	151
Cap. VII.	<i>De Differentiatione functionum duas pluresue</i> <i>variabiles inuoluentium.</i>	— — —	178
Cap. VIII.	<i>De Formularum Differentialium ulteriori dif-</i> <i>ferentiatione.</i>	— — —	204
Cap. IX.	<i>De Aequationibus Differentialibus.</i>	—	241

PARTIS POSTERIORIS.

Caput I.	<i>De Transformatione Serierum.</i>	pag. 281
Cap. II.	<i>De Inuestigatione serierum summabilium.</i>	304
Cap. III.	<i>De Inuentione Differentiarum finitarum.</i>	332
Cap. IV.	<i>De Conuersione Functionum in Series.</i>	359
Cap. V.	<i>Inuestigatio summae Serierum ex Termino generali.</i>	403
Cap. VI.	<i>De Summatione Progressionum per Series Infinitas.</i>	441
Cap. VII.	<i>Methodus summandi superior ulterius promota.</i>	479
Cap. VIII.	<i>De usu Calculi Differentialis in formandis seriebus.</i>	515
Cap. IX.	<i>De usu Calculi Differentialis in aequationibus resoluendis.</i>	546
Cap. X.	<i>De Maximis & Minimis.</i>	578
Cap. XI.	<i>De Maximis & Minimis functionum multiformium pluresque variables complectentium.</i>	619
Cap. XII.	<i>De Usu differentialium in inuestigandis radicibus realibus aequationum.</i>	657

Cap.

CAPITULUM.

XXIII

Cap. XIII.	<i>De Criteriis radicum imaginariarum.</i>	689
Cap. XIV.	<i>De Differentialibus functionum in certis tantum casibus.</i>	712
Cap. XV.	<i>De Valoribus functionum, qui certis casibus videntur indeterminati.</i>	738
Cap. XVI.	<i>De Differentiatione Functionum inexplicabilium.</i>	769
Cap. XVII.	<i>De Interpolatione Serierum.</i>	808
Cap. XVIII.	<i>De Vsu Calculi Differentialis in Resolutione Fractionum.</i>	843



Erro-



Errores Typographici.

pag. 509. lin 3. loco $z = x x$ lege $z = x x + x$

pag. 513. lin. 14. loco $\frac{(z' - z)}{a^x(a-1)^2}$ lege $\frac{(z' - az)}{a^x(a-1)^2}$.

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI
EXPLICATIONEM.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
1100 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637



CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.



Ex iis, quae in Libro superiori de
quantitatibus variabilibus atque func-
tionibus sunt exposita, perspicuum est,
prout quantitas variabilis actu varia-
tur, ita omnes eius functiones varia-
tionem pati. Sic, si quantitas variabilis x capiat incre-
mentum ω , ita ut pro x scribatur $x + \omega$, omnes func-
tiones ipsius x , cuiusmodi sunt xx ; x^3 ; $\frac{a+x}{xx+aa}$,
alios induent valores: scilicet xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$;

A 2

x^3

x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a+x}{aa+xx}$

transmutabitur in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$. Huiusmodi ergo

alteratio semper orietur, nisi functio speciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, reuera autem sit quantitas constans, veluti x^0 ; quo casu talis functio inuariata manet, vtcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum sint satis exposita, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus vniuersa analysis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x : pro qua successive valores in arithmetica progressionem procedentes substituantur, scilicet: x ; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c. ac denotet y^I valorem quem functio y induit, si in ea loco x substituatur $x+\omega$; simili modo sit y^{II} is ipsius y valor, si loco x scribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; &c. valores ipsius y , qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c. ita vt isti diuersi valores ipsarum x & y sequenti modo sibi respondeant:

x ; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c.

y ; y^I ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; &c.

3. Quemadmodum series arithmetica x ; $x+\omega$; $x+2\omega$; &c. in infinitum continuari potest, ita series ex functione y orta y ; y^I ; y^{II} ; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendeat ab indole functionis.

tionis y . Sic, si fuerit $y = x$; vel $y = ax + b$; series y ; y^I ; y^{II} ; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y = \frac{a}{bx + c}$, series prodibit harmonica: sint autem sit $y = a^x$, habebitur series geometrica. Neque vlla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius y oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x , ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare, cum omnis series certa lege formata habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, vti in doctrina de seriebus fufius explicari solet.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y , y^I , y^{II} , y^{III} , &c. inter se discrepant, attendimus; quas vt ad differentialium naturam accommodemus, sequentibus signis indicemus, vt sit

$$y^I - y = \Delta y; \quad y^{II} - y^I = \Delta y^I; \quad y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}; \quad \&c.$$

Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega = 1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali vti, qui pro arbitrio augeri diminuiue queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^I primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negativo agnoscitur.

5. Quoniam y^{II} oritur ex y , si loco x scribatur $x + 2\omega$; manifestum est eandem quantitatem esse orituram, si primum pro x ponatur $x + \omega$, tumque denuo $x + \omega$ loco x statuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I} , si in hoc loco x scribatur $x + \omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipsius y^{I} quod capit posito $x + \omega$ loco x ; sicque Δy^{I} vocatur simili modo *Differentia* ipsius y^{I} . Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipsius y^{II} , seu eius incrementum, quod accipit, si loco x ponatur $x + \omega$; atque Δy^{III} erit differentia, seu incrementum ipsius y^{III} , & ita porro. Hoc pacto ex serie valorum ipsius y , qui sunt y ; y^{I} ; y^{II} ; y^{III} ; &c. obtinebitur series differentiarum Δy ; Δy^{I} ; Δy^{II} ; &c. quae inveniuntur, si quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahatur.

6. Inuenta serie differentiarum, si ex ea denuo differentiae capiantur; quamlibet a sequente subtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae secundae*; hocque modo per characteres convenientissime repraesentantur, ut significet:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta y &= \Delta y^{\text{I}} - \Delta y \\ \Delta\Delta y^{\text{I}} &= \Delta y^{\text{II}} - \Delta y^{\text{I}} \\ \Delta\Delta y^{\text{II}} &= \Delta y^{\text{III}} - \Delta y^{\text{II}} \\ \Delta\Delta y^{\text{III}} &= \Delta y^{\text{IV}} - \Delta y^{\text{III}} \\ &\text{\&c.}\end{aligned}$$

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia secunda ipsius y ; $\Delta\Delta y^{\text{I}}$ differentia secunda ipsius y^{I} , & ita porro. Simili autem modo ex differentiis secundis, si denuo earum differentiae

tiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo scribendae $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; &c. sicque ultra quousque libuerit.

§. Repraesentemus singulas has differentiarum series ita in schemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y ; y^I ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy ; Δy^I ; Δy^{II} ; Δy^{III} ; Δy^{IV} ; &c.

DIFFERENTIAE SECUNDAE.

$\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^I$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; &c.

DIFFERENTIAE TERTIAE.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; $\Delta^3 y^{II}$; &c.

DIFFERENTIAE QUARTAE.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; &c.

DIFFERENTIAE QUINTAE.

$\Delta^5 y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quosque terminos a sequentibus subtrahendo. Quacunque ergo functione ipsius x loco y substituta, quoniam valores

y^I

$y^I, y^{II}, y^{III}, \&c.$ per notas compositiones facile formantur, ex iis sine labore singulae differentiarum series invenientur.

8. Ponamus esse $y = x$; eritque $y^I = x^I = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$; & ita porro. Vnde differentiis sumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^I = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipsius x erunt constantes, ac proinde differentiae secundae omnes evanescent; pariterque differentiae tertiae, & sequentium ordinum omnes. Cum igitur sit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iste character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x , cuius valores successivi $x, x^I, x^{II}, x^{III}, \&c.$ arithmeticam progressionem constituere assumuntur, differentiae $\Delta x, \Delta x^I, \Delta x^{II}, \&c.$ erunt constantes atque inter se aequales; ac propterea erit $\Delta \Delta x = 0$, $\Delta^3 x = 0$, $\Delta^4 x = 0$, sicque porro.

9. Pro valoribus ipsius x , qui ipsi successive tribuntur, progressionem arithmeticam hic assumimus, ita ut horum valorum differentiae primae sint constantes, secundae ac reliquae omnes evanescant. Quod etsi ab arbitrio nostro pendet, cum aliam quamcunque progressionem aequae adhibere potuissimus; tamen progressio arithmetica prae reliquis omnibus commodissime usurpari solet, cum quod sit simplicissima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere potest, pateat. Tribuendo enim ipsi ω valores tam negatiuos quam affirmatiuos, in hac serie valorum ipsius x omnes omnino continentur quantita-

titates reales, quae in locum ipsius x substitui possunt: contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negativos nullus aditus patuisset. Hanc ob causam variabilitas functionum y ex valoribus ipsius x progressionem arithmeticam constituentibus aptissime diiudicatur.

10. Vti est $\Delta y = y^1 - y$, ita differentiae ulteriores quoque ex terminis primae seriei $y, y^1, y^2, y^3, \&c.$ definiri possunt.

Cum enim sit $\Delta y^1 = y^2 - y^1$

erit

$$\Delta \Delta y = y^2 - 2y^1 + y$$

&

$$\Delta \Delta y^1 = y^3 - 2y^2 + y^1$$

ideoque

$$\Delta^3 y = \Delta \Delta y^1 - \Delta \Delta y = y^3 - 3y^2 + 3y^1 - y$$

simili modo erit

$$\Delta^4 y = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y^1 + y$$

&

$$\Delta^5 y = y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y^1 - y$$

quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in potestatibus Binomii observatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis seriei $y; y^1; y^2; y^3; \&c.$ determinatur, ita differentia secunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiusque ordinis ipsius y , simili modo differentiae omnium ordinum ipsius $y^1; y^2; \&c.$ definientur.

11. Proposita ergo quacunque Functione y singulae eius differentiae, tam prima quam sequentes, quae quidem differentiae ω , qua valores ipsius x progrediuntur, respondent, poterunt inueniri. Neque vero ad hoc opus est, ut series valorum ipsius y ulterius continuetur: quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur; si in y loco x scribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^1 ipsa functio y subtrahatur; ita differentia secunda $\Delta \Delta y$ obtinebitur si in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, ut oriatur Δy^1 , atque Δy a Δy^1 subtrahatur. Simili modo si differentiae secundae $\Delta \Delta y$ capiatur Differentia, eam subtrahendo a valore, quem induit, si loco x ponatur $x + \omega$, proueniet differentia tertia $\Delta^3 y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^4 y$, &c. Dummodo ergo quis nouerit differentiam primam cuiusque functionis inuestigare, simul poterit differentiam secundam, tertiam, omnesque sequentes inuenire: propterea quod differentia secunda ipsius y nil aliud est, nisi differentia prima ipsius Δy ; & differentia tertia ipsius y nil aliud, nisi differentia prima ipsius $\Delta \Delta y$; sicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusue partibus composita, ut sit $y = p + q + r + \&c.$; tum, quia est $y^1 = p^1 + q^1 + r^1 + \&c.$, erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \&c.$, similique modo porro $\Delta \Delta y = \Delta \Delta p + \Delta \Delta q + \Delta \Delta r + \&c.$, unde inuentio differentiarum, si functio proposita ex partibus fuerit composita, non parum facilius redditur. Quod si vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q , nempe

$$y =$$

$y = pq$, quia erit $y^1 = p^1 q^1$, & $p^1 = p + \Delta p$ atque $q^1 = q + \Delta q$, fiet $p^1 q^1 = pq + p \Delta q + q \Delta p + \Delta p \Delta q$, hincque $\Delta y = p \Delta q + q \Delta p + \Delta p \Delta q$. Vnde, si sit p quantitas constans $= a$, ob $\Delta a = 0$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a \Delta q$, similique modo differentia secunda $\Delta \Delta y = a \Delta \Delta q$, tertia $\Delta^3 y = a \Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra est aggregatum ex aliquot potestatibus ipsius x ; omnes differentias functionum rationalium integrarum inuenire poterimus, si differentias potestatum tantum exhibere nouerimus. Hancobrem singularum potestatum quantitatis variabilis x differentias inuestigemus in sequentibus exemplis.

Cum autem sit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiam si x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus esse $\Delta x = \omega$; & $\Delta \Delta x = 0$, simulque differentiae sequentium ordinum euanescent. Quae cum sint manifesta a Potestate secunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Inuenire differentias omnium ordinum potestatis x^2 .

Cum hic sit $y = x^2$, erit $y^1 = (x + \omega)^2$; ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae est differentia prima. Iam ob ω quantitatem constantem, erit $\Delta \Delta y = 2\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentias omnium ordinum potestatis x^3 .

Ponatur $y = x^3$; & cum sit $y^1 = (x + \omega)^3$,

B a

erit

erit

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

quae est differentia prima. Deinde ob

$$\Delta. xx = 2\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta. 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

&

$$\Delta. 3\omega^2 x = 3\omega^3; \quad \& \quad \Delta. \omega^3 = 0:$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3: \quad \text{atque} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3:$$

Differentiae vero sequentes evanescent.

EXEMPLUM III.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^4 .

$$\text{Posito } y = x^4; \quad \text{ob } y^1 = (x + \omega)^4$$

erit

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4;$$

quae est differentia prima. Tum ex praecedentibus est:

$$\Delta. 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$

$$\Delta. 6\omega^2 x^2 = \dots \dots \dots 12\omega^3 x + 6\omega^4$$

$$\Delta. 4\omega^3 x = \dots \dots \dots + 4\omega^4$$

$$\Delta. \omega^4 = \dots \dots \dots 0$$

His colligendis erit differentia secunda:

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4:$$

Quia deinde porro est:

$$\Delta. 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$

$$\Delta. 24\omega^3 x = \dots \dots \dots 24\omega^4$$

$$\Delta. 14\omega^4 = \dots \dots \dots 0$$

pro-

prodibit differentia tertia:

$$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

atque tandem differentia quarta:

$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$

quae cum sit constans, differentiae sequentium ordinum evanescent.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentias cuiusvis ordinis potestatis x^n .

Ponatur $y = x^n$; & cum sit $y^I = (x + \omega)^n$; $y^{II} = (x + 2\omega)^n$; $y^{III} = (x + 3\omega)^n$; &c. Potestates euolutae dabunt:

$$y = x^n$$

$$y^I = x^n + \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1} 2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1} 3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1} 4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

Hinc, differentiis sumendis, prodibit:

$$\Delta y = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^I = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 3 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 7 \omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 5 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 19 \omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 7 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 37 \omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

fumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta \Delta y = n(n-1) \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 6 \omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 14 \omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta \Delta y^I = n(n-1) \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 12 \omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 50 \omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta \Delta y^{II} = n(n-1) \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 18 \omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 110 \omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex

Ex his per subtractionem ulterius eruitur:

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \dots$$

$$\Delta^3 y^2 = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 60\omega^4 x^{n-4} + \dots$$

atque porro:

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \dots$$

14. Quo lex, secundum quam istae differentiae potestatis x^n progrediuntur, facilius perspiciatur. Ponamus primo brevitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

&c.

De-

Deinde sequens formetur Tabula, quae pro singulis differentiis inseruiet:

y	1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; &c.
Δy	0; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 1; 1; 1; &c.
$\Delta^2 y$	0; 0; 2; 6; 14; 30; 62; 126; 254; &c.
$\Delta^3 y$	0; 0; 0; 6; 36; 150; 540; 1806; 5796; &c.
$\Delta^4 y$	0; 0; 0; 0; 24; 240; 1560; 8400; 40824; &c.
$\Delta^5 y$	0; 0; 0; 0; 0; 120; 1800; 16800; 126000; &c.
$\Delta^6 y$	0; 0; 0; 0; 0; 0; 720; 15120; 191520; &c.
$\Delta^7 y$	0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 5040; 141120; &c.

in qua Tabula numerus cuiusvis seriei inuenitur, si eiusdem seriei praecedens ad numerum supra positum addatur, atque summa per indicem characteri Δ infixum multiplicetur. Sic, in serie differentiae $\Delta^5 y$ respondente, terminus 16800 inuenitur, si praecedens 1800 ad supra scriptum 1560 addatur, atque Summa 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac constituta, singulae differentiae Potestatis $x^n = y$ sequenti modo se habebunt:

$$\Delta y = A \omega x^{n-1} + B \omega^2 x^{n-2} + C \omega^3 x^{n-3} + D \omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = 2 B \omega^2 x^{n-2} + 6 C \omega^3 x^{n-3} + 14 D \omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = 6 C \omega^3 x^{n-3} + 36 D \omega^4 x^{n-4} + 150 E \omega^5 x^{n-5} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = 24 D \omega^4 x^{n-4} + 240 E \omega^5 x^{n-5} + 1560 F \omega^6 x^{n-6} + \&c. \quad \text{Ge.}$$

Generatim autem potestatis x^n differentia ordinis m , seu $\Delta^m y$, sequenti modo exprimetur.

Sit

$$I = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1} I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2} K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3} L;$$

&c.

Deinde vero fit:

$$\alpha = (m+1)^m = \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m-2} + \&c.$$

$$\xi = (m+1)^{m+1} = \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m-2} + \&c.$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} = \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m-2} + \&c.$$

quibus valoribus inuentis erit

$$\Delta^m y = \alpha I \omega^{m-n} + \xi K \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L \omega^{m+2} x^{n-m-2} + \&c.$$

cuius expressionis ratio ex modo, quo singulae differentiae ex valoribus y , y' , y'' , y''' , &c. eliciuntur, sponte sequitur.

16. Ex his perspicuum est, si exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus, tandem ad differentias perueniri constantes, hisque vltiores omnes esse $= 0$. Sic erit

$$\begin{aligned}\Delta. x &= \omega \\ \Delta^2. x^2 &= 2\omega^2 \\ \Delta^3. x^3 &= 6\omega^3 \\ \Delta^4. x^4 &= 24\omega^4 && \& \text{ tandem} \\ \Delta^n. x^n &= 1. \quad 2. \quad 3. \quad . \quad . \quad . \quad n. \omega^n\end{aligned}$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias constantes deducetur. Scilicet, functio ipsius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet constantem $= a\omega$. Functio secundi gradus $axx + bx + c$ differentiam secundam habebit constantem $= 2a\omega\omega$, functionis autem tertii gradus differentia tertia erit constans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo inuenimus differentias potestatis x^n , quoque latius patet, atque ad eas potestates, quarum exponens n est numerus negatiuus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiusmodi potestatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum secundarum ac sequentium non tam facile ceruitur: erit ergo,

$$\begin{aligned}\Delta. x &= \omega \\ \Delta. x^2 &= 2\omega x + \omega \\ \Delta. x^3 &= 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3 \\ \Delta. x^4 &= 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \&c.\end{aligned}$$

Si-

Simili modo vero erit

$$\Delta. x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} +$$

&c.

$$\Delta. x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} +$$

&c.

$$\Delta. x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} +$$

&c.

$$\Delta. x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} +$$

&c.

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta. x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} -$$

&c.

$$\Delta. x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{4}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} -$$

&c.

$$\Delta. x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} +$$

&c.

$$\Delta. x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} +$$

&c.

18. Apparet itaque has differentias, si exponens ipsius x non fuerit numerus integer affirmatiuus, in infinitum progredi, seu ex terminorum numero infinito constare. Interim tamen eadem differentiae quoque per expressionem finitam exhiberi possunt. Cum enim, posito $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, fit $y^1 = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta. x^{-1} = \Delta. \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$; vnde, si fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in seriem conuertatur, prodit expressio superior. Simili modo erit

$$\Delta. x^{-2} = \Delta. \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta. \sqrt{x} = \sqrt{x+\omega} - \sqrt{x}, \text{ \& } \Delta. \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\omega}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae si more solito in series explicentur, superiores expressiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, siue fractarum siue irrationalium, inueniri possunt: sic, si quaeratur differentia prima fractionis. $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia est $y^1 = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit $\Delta y = \Delta. \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2} - \frac{1}{aa+xx}$, quae expressio quoque in seriem infinitam conuerti potest.

Pona-

Ponatur $aa + xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$;

erit

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

Restitutis ergo loco P & Q valoribus erit :

$$\Delta y = \Delta \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x - \omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa+xx)^3} - \frac{8\omega^3 x^3 - 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x - \omega^6}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

quæ termini si secundum potestates ipsius ω ordinentur erit :

$$\Delta \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2} + \frac{\omega^2(xx-aa)}{(aa+xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-aa x)}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

20. Similibus seriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi possunt.

Sit proposita ista functio $y = \sqrt[3]{(aa+xx)}$;

&, cum sit $y^3 = \sqrt[3]{(aa+xx \pm 2\omega x + \omega\omega)}$,

ponatur $aa+xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$

$$\text{erit } \Delta y = \sqrt[3]{(P+Q)} - \sqrt[3]{P} = \frac{Q}{2\sqrt[3]{P}} - \frac{QQ}{8P\sqrt[3]{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt[3]{P}} - \&c.$$

vnde fiet

$$\begin{aligned}\Delta y = \Delta. V(aa + xx) &= \frac{2\omega x + \omega\omega}{2V(aa + xx)} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa + xx)V(aa + xx)} + \\ &\text{vel} \dots \dots \dots \&c. \\ &= \frac{\omega x}{V(aa + xx)} + \frac{aa\omega^2}{2(aa + xx)V(aa + xx)} - \frac{aa\omega^3 x}{2(aa + xx)^2 V(aa + xx)} \\ &\quad \&c.\end{aligned}$$

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipsius x , quae sit y , differentiam hac forma exprimi posse, vt sit

$$\Delta y = -P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \dots \&c.$$

existentibus $P, Q, R, S, \&c.$ certis ipsius x functionibus, quae quouis casu ex functione y definiri possunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum transcendentium excluduntur, id quod ex sequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipsius x .

Ponatur $y = lx$; & cum sit $y^1 = l(x + \omega)$,
erit

$$\Delta y = y^1 - y = l(x + \omega) - lx = l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right).$$

Huiusmodi autem logarithmum supra docuimus per seriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta. lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \dots \&c.$$

EX.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x .

Posito $y = a^x$ erit $y^x = a^{x+\omega} = a^x \cdot a^\omega$:
at supra ostendimus esse

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (l a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (l a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

quo valore introducto erit

$$\Delta \cdot a^x = y^x - y = \Delta y = \frac{a^x \omega l a}{1} + \frac{a^x \omega^2 (l a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^x \omega^3 (l a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius = 1, inuenire differentiam sinus arcus x .

Sit $\sin x = y$, erit $y^x = \sin(x+\omega)$,

vnde $\Delta y = y^x - y = \sin(x+\omega) - \sin x$.

At est $\sin(x+\omega) = \cos \omega \cdot \sin x + \sin \omega \cdot \cos x$,
atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\omega^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\omega^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

quibus seriebus substitutus erit :

$$\Delta \cdot \sin x = \omega \cdot \cos x - \frac{\omega^2}{2} \sin x - \frac{\omega^3}{6} \cos x + \frac{\omega^4}{24} \sin x + \frac{\omega^5}{120} \cos x - \&c.$$

EX.

EXEMPLUM IV.

*In circulo cuius radius = 1 inuenire differentiam
cosinus arcus x .*

Posito $y = \cos x$, ob $y^1 = \cos(x + \omega)$

erit $y^1 = \cos \omega \cdot \cos x - \sin \omega \cdot \sin x$

& $\Delta y = \cos \omega \cdot \cos x - \sin \omega \cdot \sin x - \cos x$

Seriebus ergo ante expositis adhibendis prodibit :

$$\Delta \cos x = -\omega \sin x - \frac{\omega^2}{2} \cos x + \frac{\omega^3}{6} \sin x + \frac{\omega^4}{24} \cos x - \frac{\omega^5}{120} \sin x -$$

&c.

22. Cum igitur proposita quacunque functione
ipsius x , siue algebraica siue transcendente, quae sit y ,
eius differentia prima eiusmodi habeat formam ut sit :

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

si huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam
secundam ipsius y huiusmodi formam esse habituram :

$$\Delta \Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{\&c.}$$

similique modo differentia tertia ipsius y , erit huiusmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{\&c.}$$

ficque porro.

Vbi notandum est litteras P , Q , R , &c. hic non
pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera
in diuersis differentiis eandem functionem ipsius x deno-
tari : ideo enim tantum iisdem litteris utor, ne sufficiens
diuersarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum istae differentiarum formae probe sunt notan-
dae, cum in Analyfi infinitorum maximum vsum offerant.

23. Cum

23. Cum igitur modum exposuerim, quo cuiusvis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae sequentium ordinum inueniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y successiuis $y^I, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, \&c.$ reperiuntur: vicissim ex differentiis ipsius y cuiusque ordinis datis, isti ipsi variati valores ipsius y elici poterunt. Erit enim

$$y^I = y + \Delta y$$

$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$

$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$

$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$

&c.

vbi coefficientes numerici iterum ex evolutione binomii nascuntur. Quemadmodum ergo $y^I, y^{II}, y^{III}, \&c.$ sunt valores ipsius y , qui oriuntur si loco x successiue ponantur hi valores $x + \omega, x + 2\omega, x + 3\omega, \&c.$ statim valorem ipsius $y^{(n)}$ assignare poterimus, qui prodit si loco x scribatur $x + n\omega$, erit scilicet iste valor:

$$y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \&c.$$

Hincque adeo etiam valores ipsius y praeberi possunt si n fuerit numerus negatiuus. Sic, si loco x ponatur $x - \omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \&c.$$

D

fin

fin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y transibit in :

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \&c.$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inuerfa, qua, si detur differentia, ex ea ipsa illa functio, cuius est differentia, inuestigari debeat. Cum autem hoc sit difficillimum atque saepe numero ipsam analysin infinitorum requirat, casus tantum quosdam faciliores euoluamus. Primum igitur, regrediendo, si functionis cuiuspiam differentiam inuenerimus, vicissim hac differentia proposita, ipsa illa functio, vnde est nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax + b$ differentia sit $a\omega$, si quaeratur cuiusnam functionis differentia sit $a\omega$; responsio erit in promptu, eam functionem esse $ax + b$. In hac igitur reperitur quantitas constans b , quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio nostro penderet. Perpetuo autem si functionis cuiusvis P differentia fuerit Q , quoque functionis $P + A$, (denotante A quantitatem quamcunque constantem,) differentia erit Q . Hinc, si ista differentia Q proponatur, functio, ex qua ea est orta, erit $P + A$, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum constans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaesitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod summa differentiae opponi solet, tum etiam, quod functio quaesita reuera sit summa omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum

dum enim est $y^I = y + \Delta y$, & $y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^I$, si valores ipsius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x - \omega$ respondet, scribatur y_I , huncque praedens y_{II} , & qui ultra praecedunt y_{III} , y_{IV} , y_V , &c. hincque series formetur retrograda, cum suis differentiis:

$$y_V ; y_{IV} ; y_{III} ; y_{II} ; y_I ; y$$

&

$$\Delta y_V ; \Delta y_{IV} ; \Delta y_{III} ; \Delta y_{II} ; \Delta y_I$$

erit

$$y = \Delta y_I + y_I$$

&

ob $y_I = \Delta y_{II} + y_{II}$, porroque $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$
erit utique

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V$$

&c.

sicque erit functio y , cuius differentia est Δy , summa omnium valorum antecedentium differentiae Δy , qui oriuntur, si loco x scribantur valores antecedentes $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam vti sumus signo Δ , ita summam indicabimus signo Σ : scilicet, si functionis y differentia fuerit z , erit $z = \Delta y$; vnde, si y detur, differentiam z inuenire ante docuimus. Quodsi autem data sit differentia z , eiusque summa y reperiri debeat, fiet $y = \Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z = \Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y = \Sigma z$; vbi constans quantitas quaecunque adiici poterit ob ratio-

nes supra datas; ex quo, aequatio $z = \Delta y$, si inuertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia sit $a\Delta y = az$, erit $\Sigma az = ay$, si quidem a sit quantitas constans. Quia ergo est $\Delta x = \omega$; erit $\Sigma \omega = x + C$ & $\Sigma a\omega = ax + C$; atque ob ω quantitatem constantem, erit $\Sigma \omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma \omega^3 = \omega^2 x + C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias potestatum ipsius x supra inuentas inuertamus, erit

$$\Sigma \omega = x; \text{ hincque } \Sigma 1 = \frac{x}{\omega};$$

Deinde habemus

$$\Sigma (2\omega x + \omega^2) = x^2;$$

vnde fit

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Porro est

$$\Sigma (3\omega x x + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

feu

$$3\omega \Sigma x^2 + 3\omega^2 \Sigma x + \omega^3 \Sigma 1 = x^3$$

ergo

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \Sigma x - \frac{\omega^2}{3} \Sigma 1$$

feu

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6};$$

simili modo erit

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2} \Sigma x^2 - \omega^2 \Sigma x - \frac{\omega^3}{4} \Sigma 1$$

vbi

vbi, si loco Σx^2 , Σx & $\Sigma 1$ valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega x}{4}.$$

Deinde, cum sit

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega \Sigma x^3 - 2\omega^2 \Sigma x^2 - \omega^3 \Sigma x - \frac{\omega^4}{5} \Sigma 1$$

erit, adhibendis substitutionibus:

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} \omega x^3 - \frac{1}{30} \omega^3 x$$

simili modo vltcrius progrediendo reperietur

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} \omega x^4 - \frac{1}{12} \omega^3 x^2$$

&

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} \omega x^5 - \frac{1}{6} \omega^3 x^3 + \frac{1}{42} \omega^5 x$$

quas expressiones infra facilius inuenire docebimus.

28. Si ergo differentia proposita fuerit functio rationalis integra ipsius x , eius summa, (seu ea functio, cuius ea est differentia) ex his formulis facile inuenitur. Quia enim differentia ex aliquot potestatibus ipsius x constabit, quaeratur vnus cuiusque termini summa, omnesque istae summae colligantur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inuentarum, erit

D 3

Σaxx

CAPUT I.

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

&

$$\Sigma bx = \dots - \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

atque

$$\Sigma c = \dots \dots \dots \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has summas erit

$$\Sigma(axx+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega-b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2-3b\omega+6c)}{6\omega}x + C$$

quae est functio quaesita, cuius differentia est $axx+bx+c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia est $x^4-2\omega^2xx+\omega^4$.

Operationem simili modo instituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega x^3$$

&

$$- \Sigma 2\omega^2 x^2 = \dots - \frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

atque

$$+ \Sigma \omega^4 = \dots \dots \dots + \omega^3 x$$

vnde functio quaesita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C$$

Si enim hic loco x ponatur $x+\omega$, atque a quantitate resultante subtrahatur ista inuenta, remanebit proposita differentia $x^4-2\omega^2x^2+\omega^4$.

29. Si

29. Si summas, quas pro potestatibus ipsius x invenimus, attentius inspiciamus, in terminis primis, secundis, ac tertiis mox quidem legem observabimus, qua illi secundum singulas potestates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita est perspicua, ut summam potestatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in sequentibus docebitur esse:

$$\begin{aligned} \Sigma x^n &= \\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} &- \frac{1}{2} x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n\omega}{2 \cdot 3} x^{n-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-3} \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^{n-5} \\ &- \frac{3}{10} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-6)\omega^7}{2 \cdot 3 \dots 8 \cdot 9} x^{n-7} \\ &+ \frac{5}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-8)\omega^9}{2 \cdot 3 \dots 10 \cdot 11} x^{n-9} \\ &- \frac{691}{210} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-10)\omega^{11}}{2 \cdot 3 \dots 12 \cdot 13} x^{n-11} \\ &+ \frac{35}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-12)\omega^{13}}{2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 15} x^{n-13} \\ &- \frac{3617}{30} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-14)\omega^{15}}{2 \cdot 3 \dots 16 \cdot 17} x^{n-15} \\ &+ \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-16)\omega^{17}}{2 \cdot 3 \dots 18 \cdot 19} x^{n-17} \\ &- \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-18)\omega^{19}}{2 \cdot 3 \dots 20 \cdot 21} x^{n-19} \\ &+ \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-20)\omega^{21}}{2 \cdot 3 \dots 22 \cdot 23} x^{n-21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 25} \cdot (n-22)\omega^{23} x^{n-23} \\
& + \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 26 \cdot 27} \cdot (n-24)\omega^{25} x^{n-25} \\
& - \frac{23749461029}{30} \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 28 \cdot 29} \cdot (n-26)\omega^{27} x^{n-27} \\
& + \frac{8615841276005}{462} \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31} \cdot (n-28)\omega^{29} x^{n-29} \\
& \quad \&c. + C
\end{aligned}$$

cuius progressionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis est situm, qui quemadmodum formantur, hic locus nondum est, vbi exponi queat.

30. Apparet autem nisi n fit numerus integer affirmatiuus, hanc summae expressionem in infinitum progredi, neque hoc modo summam in forma finita exhiberi posse. Ceterum hic notandum est, non omnes potestates ipsius x proposita x^n inferiores occurrere; desunt enim termini x^{n-2} , x^{n-4} , x^{n-6} , x^{n-8} , &c. quippe quorum coefficientes sunt $=0$, etiamsi termini secundi x^n coefficientis hanc legem non sequatur, sed sit $= -\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius expressionis ope summae potestatum, quarum exponentes sunt vel negatiui vel fracti in forma infinita exhiberi solo excepto casu quo $n = -1$, quia tunc fit terminus $\frac{x^n + 1}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, posito $n = -2$; erit

$$\sum \frac{1}{xx}$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{xx} = C & - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^3}{5x^5} \\ & - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^5}{7x^7} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210} \cdot \frac{\omega^{11}}{13x^{13}} \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30} \cdot \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c. \end{aligned}$$

31. Si ergo differentia proposita fuerit potestas ipsius x quaecunque, eius summa hinc perpetuo assignari, seu functio, cuius ea sit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia proposita aliam habeat formam, ut in potestates ipsius x , tanquam partes, distribui nequeat, tum summa difficillime ac saepenumero prorsus non inueniri potest: nisi forte pateat, eam ex quapiam functione esse ortam. Hanc ob causam conueniet plurium functionum differentias investigare easque probe notare, ut si quando huiusmodi differentia proponatur, eius summa, seu functio unde est orta, statim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas suppeditabit, quarum ope inuentio summarum mirifice subleuabitur.

32. Facilius autem saepe summa quaesita reperitur, si differentia proposita ex factoribus simplicibus constet, qui progressionem arithmeticam constituent, cuius differentia sit ipsa quantitas ω . Sic, si proposita fuerit functio $(x + \omega)(x + 2\omega)$, cuius differentia quaeratur; quia,posito $x + \omega$ loco x , haec functio abit in $(x + 2\omega)$

E

 $(x +$

$(x + 3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x + 2\omega)$. Quare vicissim, si proponatur differentia $2\omega(x + 2\omega)$, eius summa erit $(x + \omega)(x + 2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma(x + 2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + \omega)(x + 2\omega).$$

Simili modo, si proponatur functio $(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$, cum sit eius differentia $2\omega(x + (n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma(x + (n+1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma(x + n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus constet, ut sit $y = (x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$, cum sit

$$y' = (x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y = 3\omega(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma(x + n\omega)(x + (n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur esse:

$$\Sigma(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega) = \frac{1}{4\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega).$$

unde lex inveniendi summas, si differentia ex pluribus huiusmodi factoribus constet, sponte patet. Quamvis au-

autem hae differentiae sint functiones rationales integrae, tamen earum summae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractionum summas inveniendas. Sit enim proposita fractio

$$y = \frac{1}{x+n\omega}; \text{ quia erit } y^1 = \frac{1}{x+(n+1)\omega}$$

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x+n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

$$\text{ob } y^1 = \frac{1}{(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

$$= \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

E 2

Simili

Simili modo erit porro

$$\begin{aligned} & \sum \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)} \\ &= \frac{-1}{3\omega} \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)} \end{aligned}$$

35. Modus iste summandi probe est tenendus, quia huiusmodi differentiarum summae per praecedentem methodum inueniri non possunt. Quodsi autem differentia insuper habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progressionem procedant, tum tutissimus modus inuestigandi summas est, ut differentia proposita in suas fractiones simplices resoluatur, quarum singulae etsi summari nequeunt, tamen binis coniungendis toties summa inueniri potest, quoties id quidem fieri licet; tantum enim erit dispiciendum, utrum summa ope huius formulae inueniri queat:

$$\sum \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \sum \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etsi enim neutra harum summarum per se exhiberi potest, tamen earum differentia cognoscitur.

36. His igitur casibus negotium redit ad resolutionem cuiusque fractionis in fractiones suas simplices, quae in superiori libro fufius est ostensa. Quemadmodum ergo eius beneficio summae inueniri queant, aliquot exemplis docebinus.

EXEM -

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}.$$

Resolvatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\sum \frac{1}{x+n\omega} = \sum \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega}$$

erit

$$\sum \frac{1}{x} = \sum \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}.$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega} \sum \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \sum \frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x+2\omega} =$$

$$\frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x+2\omega} - \frac{1}{\omega x},$$

at est

$$\sum \frac{1}{x+\omega} = \sum \frac{1}{x+2\omega} - \frac{1}{x+\omega};$$

vnde summa quaesita erit

$$-\frac{1}{\omega x} - \frac{2}{\omega(x+\omega)} = \frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur summa, cuius differentia est

$$\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}.$$

Posita hac differentia $= z$, erit $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3\omega}$
ideoque

$$\begin{aligned} \Sigma z &= \Sigma \frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{x+3\omega} = \Sigma \frac{1}{x+\omega} - \\ &\Sigma \frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+2\omega} - \Sigma \frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\omega} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x+2\omega}. \end{aligned}$$

quae est summa quaesita. Quoties ergo hoc modo signa summatoria Σ sese tandem tollunt, toties differentiae propositae summa exhiberi poterit; sin autem haec destructio non succedat, signum hoc est, summam inueniri non posse.



CAPUT II.

DE VSU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam serierum per differentias maxime illustrari, ex primis rudimentis satis est notum. Progressionis enim arithmeticae, quae primum considerari solet, praecipua proprietas in hoc versatur, ut eius differentiae primae sint inter se aequales; hinc differentiae secundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde series, quarum differentiae secundae demum sunt aequales, quae hanc ob rem *secundi ordinis* commode appellantur, dum progressiones arithmeticae series *primi ordinis* vocantur. Porro igitur series *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae sunt constantes; atque ad *quartum ordinem* & sequentes eae referentur series, quarum differentiae quatae, & vltiores demum sunt constantes.

38. In hac diuisione infinita serierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes series ad haec genera reuocare licet. Occurrunt enim innumerabiles series, quae, differentiis sumendis, nunquam ad terminos constantes deducunt: cuiusmodi, praeter innumeras alias sunt progressiones geometricae, quae nunquam praebent differentias constantes, uti ex hoc exemplo videre licet.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

Cum enim series differentiarum cuiusque ordinis aequalis sit ipsi seriei propositae, aequalitas differentiarum prorsus excluditur. Quocirca plures serierum classes constitui debent; quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias constantes revocantur, subdividitur; quam classem in hoc capite potissimum considerabimus.

39. Duae autem res ad naturam serierum cognoscendam imprimis requiri solent, Terminus generalis atque Summa seu Terminus summatorius. Terminus generalis est expressio indefinita, quae vnumquemque seriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea est functio quantitatis variabilis x , quae, posito $x = 1$, terminum seriei primum exhibet; secundum vero posito $x = 2$; tertium posito $x = 3$; quartum posito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscunque seriei terminus inuenietur, etiamsi lex, qua singuli termini cohaerent, non respiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, statim terminus millesimus cognoscetur. Ita huius seriei

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, &c.

Terminus generalis est $xxx - x$; posito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; posito $x = 2$, oritur terminus secundus 6; si ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. vnde patet huius seriei terminum centesimum, posito $x = 100$ fore $= 2.10000 - 100 = 19900$.

40. Indices seu exponentes in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus sit in ordine: sic, termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices singulis cuiusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo

I N D I C E S.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

T E R M I N I.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

vnde statim patet G esse seriei propositae terminum septimum, cum eius index sit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, nisi terminus seriei, cuius index vel exponentis est numerus indefinitus x . Quemadmodum ergo in quolibet serierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel secundae, vel aliae sequentes sunt constantes, terminum generalem inueniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad inuestigationem summae sumus progressuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progressionem arithmeticas, quarum differentiae primae sunt constantes; sitque a terminus seriei primus, & b terminus primus seriei differentiarum, cui sequentes omnes sunt aequales: vnde series ita erit comparata.

I N D I C E S.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

T E R M I N I.

a , $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, &c.

D I F F E R E N T I A E.

b , b , b , b , b , &c.

F

Ex

Ex qua statim patet, terminum, cuius index sit $= x$, fore $a + (x-1)b$, eritque ergo terminus generalis $= bx + a - b$, qui ex terminis primis cum ipsius seriei, tum seriei differentiarum componitur. Quodsi autem terminus secundus seriei $a + b$ vocetur a^1 , ob $b = a^1 - a$, erit terminus generalis $= (a^1 - a)x + 2a - a^1 = a^1(x-1) - a(x-2)$ unde, ex cognitis terminis primo & secundo progressionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in serie secundi ordinis termini primi, ipsius seriei $= a$; differentiarum primarum $= b$; differentiarum secundarum $= c$; eritque ipsa series cum suis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a+b; a+2b+c; a+3b+3c; a+4b+6c; a+5b+10c; a+6b+15c;$

DIFFER. I. &c.

$b; b+c; b+2c; b+3c; b+4c; b+5c; \&c.$

DIFFER. II.

$c, c, c, c, c,$

ex cuius inspectione liquet terminum, cuius index $= x$

fore $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c$; qui ergo est ter-

minus generalis seriei propositae. Ponatur autem ipsius seriei terminus secundus $= a^1$, terminus tertius $= a^2$, cum sit $b = a^1 - a$; & $c = a^2 - 2a^1 + a$; vti ex na-

tura

tura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a + (x-1)(a^1 - a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} (a^2 - 2a^1 + a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^2(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^1(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^2}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) \left(\frac{a^2}{x-3} - \frac{2a^1}{x-2} + \frac{a}{x-1} \right);$$

ideoque ex tribus terminis ipsius seriei definitur.

43. Sit series tertii ordinis $a, a^1, a^2, a^3, a^4, \&c.$ eius differentiae primae $b, b^1, b^2, b^3, \&c.$ & differentiae secundae $c, c^1, c^2, c^3, \&c.$ & tertiae $d, d, d, \&c.$ quippe quae sunt constantes.

INDICES.

I 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

$a, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \&c.$

DIFFER. I.

$b, b^1, b^2, b^3, b^4, \&c.$

DIFFER. II.

$c, c^1, c^2, c^3, \&c.$

DIFFER. III.

$d, d, d, \&c.$

F 2

Quia

Quia est $a^1 = a + b$; $a^2 = a + 2b + c$; $a^3 = a + 3b + 3c + d$; $a^4 = a + 4b + 6c + 4d$; &c. ; erit terminus generalis, seu is cuius index est x ,

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} d$$

ficque terminus generalis ex differentiis formabitur.

Cum autem porro sit

$$b = a^1 - a; c = a^2 - 2a^1 + a; d = a^3 - 3a^2 + 3a^1 - a$$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^3 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - 3a^2 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1.2.3} + 3a^1 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1.2.3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3}$$

qui etiam hoc modo exprimetur; vt fit

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3} \left(\frac{a^3}{x-4} - \frac{3a^2}{x-3} + \frac{3a^1}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

INDICES

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

$a, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \&c.$

DIFFER. I.

$b, b^1, b^2, b^3, b^4, \&c.$

DIFFER. II.

$c, c^1, c^2, c^3, \&c.$

DIF.

DIFFER. III.

 $d, d^1, d^2, d^3, \&c.$

DIFFER. IV.

 $e, e^1, \&c.$

DIFFER. V.

 $f, \&c.$

ex ipsius seriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis $b, c, d, e, f, \&c.$ terminus generalis ita exprimetur, vt fit:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

donec ad differentias constantes perueniatur. Ex quo patet, si nunquam prodeant differentiae constantes, terminum generalem per expressionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipsis terminis seriei formantur; si earum valores substituantur, prodibit terminus generalis in eiusmodi forma expressus; cuiusmodi pro seriebus primi, secundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro seriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x$$

$$\left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^I}{x-2} + \frac{a}{x-1} \right)$$

F 3

vnde

vnde lex, qua sequentium ordinum termini generales componuntur, facile perspicitur. Ex his autem patet pro quouis ordine terminum generalem fore functionem ipsius x rationalem integram, in qua maxima ipsius x dimensio congruat cum ordine, ad quem series refertur. Ita serierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, secundi ordinis secundi gradus, & ita porro.

46. Differentiae autem, vti supra vidimus, ex ipsis terminis seriei ita resultant, vt fit

$$b = a^I - a$$

$$b^I = a^{II} - a^I$$

$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$

&c.

$$c = a^{II} - 2a^I + a$$

$$c^I = a^{III} - 2a^{II} + a^I$$

$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II}$$

&c.

$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^I - a$$

$$d^I = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^I$$

$$d^{II} = a^V - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$

&c.

Quare, cum in seriebus primi ordinis sint omnes valores ipsius $c = 0$; erit

$$a^{II} = 2a^I - a; a^{III} = 2a^{II} - a^I; a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}; \&c.$$

vnde patet has series simul esse recurrentes, & scalam relationis esse 2, -1. Deinde, cum in seriebus secundi ordi-

ordinis sint omnes valores ipsius $d=0$, erit

$$a^{\text{III}} = 3a^{\text{II}} - 3a^{\text{I}} + a; a^{\text{IV}} = 3a^{\text{III}} - 3a^{\text{II}} + a^{\text{I}}; \&c.$$

ideoque & hae erunt recurrentes scala relatione existente

$$3, -3, +1.$$

Simili modo apparebit omnes huius classis series, cuiuscunque sint ordinis, simul ad classem serierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, ut scala relationis constet ex coefficientibus potestatis binomii, vno gradu superioris, quam est ordo, ad quem series refertur.

47. Quia vero pro seriebus primi ordinis quoque omnes valores ipsius d & e , & sequentium differentiarum omnium sunt $=0$, erit quoque in his

$$a^{\text{III}} = 3a^{\text{II}} - 3a^{\text{I}} + a$$

$$a^{\text{IV}} = 3a^{\text{III}} - 3a^{\text{II}} + a^{\text{I}}$$

&c.

aut

$$a^{\text{IV}} = 4a^{\text{III}} - 6a^{\text{II}} + 4a^{\text{I}} - a$$

$$a^{\text{V}} = 4a^{\text{IV}} - 6a^{\text{III}} + 4a^{\text{II}} - a^{\text{I}}$$

&c.

Pertinebunt ergo & hinc ad series recurrentes idque infinitis modis, cum scalae relationis esse queant:

$$3, -3, +1; 4, -6, +4, -1; 5, -10, +10, -5, +1; \&c.$$

Similique modo intelligitur vnamquamque seriem huius, quam tractamus, classis simul esse seriem recurrentem innumeris modis: scala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \&c.$$

dum-

dummodo n sit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec series quoque ex evolutione fractionis, cuius denominator est $(1-y)^n$, prouti in superiori libro de seriebus recurrentibus fufius est ostenfum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius classis ferierum, cuiuscunque fint ordinis, terminos generales effe functiones ipsius x rationales integras, ita viciffim apparebit omnes series, quarum termini generales fint huiusmodi functiones ipsius x , ad hanc classem pertinere, atque tandem ad differentias constantes perducere. Et quidem, fi terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax + b$, dum series inde orta erit primi ordinis feu arithmetica, differentias primas habebit constantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio fecundi gradus in hac forma $axx + bx + c$ contenta, tum series ex eo oriunda, dum loco x fucceffive numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. fubftituuntur, erit ordinis fecundi, atque differentias fecundas habebit constantes: fimili modo, terminus generalis tertii gradus $ax^3 + bx^2 + cx + d$ dabit feriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non folum omnes feriei termini inveniuntur, fed etiam series differentiarum tam primarum quam fequentium deduci poffunt. Cum enim, fi feriei terminus primus fubtrahatur a fecundo, prodeat feriei differentiarum terminus primus: fecundus autem, fi ipfius feriei terminus fecundus a tertio auferatur, ita feriei differentiarum in obtinebitur terminus,

minus, cuius index est x ; si ipsius seriei terminus, cuius index est x , subtrahatur a sequente cuius index est $x+1$. Quare si in termino seriei generali loco x ponatur $x+1$, ab hocque valore terminus generalis subtrahatur, remanebit terminus generalis seriei differentiarum: si igitur X fuerit seriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX , (quae modo in praecedente capite ostenso inuenietur, si statuatur ibi $\omega = 1$.) terminus generalis seriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis seriei differentiarum secundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, sicque deinceps.

50. Quodsi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens potestatis ipsius x sit n ; ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem vno gradu inferiorem, nempe gradus $n-1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n-2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n-3$, & ita porro. Quare, si X fuerit functio primi gradus, vti $ax+b$, tum eius differentia ΔX erit constans $=a$; quae cum sit terminus generalis seriei primarum differentiarum, perspicitur seriem, cuius terminus generalis X sit functio primi gradus, fore arithmeticam seu primi ordinis. Simili modo si terminus generalis X fuerit functio secundi gradus ob $\Delta\Delta X$ constantem, series inde orta differentias secundas habebit constantes, eritque propterea ordinis secundi; sicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem constituens, eiusdem ordinis erit series ex eo nata.

51. Hanc ob rem series potestatum numerorum naturalium ad differentias constantes perveniunt, vti ex sequenti schemate fit manifestum.

POTEST. I.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

DIFFER. I.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

POTEST. II.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c.

DIFFER. I.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.

DIFFER. II.

2, 2, 2, 2, 2, 2, &c.

POTEST. III.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, &c.

DIFFER. I.

7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.

DIFFER. II.

12, 18, 24, 30, 36, &c.

DIFFER. III.

6, 6, 6, 6, &c.

POTEST. IV.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c.

DIFFER. I.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, &c.

DIFFER. II.

50, 110, 194, 302, 434, &c.

DIFFER. III.

60, 84, 108, 132, &c.

DIFFER. IV.

24, 24, 24, &c.

Quae

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inueniendis sunt praecepta, ea hic inferuent ad terminos generales differentiarum quarumvis, quae ex seriebus nascuntur, inueniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam seriei fuerit cognitus, eius ope non solum omnes eius termini in infinitum inueniri, sed etiam series retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes sint numeri negatiui, exhiberi poterunt, loco x numeros negatiuos substituendo: sic, si terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$, ponendo loco x tam negatiuos quam affirmatiuos indices, series vtrunque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

SERIES.

&c. +5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, &c.

DIFFER. I.

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

DIFFER. II.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque series ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, vt, si differentiae tandem fiant constantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expressionem infinitam assignari queant. Quin etiam ex termino gene-

rali ii termini, quorum indices sunt fracti; definientur, in quo serierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino serierum generali monitis, progrediamur ad summam, seu terminum summatorium serierum cuiusque ordinis inuestigandum. Proposita autem quacunque serie, TERMINUS summatorius est functio ipsius x , quae aequalis est summae tot terminorum seriei, quot vnitates continet numerus x . Ita ergo terminus summatorius erit comparatus, vt si ponatur $x = 1$, prodeat terminus primus seriei; sin autem ponatur $x = 2$, vt prodeat summa primi & secundi; facto autem $x = 3$, summa primi, secundi ac tertii; sicque deinceps. Hinc, si ex serie proposita noua series formetur, cuius primus terminus aequalis sit primo illius, secundus aequalis summae duorum, tertius aequalis summae trium, atque ita porro, haec noua series vocatur illius *summatrix*, huiusque seriei summatricis terminus generalis erit terminus summatorius seriei propositae: ex quo inuentio termini summatorii ad inuentio-nem termini generalis reuocatur.

54. Sit ergo series proposita haec

$$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \&c.$$

huiusque seriei summatrix sit

$$A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V, \&c.$$

erit ex eius natura modo exposita:

$$A =$$

$$A = a$$

$$A^I = a + a^I$$

$$A^{II} = a + a^I + a^{II}$$

$$A^{III} = a + a^I + a^{II} + a^{III}$$

$$A^{IV} = a + a^I + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$

&c.

Hinc seriei summatricis differentiae erunt:

$$A^I - A = a^I; A^{II} - A^I = a^{II}; A^{III} - A^{II} = a^{III}; \&c.$$

vnde series proposita termino primo minuta erit series differentiarum primarum seriei summatricis. Quodsi igitur seriei summatrici praefigatur terminus, = 0 vt habeatur:

$$0, A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V, \&c.$$

huius series primarum differentiarum erit ipsa series proposita:

$$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \&c.$$

55. Hanc ob rem seriei propositae differentiae primae, erunt differentiae secundae summatricis, atque differentiae secundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, si series proposita tandem habeat differentias constantes, tunc etiam eius summatricis ad differentias constantes deducetur, eritque igitur series eiusdem naturae, at vno ordine superior. Huiusmodi ergo serierum perpetuo terminus summatorius exhiberi poterit per expressionem finitam. Namque terminus generalis seriei:

$$0, A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, \&c.$$

seu is, qui indici x conuenit exhibebit summam $x-1$

terminorum seriei huius $a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \&c.$
 atque si tum loco x scribatur $x-1$, orietur summa x
 terminorum, ipseque terminus summatorius.

§6. Sit igitur Seriei propositae

$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, a^{VI}, \&c.$

Series differentiarum primarum

$b, b^I, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^V, b^{VI}, \&c.$

Series differentiarum secundarum

$c, c^I, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^V, c^{VI}, \&c.$

Series differentiarum tertiarum

$d, d^I, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V, d^{VI}, \&c.$

sicque porro donec ad differentias constantes perveniatur.
 Deinde formetur series summatrix, quae cum praefixa 0
 in locum termini primi, cum suis differentiis continuis se
 habebit sequenti modo:

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

SUMMATRIX.

0, A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V, &c.

SERIES PROPOSITA.

$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, a^{VI}, \&c.$

DIFFER. I.

$b, b^I, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^V, b^{VI}, \&c.$

DIFFER. II.

$c, c^I, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^V, c^{VI}, \&c.$

DIFFER. III.

$d, d^I, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V, d^{VI}, \&c.$

erit

erit seriei summatrix terminus generalis, seu qui indici x responderet

$$0 + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}c + \&c.$$

qui simul exhibet summam $x-1$ terminorum seriei propositae, $a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \&c.$

57. Quod si ergo in hac summa loco $x-1$ scribatur x , prodibit seriei propositae terminus summatorius summam x terminorum complectens

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1.2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}d + \&c.$$

Hinc, si litterae b, c, d, e , valores ipsis assignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4}e + \&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}d + \&c.$$

Inuento ergo seriei cuiusvis ordinis hoc, quem ostendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus summatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic

58. Hic modus terminum summatorium per differentias seriei inueniendi imprimis ad eiusmodi series, quae tandem ad differentias constantes deducunt, est accommodatus; in aliis enim casibus expressio finita non reperitur. Quodsi autem ea, quae ante de indole termini summatorii sunt exposita, attentius perpendamus, alius modus se offert terminum summatorium immediate ex termino generali inueniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis casibus ad expressiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim proposita series quaecunque.

$$a, b, c, d, e, f, \&c.$$

cuius terminus generalis, seu indici x respondens sit $= X$; terminus autem summatorius sit $= S$, qui cum summam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet unitates, erit summa $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo X differentia expressionis $S - X$, cum relinquatur, si haec a sequente S subtrahatur.

59. Cum igitur sit $X = \Delta (S - X)$ differentia eo modo sumpta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum discrimine; ut quantitas illa constans ω hic nobis sit $= 1$. Quare, si ad summas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus summatorius quaesitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet summa functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipse terminus generalis X , eritque aggregatum terminus summatorius. Quoniam autem

in

in summis sumendis inuoluitur quantitas constans, siue addenda siue subtrahenda; ea ad praesentem casum accommodari debet. Manifestum autem est, si ponatur $x=0$, quo casu numerus terminorum summmandorum est nullus, summam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa constans C ita determinari debet, ut posito $x=0$, fiat quoque $S=0$. Positis ergo in illa aequatione $S=\Sigma X + X + C$ tam $S=0$ quam $x=0$, valor ipsius C inuenietur.

60 Quoniam ergo hic totum negotium ad summationem functionum supra monstratam reducitur, ponendo $\omega=1$, exinde depromamus summationes traditas; ac primo quidem pro potestatibus ipsius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

quibus accenseatur summatio generalis potestatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi ubique loco ω vnitas scribatur. Harum ergo formularum ope omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones rationales integrae ipsius x , termini summatorii expedite inueniri poterunt.

61. Denotet S.X terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, vt vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, vt terminus summatorius S.X euanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots + x^n$$

erit

$$\begin{aligned} S.x^n &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2.3} x^{n-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4.5} x^{n-3} \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6.7} x^{n-5} - \frac{1}{120} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{2.3 \dots 8.9} x^{n-7} \\ &+ \frac{1}{8} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-8)}{2.3.4 \dots 10.11} x^{n-9} - \frac{1}{2.10} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-10)}{2.3 \dots 12.13} x^{n-11} \\ &+ \frac{1}{2.5} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-12)}{2.3 \dots 14.15} x^{n-13} - \frac{1}{3.10} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-14)}{2.3 \dots 16.17} x^{n-15} \\ &+ \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-16)}{2.3 \dots 18.19} x^{n-17} \\ &- \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-18)}{2.3 \dots 20.21} x^{n-19} \\ &+ \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-20)}{2.3 \dots 22.23} x^{n-21} \\ &- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-22)}{2.3 \dots 24.25} x^{n-23} \\ &+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-24)}{2.3 \dots 26.27} x^{n-25} \\ &\quad \text{\&c.} \quad 62. \end{aligned}$$

62. Hinc ergo summae pro variis ipsius x valoribus ita se habebunt:

$$S.x^0 = x$$

$$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$$

$$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

$$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$$

$$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3$$

$$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4$$

$$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5$$

$$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{6}x^6$$

$$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{1}{6}x^9 + \frac{2}{7}x^7$$

$$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} - \frac{1}{60}x^{10} + \frac{1}{28}x^8$$

$$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{9}{30}x^{11} + \frac{1}{18}x^9$$

$$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{3}{4}x^{14} - \frac{9}{16}x^{12} + \frac{1}{4}x^{10}$$

$$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{1}{3}x^{13} + \frac{5}{3}x^{11}$$

$$S.x^{17} = \frac{1}{18}x^{18} + \frac{1}{2}x^{17} + \frac{5}{2}x^{16} - \frac{1}{2}x^{14} + \frac{1}{2}x^{12}$$

$$S.x^{18} = \frac{1}{19}x^{19} + \frac{1}{2}x^{18} + \frac{3}{2}x^{17} - \frac{1}{2}x^{15} + \frac{1}{2}x^{13}$$

$$S.x^{19} = \frac{1}{20}x^{20} + \frac{1}{2}x^{19} + \frac{4}{3}x^{18} - \frac{1}{3}x^{16} + \frac{1}{3}x^{14}$$

$$S.x^{20} = \frac{1}{21}x^{21} + \frac{1}{2}x^{20} + \frac{5}{2}x^{19} - \frac{1}{2}x^{17} + \frac{1}{2}x^{15}$$

$$S.x^{21} = \frac{1}{22}x^{22} + \frac{1}{2}x^{21} + \frac{3}{2}x^{20} - \frac{1}{2}x^{18} + \frac{1}{2}x^{16}$$

$$S.x^{22} = \frac{1}{23}x^{23} + \frac{1}{2}x^{22} + \frac{4}{3}x^{21} - \frac{1}{3}x^{19} + \frac{1}{3}x^{17}$$

$$S.x^{23} = \frac{1}{24}x^{24} + \frac{1}{2}x^{23} + \frac{5}{2}x^{22} - \frac{1}{2}x^{20} + \frac{1}{2}x^{18}$$

&c.

quae

quae summae ex forma generali vsque ad potestatem vicesimam nonam continuari possunt. Atque ad huc ulterius progredi liceret, si coefficientes illi numerici ulterius essent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam observatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inueniri potest, excepto tantum termino ultimo, si in eo potestas ipsius x prima contineatur: tum enim in summa sequente vnus terminus insuper accedit. Hoc autem omisso, si fuerit

$$S. x^n = ax^{n+1} + \epsilon x^n + \gamma x^{n-1} + \delta x^{n-2} + \epsilon x^{n-3} \\ - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \&c.$$

erit sequens summa:

$$S. x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} ax^{n+2} + \frac{n+1}{n+1} \epsilon x^{n+1} + \frac{n+1}{n} \gamma x^n - \frac{n+1}{n-2} \delta x^{n-1} \\ + \frac{n+1}{n-4} \epsilon x^{n-2} - \frac{n+1}{n-6} \zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8} \eta x^{n-8} - \&c.$$

vnde si n fuerit numerus par, sequens summa vera prodit: at si n fuerit numerus impar, tum in sequente summa praeterea desiderabitur terminus vltimus, cuius forma erit $\pm \Phi x$. Interim tamen hic sine aliis subsidiis ita inueniri poterit. Cum enim si ponatur $x=1$, summa vnicui tantum termini, (hoc est terminus primus, qui erit $=1$.) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inventis $x=1$, ipsaque summa statuatur $=1$, quo facto valor ipsius Φ elicietur, eoque inuento ulterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes istae summae inueniri potuissent. Sic, cum sit

$$S. x^s$$

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

erit

$$S.x^6 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{12}x^3 + \Phi x$$

feu

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \Phi x.$$

Ponatur nunc $x=1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \Phi$
ideoque $\Phi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, vti ex forma generali inuenimus.

64. Ope harum formularum summatoriarum nunc facile omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones ipsius x rationales integrae, termini summatorii inueniri poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum summatorium huius seriei

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, &c.

cuius terminus generalis est

$$\frac{3xx+x}{2}.$$

Cum terminus generalis constet duobus membris, quae-
ratur pro utroque terminus summatorius ex formulis su-
perioribus

$$S. \frac{3}{2}xx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

&

$$S. \frac{1}{2}x = \dots \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

eritque

$$S. \frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$$

H 3

qui

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{5}{2} \cdot 6^2 = 90$, summa quinque terminorum

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

EXEMPLUM II.

Inuenire terminum summatorium seriei

1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c.

*quae continet cubos numerorum
imparium.*

Terminus generalis huius seriei est

$$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

vnde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+ 8. S. x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

&

$$- 12. S. x^2 = . - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

atque

$$+ 6. S. x = . . . + 3x^2 + 3x$$

denique

$$- 1. S. x^0 = . . . - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$.

Vti, si ponatur $x = 6$ erit $36 \cdot 71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, sit

$\Sigma(x$

$$\Sigma (x+n) = \frac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

&

$$\Sigma (x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

atque

$$\Sigma (x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&c.

si ad has summas ipsos terminos generales addamus, simulque constantem adiiciamus, quae posito $x = 0$, reddat terminum summatorium euanescentem, sequentes obtinebimus terminos summatorios.

$$S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

&

$$S.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

atque

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)$$

$$- \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

ficque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas constans in his summis euanescit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis est $= x$; terminus summatorius erit $= \frac{1}{2}x(x+1)$ seriesque summatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, & series summatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum summatorium habebit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, qui erit

erit terminis generalis seriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1. 2. 3. 4. 5}$.

Hae autem series prae reliquis probe sunt notandae, quoniam earum ubique amplissimus est usus. Ex his enim desumuntur coefficientes binomii ad dignitates eleuati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum verisato abunde constat.

67. Ex his etiam illi termini summatorii, quos ante ex differentiis eliciuimus, facile inueniuntur. Cum enim ibi terminum generalem sequenti forma inuenerimus expressum

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1. 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1. 2. 3} d + \&c.$$

si cuiusque membri terminum summatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum summatorium huic termino generali conuenientem. Sic cum sit

$$S \ 1 = x$$

&

$$S \ (x-1) = \frac{1}{2} x (x-1)$$

atque

$$S \ (x-1)(x-2) = \frac{1}{3} x (x-1)(x-2)$$

&

$$S \ (x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{4} x (x-1)(x-2)(x-3)$$

&c.

erit terminus summatorius quaesitus:

$$xa + \frac{x(x-1)}{1. 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1. 2. 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1. 2. 3. 4} d + \&c.$$

quae

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inuentio ad fractiones accommodari potest: quia enim supra §. 34. inuenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} \quad \text{erit}$$

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inuentas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

&

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

quae formae facile pro lubitu vterius continuantur.

69. Quia erit $S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$
erit quoque

$$S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$$

I

Et si

Et si ergo neuter horum duorum terminorum summatorum seorsim exhiberi potest, tamen eorum differentia cognoscitur; hincque in pluribus casibus summae serierum satis expedite assignantur: id quod usu venit, si terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores simplices resolui potest. Tum enim tota fractio in fractiones partiales resoluatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, vtrum terminus summatorius exhiberi queat nec ne?

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum summatorium seriei huius:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \&c.$$

$$\text{cuius terminus generalis est} = \frac{2}{xx+x}.$$

Terminus iste generalis per resolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Hinc terminus summatorius erit $= 2 S. \frac{1}{x} - 2 S. \frac{1}{x+1}$, qui ergo per praecedens lemma erit $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$. Sic, si sit $x = 4$, erit $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius seriei huius:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \&c.$$

$$\text{cuius terminus generalis est} = \frac{1}{4xx+4x-3}.$$

Quia

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resoluatur in has partes :

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

At est

$$S. \frac{1}{x-\frac{1}{2}} = S. \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + 2 - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

&

$$S. \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = S. \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

ergo

$$S. \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - S. \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

cuius pars octava dabit terminum summatorium quaesitum

nempe

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8x+4} - \frac{1}{8x+12} &= \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)} \\ &= \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}. \end{aligned}$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates euecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas serierum exhibeamus, quarum numeratores sint $= 1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

Terminus generalis est	Terminus summatorius erit
$\frac{1. \ 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1. \ 2. \ 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1. \ 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1. \ 2. \ 3. \ 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1. \ 2. \ 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1. \ 2. \ 3. \ 4. \ 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1. \ 2. \ 3. \ 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

vnde lex, qua istae expressiones progrediuntur, sponte apparet. Neque vero hinc terminus summatorius, qui conueniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi potest, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus summatorius praebet summam tot terminorum, quot vnitates continentur in indice x ; manifestum est harum serierum in infinitum continuatarum summas obtineri, si ponatur index x infinitus: quo casu expressionum modo inuentarum termini posteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, euanescent.

Hinc

Hinc istae series infinitae finitas habebunt summas, quae
erunt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \dots &= \frac{2}{1} \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \dots &= \frac{3}{2} \\
 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots &= \frac{4}{3} \\
 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots &= \frac{5}{4} \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots &= \frac{6}{5} \\
 &\text{\&c.}
 \end{aligned}$$

Omnium ergo serierum, quarum termini summatorii habentur, in infinitum continuatarum summae exhiberi poterunt posito $x = \infty$, dummodo hoc casu summae fiant finitae: quod quidem euenit, si in termino summatorio x tot habeat dimensiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CAPUT III.

DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARUIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumvis sit magna, ulterius augeri possit; neque quicquam obstat, quominus ad datam quantitatem quamcunque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas sine fine augeri poterit: neque enim unquam tam magna fiet, ut ipsi nihil amplius adiaci posset. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit positum, *omnem quantitatem in infinitum augeri posse.* Qui enim hoc negaverit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, superare nequeat, atque ideo statuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiaci posset; quod cum sit absurdum atque quantitatis notioni aduersetur, necessario concedendum est, omnem quantitatem sine fine continuo magis, hoc est, in infinitum augeri posse.

73. In singulis quantitatum speciebus hoc etiam clarius perspicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui statuerit seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita usquam esse determinatam, ut ulterius continuari non possit. Nullus enim datur numerus, ad quem non insuper unitas addi, sicque numerus sequens maior exhiberi que-

queat; hinc series numerorum naturalium sine fine progreditur, neque vnquam peruenitur ad numerum maximum, quo maior prorsus non detur. Simili modo linea recta nunquam eousque produci potest, vt insuper vltius prolongari non posset. Quibus euincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci posse. Quae cum sint species quantitatum, simul intelligitur, omni quantitate, quantumvis sit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, sicque augendo continuo vltius sine fine, hoc est in infinitum, procedi posse.

74. Quanquam autem haec sunt adeo perspicua, vt qui ea negare vellet, sibi ipse contradicere deberet; tamen ista infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare sunt conati, tantopere est offuscata, tantisque difficultatibus atque etiam contradictionibus obuoluta, vt, qua se extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri possit, quidam concluderunt, dari reuera quantitatem infinitam, eamque ita descripserunt, vt nullum amplius augmentum suscipere possit. Hoc autem ipso ideam quantitatis euertunt, dum eiusmodi quantitatem statuunt, quae vltius augeri nequeat. Praeterea vero secum ipsi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas sit capax, finem faciunt, simul negant quantitatem sine fine augeri posse; negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri posse, quoniam vtraque locutio congruit: sicque, dum quantitatem infinitam statuunt, eam simul tollunt. Si enim quantitas

titas sine fine, hoc est in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita existere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipso, quod omnis quantitas in infinitum augeri possit, sequi videatur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non euadet, nisi iam sine fine increuerit: quod autem sine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi potest. Interim tamen non solum huiusmodi quantitatem, ad quam incrementis sine fine congestis peruenitur, certo charactere indicare, sicque debito modo in calculum inducere licet, uti mox fusius ostendemus; sed etiam in mundo eiusmodi casus existere, vel saltem concipi possunt, quibus numerus infinitus actu existere videatur. Sic si materia in infinitum sit diuisibilis; uti plures Philosophi statuerunt, numerus partium, quibus datum quodque materiae frustum constat, reuera erit infinitus; si enim statueretur finitus, materia certe non in infinitum foret diuisibilis. Simili modo si vniversus mundus esset infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe esse non posset, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamsi inter se pugnare videantur, tamen si attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim statuit materiam in infinitum esse diuisibilem, is negat in diuisione materiae continua unquam ad partes tam paruas perueniri, quae ulterius diuidi nequeant: nullas ergo materia habebit partes,

tes, vltcrius indiuiduas; cum singulae particulae, ad quas per continuam diuisionem iam sit peruentum, vltcrius se subdiuidi patiantur. Qui igitur dicit hoc casu numerum partium fore infinitum, is partes vltimas, quae vltcrius sint indiuiduae, intelligit; ad quas cum nunquam perueniatur, & quae propterea nullae sunt, is has ipsas partes, quae nullae sunt, numerare conatur. Si enim materia sine fine continuo vltcrius subdiuidi potest, partibus indiuiduis seu simplicibus prorsus caret: neque adeo quicquam superest, quod numerari queat. Hanc obrem qui materiam in infinitum diuisibilem statuit, is simul negat, materiam ex partibus simplicibus esse compositam.

77. Quod si autem, dum de partibus alicuius corporis seu materiae loquimur, non vltimas seu simplices, quippe quae nullae sunt, intelligamus, sed eas, quas diuisio reuera produxit; tum, admissa hac hypothefi de diuisibilitate materiae in infinitum, vnumquodque vel minimum materiae frustum non solum in plurimas partes diffecari, sed etiam nullus numerus tum magnus assignari poterit, quo non maior partium ex illo frusto sectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem vltimarum, sed quae ipsae adhuc sint vltcrius diuisibiles, quae vnumquodque corpus componunt, omni numero assignabili erit maior. Simili modo, si vniuersus mundus sit infinitus, numerus corporum mundum constituentium pariter omni assignabili erit maior; qui cum finitus esse nequeat, sequitur numerum

infinitum & numerum omni assignabili maiorem esse nomina synonyma.

78. Qui ergo hoc modo diuisibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, se implicat, nihilque affirmare cogitur, quod sanae rationi aduerferetur. Qui autem contra materiam in infinitum diuisibilem esse negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus se nullo prorsus modo extrahere possunt. Statuere enim coguntur vnumquodque corpus nonnisi in certum partium numerum dissecari posse, ad quas si fuerit peruentum, nulla diuisio vltior locum inueniat; quas vltimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia simplicia* vocant. Cur autem istae vltimae particulae nullam amplius diuisionem admittant, duplex esse potest causa: altera, quod omni extensione careant; altera quod quidem sint extensae, sed tamen tam durae atque ita comparatae, vt nulla vis ad eas dissecandas sufficiat. Vtrumvis patroni huius opinionis dicant, sese aequae difficultatibus implicant.

79. Sint enim vltimae particulae omnis extensionis expertes, ita vt partibus prorsus careant; qua explicatione quidem ideam entium simplicium optime tuerentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero constare queat, concipi nullo modo potest. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus simplicibus esse compositum, huncque actu in mille partes secari; quae si sint aequales, erunt digiti cubici: sin autem sint inaequales, aliae erunt
ma-

maiores aliae minores. Vnus igitur digitus cubicus foret ens simplex, sicque maxima resultaret contradictio; nisi forte in digito cubico inesse tantum vnum ens simplex, reliquumque spatium vacuum esse dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod isti Philosophi vacuum plane ex mundo profligant. Quodsi obiiciant numerum entium simplicium, quae pedem cubicum materiae constituunt, millenario longe esse maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario sequitur, ex quouis alio numero quantumuis magno aequae manat. Hanc difficultatem Acutissimus LEIBNIZIVS, primus monadum inuentor, probe perspexit, dum materiam absolute in infinitum diuisibilem esse statuit. Neque ergo ante ad monades peruenire licet, quam corpus actu in infinitum sit diuisum. Hoc ipso autem existentiam entium simplicium, ex quibus corpora consistunt, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus simplicibus esse composita, & ille qui statuit corpora in infinitum esse diuisibilia, in eadem prorsus sunt sententia.

80. Neque magis autem sibi constant, si dicunt ultimas corporum particulas extensas quidem esse, sed ob summam duritiem in partes diuelli non posse. Cum primum enim in ultimis particulis extensionem admittunt, eas ex partibus compositas esse statuunt, quae, utrum reuera a se inuicem separari queant nec ne? parum refert; etiamsi nullam causam assignare possint, unde tanta durities sit orta. Nunc autem plerique, qui

diuisibilitatem materiae in infinitum negant, hoc posterius incommodum satis sensisse videntur, quia priori ideae partium vltimarum potissimum inhaerent; hasque difficultates aliter diluere non possunt, nisi aliquot leuiusculis metaphysicis distinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, vt ne consequentiis, quae secundum mathematica principia formantur, fidamus: neque dimensiones in partibus simplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonstrare debuissent, istas suas partes vltimas, quarum determinatus numerus corpus constituat, extensas prorsus non esse.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum inuenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad distinctiones confugiunt, respondentes has obiectiones a sensibus atque imaginatione suppeditari, in hoc autem negotio solum intellectum purum adhiberi oportere; sensus autem ac ratiocinia inde pendentia saepissime fallere. Intellectus scilicet purus agnoscet fieri posse, vt pars millesima pedis cubici materiae omni extensione careat, quod imaginationi absurdum videatur. Tum vero, quod sensus saepenumero fallant, res vera quidem est, at nemini minus quam mathematicis opponi potest. Matheſis enim nos imprimis a fallacia sensuum defendit, atque docet obiecta, quae sensibus percipiuntur, aliter reuera esse comparata, aliter vero apparere: haecque scientia tutissima tradit praecepta, quae qui sequuntur, ab illusione sensuum immunes sunt. Huiusmodi ergo responsionibus, tantum abest, vt Metaphysici suam doctrinam tueantur, vt eam potius magis suspectam efficiant.

82. Verum ut ad propositum reuertamur, etiam si quis neget in mundo numerum infinitum reuera existere; tamen in speculationibus mathematicis saepissime occurrunt quaestiones, ad quas, nisi numerus infinitus admittatur, responderi non posset. Sic, si quaeratur summa omnium numerorum, qui hanc seriem $1+2+3+4+5+\&c.$ constituunt; quia isti numeri sine fine progrediuntur, atque crescunt, eorum omnium summa certe finita esse non poterit: quo ipso efficitur, eam esse infinitam. Hinc, quae quantitas tanta est, ut omni quantitate finita sit maior, ea non infinita esse nequit. Ad huiusmodi quantitatem designandam Mathematici utuntur hoc signo ∞ , quo denotatur quantitas omni quantitate finita, seu assignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, ut dicatur esse Ellipsis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae esse Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem Infiniti doctrina magis illustrabitur, si, quid sit infinite paruum Mathematicorum, exposuerimus. Nullum autem est dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus evanescat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parua nil aliud est nisi quantitas evanescens, ideoque reuera erit $=0$. Consentit quoque ea infinite paruum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora: si enim quantitas tam fuerit parua, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset $=0$, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas

infinite parua in Mathesi, respondemus eam esse reuera $\equiv 0$: neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, ubi hunc calculum sumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur ostenderimus, quantitatem infinite parvam reuera esse cyphram, primum occurrendum est obiectioni, cur quantitates infinite parvas non perpetuo eodem charactere 0 designemus, sed peculiare notas ad eas designandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila sunt inter se aequalia, superfluum videtur variis signis ea denotare. Verum quamquam duae quaevis cyphrae ita inter se sunt aequales, ut earum differentia sit nihil: tamen, cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perspicietur ex hac proportionem geometrica $2 : 1 \equiv 0 : 0$, in qua terminus quartus est $\equiv 0$, uti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior quam secundus, necesse est, ut & tertius duplo maior sit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica sunt planissima: cuilibet enim notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, esseque $n \cdot 0 \equiv 0$,
sicque

ficque fore $n:1=0:0$. Vnde patet fieri posse, ut duae cyphrae quaecunque inter se rationem geometricam teneant, etiamsi, rem arithmetice spectando, earum ratio semper sit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecunque intercedere possit, ad hanc diuersitatem indicandam consulto varii characteres vsurpantur; praesertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter se tenent, est inuestiganda. In calculo autem infinite paruorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter varia infinite parua indagetur, quod negotium propterea, nisi diuersis signis ad ea indicanda vteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque vlllo modo expediri posset.

86. Si ergo, prouti in Analyfi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite parvam, erit utique tam $dx=0$, quam $adx=0$, denotante a quantitatem quaecunque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $adx:dx$ finita, nempe ut $a:1$; & hanc obrem haec duo infinite parua dx & adx , etiamsi vtrumque sit $=0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio inuestigetur. Simili modo, si diuersa occurrunt infinite parua dx & dy , etiamsi vtrumque sit $=0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in inuestigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parua omnis vis calculi differentialis versatur. Vfus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum

87. Cum igitur infinite paruum sit reuera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, si ad eam infinite paruum vel addamus vel ab ea subtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parua, erit tam $a+dx$, quam $a-dx$, & generaliter $a\pm ndx=a$. Siue enim relationem inter $a\pm ndx$ & a arithmetice intueamur siue geometricae, utroque casu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifesta est; cum enim sit $ndx=0$, erit $a\pm ndx=a=0$: geometrica vero ratio aequalitatis inde patet, quod sit $\frac{a\pm ndx}{a}=1$. Hinc sequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parua prae finitis euanescent, atque adeo horum respectu reiici queant*. Quare illa obiectio, qua Analysis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, sponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, nisi quod reuera sit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac sublimiori scientia rigorem geometricum summum, qui in Veterum libris deprehenditur, aequae diligenter obseruari.

88. Quoniam quantitas infinite parua dx reuera est $=0$, eius quoque quadratum dx^2 , cubus dx^3 , & quaevis alia potestas affirmatiuum habens exponentem erit $=0$, ideoque aequae prae quantitatibus finitis euanescent. At vero etiam quantitas infinite parua dx^2 prae ipsa dx euanescit; erit enim $dx\pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, siue comparatio arithmetice siue geometricae instituat. De priori quidem dubium est nullum, at geometricae comparando erit

dx

$$dx + dx^2 : dx = \frac{dx + dx^2}{dx} = 1 + dx = 1.$$

Pari modo erit $dx + dx^3 = dx$, & generaliter $dx + dx^{n+1} = dx$, dummodo sit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx + dx^{n+1} : dx = 1 + dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur vti in potestatibus fit, vocetur dx infinite paruum primi ordinis, dx^2 secundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifestum est prae infinite parvis primi ordinis, evanescere infinite parva altiorum ordinum.

89. Simili modo ostendetur infinite parva tertii ac superiorum ordinum evanescere prae infinite parvis ordinis secundi; atque in genere infinite parva cuiusque ordinis superioris evanescere prae infinite parvis ordinis inferioris. Ita si m fuerit numerus minor quam n , erit $adx^m + bdx^n = adx^m$, quia dx^n evanescit prae dx^m , vti ostendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx evanescet prae \sqrt{dx} seu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Quodsi autem exponens ipsius dx fit $= 0$, erit $dx^0 = 1$, quamvis sit $dx = 0$; hinc potestas dx^n , cum fiat $= 1$, si sit $n = 0$, ex finita statim fit quantitas infinite parva, atque exponens n nihilo fit maior. Hinc ergo infiniti ordines infinite parvorum existunt, quae etsi omnia sunt $= 0$, tamen inter se probe distingui debent, si ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

L

90. Sta-

90. Stabilita notione infinite paruorum facilius indolem infinitorum seu infinite magnorum exponere poterimus. Notum est valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem euadere, quo magis diminuatur denominator z ; quare si z fiat quantitas omni assignabili quantitate minor, seu infinite parua, necesse est vt valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni assignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem si vnitas seu quacuis alia quantitas finita diuidatur per infinite paruum seu 0, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc signum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, ista habebitur aequatio $\frac{a}{dx} = \infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod fit inuertendo $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. Namque quo maior statuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z , eo minor fit fractionis valor, atque si z fiat quantitas infinite magna seu $z = \infty$, necesse est, vt fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite paruus.

91. Qui vtrumuis horum ratiociniorum negauerit, eum in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta euertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum vti b , vtrunque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0 \cdot b$, atque ideo quantitas finita b per nihil 0 multiplicata praeberet

beret quantitatem finitam a , quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $= 0$: nam 0 per 0 multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty} = 0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty} =$ quantitati finitae b : quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty} = b$ legitime sequatur haec $\infty = \frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite parvus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analyfi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex diuisione quantitatis finitae per infinite paruam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parua quotus, qui oritur ex diuisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, ut sit quantitas infinite parua ad finitam, ita finita ad infinite magnam; uti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities maior erit quam infi-

nite parua. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non sunt improbandae, cum certissimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ sequitur fieri posse, ut nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri posset, nisi planissime per legitimam consequentiam esset deductum.

93. Quoniam inter infinite parua, si secundum rationem geometricam inter se comparantur, maximum deprehenditur discrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non solum geometricae sed etiam arithmetice comparatae discrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex divisione quantitatis finitae a per infinite paruam dx oritur, $= A$, ita ut sit $\frac{a}{dx} = A$: erit utique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA sit quantitas infinita, sequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere posse. Hincque, si quantitas infinita per numerum finitum siue multiplicetur, siue diuidatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitibus infinitis negari potest, eas ulterius augeri posse. Facile autem perspicitur, si ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter se tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmetica aequalitatis esse posse, cum potius earum differentia semper sit infinite magna.

94. Quan-

94. Quantumvis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi utimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analyfin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos triuialibus carere possumus. In Arithmetica enim; ubi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negatiuus & infinite magnus statuitur, neque quisquam est tam mente captus, ut hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim vnquam negabit tangentem secantemue anguli recti non esse infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem sit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti sit ∞ ; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito esse posse finitum.

95. Cum sit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: est enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc est ut numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiusmodi relationes, ut aliae aliis infinities maiores esse queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; posito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infi-

nities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior est quam praecedentes: atque adeo si numerus m vel tantillum maior sit quam n , erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96. Quemadmodum in quantitibus infinite parvis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes sint aequales: ita in quantitibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae sint quantumvis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx} + b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum diuisione ortus $= 1 + \frac{b dx}{a} = 1$, ob $dx = 0$: interim tamen, si arithmetice comparentur, ob differentiam $= b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponents enim rationis est $= 1 + dx = 1$; verum tamen differentia est $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc si ad rationem geometricam spectemus, infinite magna inferiorum graduum

duum prae infinite magnis superiorum graduum evanescent.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri posse, ut productum ex quantitate infinite magna in infinite parvam non solum quantitatem finitam producat, quod supra evenisse vidimus; sed etiam huiusmodi productum esse poterit siue infinite magnum siue infinite parvum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, si per infinite parvam dx multiplicetur, dat productum finitum $= a$; si autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite parvum dx^2 , vel dx^3 , vel alius superioris ordinis, productum erit vel adx , vel adx^2 , vel adx^3 &c. ideoque infinite parvum. Eodem modo intelligetur, si quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite parvam dx , productum fore infinite magnum: atque generatim si $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m , productum $abdx^{m-n}$ erit infinite parvum si m superat n ; finitum si m aequat n ; & infinite magnum si m superatur ab n .

98. Quantitates tam infinite parvae, quam infinite magnae in seriebus numerorum saepissime occurrunt, in quibus cum sint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum secundum leges continuitatis a quantitibus finitis ad infinite magnas atque infinite parvas transitio fiat. Consideremus primum seriem
nume-

numerorum naturalium, quae simul retro continuata erit

$$\&c. -4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \&c.$$

Numeri ergo continuo decrescendo praebent tandem 0 seu infinite paruum, unde ulterius continuati negatiui euadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmatiuis decrescantibus transiri per 0 ad negatiuos crescentes. Sin autem eorum numerorum quadrata spectentur, quia omnia sunt affirmatiua

$$\&c. 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \&c.$$

erit 0 quoque transitus numerorum affirmatiuorum decrescantium ad affirmatiuos crescentes; atque si signa mutantur, erit quoque 0 transitus numerorum negatiuorum decrescantium ad negatiuos crescentes.

99. Si series consideretur, cuius terminus generalis est \sqrt{x} , quae etiam retro continuata erit huiusmodi

$$\&c. +\sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \&c.$$

ex qua patet 0, quoque tanquam limitem considerari posse, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria transeat. Si isti termini tanquam applicatae curuarum considerentur, perspicitur, si eae fuerint affirmatiuae atque eousque decreuerint ut tandem euanescant, tum eas ulterius continuatas vel fieri negatiuas, vel iterum affirmatiuas, vel adeo imaginarias. Idem eueniet, si applicatae primum fuerint negatiuae; tum enim aequae postquam euauerint, si ulterius continuentur, vel affirmatiuae

tiuae fient, vel negatiuae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curuis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in seriebus occurrunt saepe termini infiniti: sic in serie harmonica, cuius terminus generalis est $\frac{1}{x}$, indici $x=0$ respondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque series ita se habebit:

$$\&c. -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad sinistram progrediendo termini crescunt, ita vt $\frac{1}{0}$ iam sit infinite magnus, quem cum transierint, fient negatiui decrefcentes. Hinc quantitas infinite magna spectari potest tanquam limes, per quem numeri affirmatiui progressi fiunt negatiui, & vicissim: vnde pluribus visum est, numeros negatiuos considerari posse, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac serie termini continuo crescentes, postquam infinitum attigerint, abeant in negatiuos. At vero si ad seriem, cuius terminus generalis est $\frac{1}{xx}$, attendamus, post transitum per infinitum rursus prodeunt termini affirmatiui.

&c. $\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \&c.$
quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in seriebus terminus infinitus constituit limitem, terminos reales ab imaginariis

rius segregantem, uti fit in serie hac, cuius terminus generalis est $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\&c. + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \&c.$$

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

$$\&c. + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \&c.$$

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit 0 neque ∞ , uti fit, si terminus generalis fuerit $1 + \sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores sunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmatiui, abeunt in negativos, transitus semper fit per limitem vel infinite parvum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curvis deprehendimus, clarius elucet.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inseruiunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, ut

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ca-

eaque sine fine, hoc est in infinitum continuetur, nullum certe est dubium, quin omnium horum terminorum summa maior sit omni numero assignabili; eaque propterea infinita sit necesse est. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

ponendo $x=1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ideoque summa $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamvis autem hic nullum dubium nasci queat, cum idem numerus finitus infinities sumtus in infinitum abire debeat; tamen ipsa origo ex serie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

graviissima incommoda afferre videtur: si enim pro x successiue ponantur numeri 1, 2, 3, &c. sequentes series cum suis summis prodibunt.

$$A \dots 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} = \text{infinito}$$

$$B \dots 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$C \dots 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

$$D \dots 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$$

&c.

M 2

Cum

Cum igitur series B singulos terminos praeter primum habeat maiores, quam series A, summa seriei B necessario multo maior esse deberet, quam summa seriei A: interim tamen iste calculus ostendit seriei A summam infinitam, seriei B vero summam negativam, hoc est nihilo minorem, quod concipi non potest. Multo minus cum solitis ideis conciliari potest, quemadmodum huius est sequentium serierum C, D, &c. summae fiant negativae, cum tamen omnes termini sint affirmatiui.

104. Ob hanc rationem opinio supra allata multis probabilis videri solet, quantitates scilicet negatiuas quandoque considerari posse tanquam infinito maiores seu plus quam infinitas; & cum etiam numeros vltra nihil diminuendo perueniatur ad negatiuos, discrimen statuunt inter numeros negatiuos huiusmodi $-1, -2, -3, \&c.$ & huiusmodi $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1^2}, \frac{+3}{-1^3}, \&c.$ illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam suggerit haec series

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vnde oriuntur sequentes series:

$$A \dots 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{infinito}$$

$$B \dots 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

vbi cum singuli termini seriei B sint maiores, quam singuli termini seriei A, primis solis exceptis, quemadmodum

dum summa seriei A sit infinita, seriei B vero summa aequalis 1, hoc est soli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem si vellemus negare esse $\frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmissima Analyseos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorsus admitti non potest. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales suppeditauerant, summas esse veras. Cum enim hae series ex continua diuisione oriantur, dum residuum continuo vltius diuiditur: residuum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime residuum vltimum, hoc est quod in diuisione infinitesima remanet, omitti potest, quippe quod sit infinite magnum. Quia autem hoc in superioribus seriebus non obseruatur, dum nullius residui ratio habetur, mirum non est, eas summationes ad absurdum deducere. Haecque responsio, vti est ex ipsa serierum genesi petita, ita quoque est verissima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur euolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, vti in terminis primum finitis tantum absoluitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius seriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ summam esse $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$

& qui summam huius seriei

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1000}$$

statuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$

qui error si x sit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perspicuum est eum, qui eiusdem seriei in infinitum continuatae seu huius:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^\infty$$

summam statuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate esse aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae si sit $x > 1$, utique erit

infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur seriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

sum-

summa reuera sit $= \frac{1}{1-x}$, si fuerit x fractio vnitate minor, tum enim error $\frac{x^{\infty}+1}{1-x}$ fit infinite paruus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto potest negligi. Sic posito $x = \frac{1}{2}$, erit reuera

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

similiterque reliquarum serierum, si x sit fractio vnitate minor, summa vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem responsio valet de summis serierum diuergentium, in quibus signa $+$ & $-$ alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi solent, ponendo pro x numeros negatiuos. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \&c.$$

nisi vltimi residui ratio habeatur, foret:

$$A \quad . \quad . \quad . \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$$

$$B \quad . \quad . \quad . \quad 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c. = \frac{1}{3}$$

$$C \quad . \quad . \quad . \quad 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \&c. = \frac{1}{4}$$

&c.

Patet autem seriei secundae B summam ideo non posse esse $= \frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu summentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiusque seriei summa debet esse limes, ad quem eo propius perueniatur, quo plures termini actu addantur.

109. Ex his quidam concluderunt huiusmodi series, quae vocantur diuergentes, prorsus nullas habere summas
fixas;

fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio; qui pro summa seriei in infinitum continuatae haberi posset: quae sententia, cum istae summae iam ob neglecta vltima residua erroneae sint ostensae, veritati maxime est consentanea. Interim tamen contra eam summo iure obiici potest, has memoratas summas, quantumvis a veritate abhorreere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admissis plurima praecelara esse eruta, quibus si istas summationes prorsus reiicere vellemus, carendum esset. Neque vero hae summae, si essent falsae, perpetuo ad veritatem nos ducere possent; quin potius, cum non parum sed infinite a veritate discrepent, nos quoque in infinitum a vero seducere deberent. Quod tamen cum non eueniat, difficillimus nobis restat nodus soluendus.

110. Dico igitur in voce *summae* latere totam difficultatem; si enim *summa* seriei, ut vulgo usus fert, sumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium est nullum, quin earum tantum serierum in infinitum excurrentium summae exhiberi queant, quae sint conuergentes, atque continuo propius ad certum statumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem diuergentes, quarum termini non decrescunt, siue signa $+$ & $-$ alternentur siue secus, prorsus nullas habebunt summas fixas; si quidem vox summae hoc sensu pro aggregato omnium terminorum accipiat. At vero in iis casibus, quorum meminimus, quibus ex istiusmodi summis erroneis veritas ta-

men

men elicitur; id non fit, quatenus expressio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, est summa seriei $1+x+x^2+x^3+\&c.$ sed quatenus ea expressio euoluta hanc seriem praebet; sicque in hoc negotio nomen summae prorsus omitti posset.

III. Haec igitur incommoda, hasque apparentes contradictiones penitus euitabimus, si voci *summae* aliam notionem, atque vulgo fieri solet, tribuamus. Dicamus ergo seriei cuiusque infinitae *summam* esse expressionem finitam, ex cuius euolutione illa series nascatur. Hocque sensu seriei infinitae $1+x+x^2+x^3+\&c.$ summa reuera erit $= \frac{1}{1-x}$, quia illa series ex huius fractionis euolutione oritur: quicumque numerus loco x substituitur. Hoc pacto, si series fuerit conuergens, ista nova vocis summae definitio, cum consueta congruet; & quia diuergentes nullas habent summas proprie sic dictas, hinc nullum incommodum ex noua hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis vtilitatem serierum diuergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.



CAPUT IV.

DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA.

112.

In capite primo vidimus, si quantitas variabilis x accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusvis functionis ipsius x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ siue haec expressio sit finita siue in infinitum excurrat. Functio ergo y , si in ea loco x scribatur $x + \omega$, valorem sequentem induet:

$$y^1 = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

a quo, si valor prior y subtrahatur, remanebit differentia functionis y , quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

atque cum valor ipsius x sequens sit $x^1 = x + \omega$, erit differentia ipsius x , nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem $P, Q, R, \&c.$ denotant functiones ipsius x pendentes ab y , quas capite primo inuenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento ω augeatur quantitas variabilis x , simul definiri poterit augmentum, quod cuique ipsius x functioni y accedit; dummodo pro quouis ipsius y valore functiones $P, Q, R, S, \&c.$ definire valeamus. In hoc autem capite, atque in vniuersa Analyfi infinitorum augmentum illud ω , quo quantitatem variabilem x crescere sumimus, statuemus infinite par-

paruum, atque adeo evanescens, seu $= 0$. Vnde manifestum est, incrementum seu differentiam functionis y quoque fore infinite parvam. Cum autem in hac hypothesis singuli termini expressionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus evanescant, (88. & seqq.), solus primus $P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc casu, quo ω est infinite paruum, differentia ipsius y nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare caepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum in capite primo expositae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumptae, statuantur infinite parvae. Quo igitur iste casus, quo uniuersa Analysis infinitorum continetur, a methodo differentiarum distinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam signis ad differentias istas infinite paruas denotandas vti conueniet. Differentias igitur infinite paruas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diuersos ordines constituissimus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, secunda, tertia, &c. cuiusque functionis significant. Loco characteris autem Δ , quo ante differentias indicaueramus, nunc utemur characterem d ; ita ut dy significet differentiale primum ipsius y ; ddy differentiale secundum; d^3y tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite paruas, quas hic tractamus, *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia inuestigantur atque ad vsum accommodantur, appellari solet *Calculus differentialis*. Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aequae ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc nouam Analyseos partem excolere coepit, aliis tam nominibus quam signis vtuntur. Differentias enim infinite paruas, quas nos differentialia vocamus, potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa*: quae voces vti latino sermoni magis conueniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEWTONO ad celeritatem crescendo adhibebatur, ad incrementum infinite paruum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamuis autem circa vocum vsum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita vt \dot{y} , iis significet fluxionem primam ipsius y ; \ddot{y} fluxionem secundam; \dddot{y} fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, vti ab arbitrio pen-

pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit parvus, ut numerando facile percipi queat; tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimamque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima perquam incommode hoc modo y repraesentatur, cum nostro signandi modo $d^1 y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus fit ineptus.

117. Nostris igitur tam nominibus quam signis utemur, quippe quorum illa in nostris regionibus iam sunt usu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & signationes hic commemorare, ut qui eorum libros euoluunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhaerent, ut quae nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipforum opera maxima cum auiditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; saepenumero vero etiam animadvertimus, ipsos nostratum scripta non sine utilitate legisse. Quamobrem etsi idem ubique atque aequabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, ut ytrique assuescamus, quantum quidem intelligentia librorum alieno more scriptorum postulat.

118. Cum igitur littera ω nobis hactenus denotaverit differentiam seu incrementum, quo quantitas variabilis x crescere concipitur, nunc autem ω statuatur infinite paruum, erit ω differentiale ipsius x ; & hancobrem recepto signandi modo erit $\omega = dx$; atque dx proinde erit differentia infinite parva, qua ipsa x crescere concipitur. Simili modo differentiale ipsius y ita exprimetur dy ; atque si y fuerit functio quaecunque ipsius x , differentiale dy denotabit incrementum, quod functio y capit, dum x abit in $x + dx$. Quare si in functione y ubique loco x substituaturs $x + dx$, & quantitas resultans ponatur $= y^2$, erit $dy = y^2 - y$, hocque modo differentiale cuiusque functionis reperietur: quod quidem intelligendum est de differentiali primo seu primi ordinis; de reliquis enim postea videbimus.

119. Probe ergo tenendum est litteram d hic non quantitatem denotare, sed tantum loco signi adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam; eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera l pro signo logarithmi, & in Algebra caractere $\sqrt{}$ pro signo radicis vti consueuimus. Hinc dy non significat, vti vulgo in Analyfi vsu est receptum, productum ex quantitate d in quantitatem y , sed ita enunciari debet, vt dicatur differentiale ipsius y . Simili modo si scribatur d^2y , neque binarius exponentem, neque d^2 potestatem ipsius d significat, sed adhibetur tantum ad nomen *differentialis secundi* breuiter & apte exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, sed signum tantum
ex-

exhibeat, ad confusionem vitandam in calculis, vbi plures quantitates constantes occurrunt, littera d ad earum designationem usurpari nequit; perinde atque euitare solemus litteram l tanquam quantitatem in calculum inducere, vbi simul logarithmi occurrunt. Optandum autem esset, vt litterae istae d & l per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates designari solent, confundantur: simili scilicet modo, quo loco litterae r , qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iste distortus $\sqrt{}$ in vsum est receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipsius y , si y fuerit functio quaecunque ipsius x , habiturum esse huiusmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = Pdx$. Qualiscunque scilicet fuerit y functio ipsius x , eius differentiale dy exprimetur certa quadam functione ipsius x , pro qua hic ponimus P , per differentiale ipsius x , nempe per dx multiplicata. Etiam si ergo differentialia ipsarum x & y reuera sint infinite parua, ideoque nihilo aequalia; tamen inter se finitam habebunt rationem: erit scilicet $dy : dx = P : 1$. Inuenta ergo functione ista P , innotescit ratio inter differentiale dx & differentiale dy . Cum igitur calculus differentialis in inuentione differentialium consistat, in eo non tam ipsa differentialia, quae sunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore inueniuntur, quam eorum ratio mutua geometrica inuestigatur.

121. Differentialia igitur multo facilius inueniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam

tam Δy , qua functio y crescit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non sufficit functionem P nosse, sed indagari insuper oportet functiones Q , R , S , &c. quae in differentiam finitam, quam posuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipsius y autem inueniendum satis est, si nouerimus solam functionem P . Quamobrem ex cognita differentia finita cuiusque functionis ipsius x , facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui potest eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum simul cognitis differentia quaevis finita cuiusque functionis propositae inueniri queat. Ceterum ex his manifestum est differentiale primum $dy = Pdx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum ω , quod quantitas variabilis x accipere concipitur, fuerit vehementer paruum, ita ut in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parui, ut in computo, quo summus rigor non obseruatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali Pdx , ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: vnde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parua considerari posse, eaque nihilo reuera aequalia esse negant, atque tantum inde-

indefinite parua statuunt. Haecque idea aliis occasionem praebuit *Analyfin* infinitorum accusandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, sed tantum vero proximas; quae obiectio semper aliquam vim retineret, nisi infinite parua prorsus nihilo aequalia statueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parua plane in nihilum abire, ii ut vim obiectionis destruere videantur, differentialia comparant minimis puluisculis ratione totius terrae, cuius quantitatem nemo non veram tradidisse censeretur, qui unico puluisculo a veritate aberrauerit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite parvam esse volunt, qualis est inter totam terram minimumque puluisculum: atque si cui hoc discrimen adhuc non satis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, ut paruitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoscere coguntur, summum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per *Analyfin* infinitorum solutiones inueniri possunt, ex earumque congruentia bonitatem posterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum saepe numero per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius euincit, eas quantitates, quae in calculo sint neglectae, non solum non incomprehensibiliter paruas, sed plane nullas esse, uti nos assumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium secundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis secundis in capite primo expositis, ponendo quantitatem ω infinite parvam $= dx$. Cum igitur si ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crescere, ita ut si valor secundus x^1 fuerit $= x + dx$, sequentes futuri sint $x^{II} = x + 2dx$; $x^{III} = x + 3dx$ &c. ob differentias primas constantes $= dx$, differentiae secundae evanescent: erit ergo quoque differentiale secundum ipsius x nempe $ddx = 0$, atque ob hanc rationem quoque differentialia ulteriora erunt $= 0$, scilicet $d^3x = 0$, $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem potest, haec differentialia, cum sint infinite parva, per se esse $= 0$, neque hoc proprium esse eius quantitatis variabilis x , cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc evanescentiam ita interpretari oportet, ut differentialia ddx , d^3x &c. non solum in se spectata sint nulla, sed etiam ratione potestatum ipsius dx , cum quibus alias comparari possent, evanescere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum est differentiam secundam cuiusque functionis ipsius x , quae sit y , huiusmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \&c.$ Quodsi ergo ω sit infinite parvum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ evanescent, unde posito $\omega = dx$ differentiale secundum ipsius y erit $= Pdx^2$, denotante dx^2 quadratum differentialis dx . Quare etsi differentiale secundum ipsius y , nempe ddy per se sit $= 0$, tamen cum sit $ddy = Pdx^2$, ad dx^2 habebit rationem finitam, vti

vti P ad x fin autem sit $y = x$, tum fit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc casu differentiale secundum ipsius x etiam respectu dx altiorumque ipsius dx potestatum euanescit. Hocque modo intelligenda sunt ea, quae ante diximus, esse scilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia secunda nil aliud sit, nisi differentia differentiae primae; differentiale quoque secundum seu vti saepe vocari solet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas constans nulla neque augmenta neque decrements accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae solis quantitatibus variabilibus sunt propriae, dicimus eodem sensu quantatum constantium differentialia omnia cuiusque ordinis esse $= 0$, hoc est prae omnibus adeo potestatibus ipsius dx euanescere. Cum igitur differentiale ipsius dx hoc est ddx sit $= 0$; differentiale dx tanquam quantitas constans considerari potest, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur constans, toties ea quantitas intelligenda est continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate, cuius differentiale sit constans, hicque singularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia sunt obnoxia, aestimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipsius y esse $= p dx$; atque ad eius differentiale secundum inueniendum, ipsius $p dx$ denuo differentiale quaeri debet. Cum autem dx sit constans, neque varietur eiam si loco x scri-

batur $x + dx$, tantum opus est, vt quantitatis finitae p differentiale quaeratur: fit igitur $dp = qdx$; quoniam vidimus omnium functionum ipsius x differentialia ad huiusmodi formam reuocari: & cum sit, vti de differentiis finitis ostendimus, differentiale ipsius $np = nqdx$, si n sit quantitas constans, ponatur dx loco n , eritque differentiale ipsius $pdx = qdx^2$. Hancobrem si sit $dy = pdx$ & $dp = qdx$, erit differentiale secundum $ddy = qdx^2$, sicque constat, quod iam ante innuimus, differentiale secundum ipsius y ad dx^2 habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notauimus differentias secundas atque sequentes constitui non posse, nisi valores successiui ipsius x certa quadam lege progredi assumantur, quae lex cum sit arbitraria, his valoribus progressionem arithmeticam tanquam facillimam simulque aptissimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus secundis nihil certi statui poterit, nisi differentialia prima, quibus quantitas variabilis x continuo crescere concipitur, secundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipsius x , nempe $dx, dx^1, dx^2, &c.$ omnia inter se aequalia, vnde fiunt differentialia secunda $ddx = dx^1 - dx = 0$; $ddx^1 = dx^2 - dx^1 = 0$, &c.

Quoniam ergo differentialia secunda & vltiora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis x inter se tenent, pendent, hicque ordo sit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens discrimin inter differentialia prima ac sequentia ratione inuentionis intercedit.

129. Quod si autem successivi ipsius x valores x , x^1 , x^2 , x^3 , x^4 , &c. non secundum arithmeticae progressionem statuuntur, sed alia quacunque lege progredi ponantur, cum eorum quoque differentialia prima dx , dx^1 , dx^2 , &c. non erunt inter se aequalia, neque propterea erit $ddx = 0$. Hancobrem differentialia secunda quarumvis functionum ipsius x aliam formam induent; si enim huiusmodi functionis y differentiale primum fuerit $= p dx$ ad eius differentiale secundum inveniendum non sufficit differentiale ipsius p per dx multiplicasse, sed insuper ratio differentialis ipsius dx , quod est ddx haberi debet. Quoniam enim differentiale secundum oritur, si $p dx$ a valore eius sequente, qui oritur dum $x + dx$ loco x & $dx + ddx$ loco dx ponitur, subtrahatur, ponamus valorem ipsius p sequentem esse $= p + q dx$, eritque ipsius $p dx$ valor sequens $= (p + q dx)(dx + ddx) = p dx + p ddx + q dx^2 + q dx ddx$; a quo subtrahatur $p dx$, eritque differentiale secundum $ddy = p ddx + q dx^2 + q dx ddx = p ddx + q dx^2$, quia $q dx ddx$ prae $p ddx$ evanescit.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis est simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius x incrementis tribuatur, tamen frequenter evenire solet, ut non eius quantitatis variabilis x , cuius y est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cuiuspiam quantitatis, cuius ipsa x sit functio quaedam. Quam etiam saepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima statuuntur ae-

qualia, cuius nequidem relatio ad x constet. Priori casu pende-
bunt differentialia secunda & sequentia ipsius x a
ratione, quam x tenet ad illam quantitatem, quae aequa-
biliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri de-
bent, quo hic differentialia secunda ipsius y ex differen-
tialibus ipsius x definire docuimus. Posteriori autem ca-
su differentialia secunda & sequentia ipsius x tanquam in-
cognita spectari, eorumque loco signa ddx , d^3x , d^4x ,
&c. usurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his casibus diffe-
rentiationes singulas absolui oporteat, infra fusius simus
ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tan-
quam vniformiter crescentem assumere, ita vt eius diffe-
rentialia prima dx , dx^2 , dx^3 , &c. inter se omnia aequa-
lia, ac propterea differentialia secunda ac sequentia ni-
hilo aequalia statuuntur: quae conditio ita enunciari so-
let, vt differentiale ipsius x nempe dx constans assumi di-
catur. Sit deinde y functio quaecunque ipsius x , quae
cum per x & constantes definiatur, singula quoque eius
differentialia prima, secunda, tertia, quarta, &c. quae
his signis indicantur dy , ddy , d^3y , d^4y , &c. per x &
 dx exprimi poterunt. Scilicet si in y loco x scribatur
 $x+dx$, ab hocque valore prior subtrahatur, remanebit
differentiale primum dy : in quo si porro loco x ponatur
 $x+dx$, prodibit dy^2 , eritque $ddy = dy^2 - dy$, si-
mili modo ponendo $x+dx$ loco x , ex ddy nascetur
 ddy^2 , atque $ddy^2 - ddy$ dabit d^3y & ita porro: in qui-
bus

bus operationibus differentiale dx perpétuo tanquam quantitas constans spectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio y per x determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo expeditius ex iis, quae postea sumus tradituri, definietur valor functionis p , quae per dx multiplicata praebet differentiale primum dy . Posito ergo $dy = p dx$, differentiale ipsius $p dx$ dabit differentiale secundum ddy ; unde si fuerit $dp = q dx$, ob dx constans, orietur $ddy = q dx^2$, uti iam ante ostendimus. Vtlius igitur progrediendo, cum differentialis secundi differentiale praebet differentiale tertium, ponamus esse $dq = r dx$, eritque $d^3y = r dx^3$: simili modo si huius functionis r differentiale quaeratur, fueritque $dr = s dx$, habebitur differentiale quartum $d^4y = s dx^4$; sicque porro, dum modo nouerimus differentiale primum cuiusque functionis inuenire, differentiale cuiusque ordinis assignare poterimus.

133. Quo igitur formae singulorum horum differentialium, simulque ratio ea inueniendi clarius menti repraesentetur, ea sequenti tabella complecti visum est.

Si y

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x ,

erit	atque posito
$dy = p dx$	$dp = q dx$
$ddy = q dx^2$	$dq = r dx$
$d^3y = r dx^3$	$dr = s dx$
$d^4y = s dx^4$	$ds = t dx$
$d^5y = t dx^5$	&c.

Cum igitur functio p ex functione y per differentiationem cognoscatur, similique modo ex p inueniatur q , hincque porro r , & ex eo ulterius s , &c. differentialia cuiusvis ordinis ipsius y facile reperientur, dummodo differentiale dx assumatur constans.

134. Cum p, q, r, s, t , &c. sint quantitates finitae, functiones nimirum ipsius x , differentiale primum ipsius y , rationem finitam habebit ad differentiale primum ipsius x , scilicet ut p ad 1; hancque ob causam differentialia dx & dy vocantur homogenea. Deinde cum ddy ad dx^2 habeat rationem finitam ut q ad 1, erunt ddy & dx^2 homogenea; simili modo homogenea erunt d^3q & dx^3 , itemque d^4y & dx^4 , & ita porro. Vnde uti differentialia prima sunt inter se homogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius

fius y ordinis n , quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneousum erit cum dx^n , hoc est cum potestate differentialis dx , cuius exponens est n .

135. Cum igitur prae dx evanescant omnes eius potestates, quarum exponentes sunt unitate maiores, prae dy quoque evanescunt dx^2 , dx^3 , dx^4 , &c. & quae ad has potestates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum ddy , d^3y , d^4y , &c. Simili modo prae ddy quia est homogeneousum cum dx^2 , omnes ipsius dx potestates quadrato superiores dx^3 , dx^4 , &c. evanescunt, evanescunt ergo quoque d^3y , d^4y , &c. Atque prae d^3y , evanescunt dx^4 , d^4y , dx^5 , d^5y , &c. Hincque facile, si propositae fuerint quaecunque expressiones huiusmodi differentialia inuoluentes, dignosci poterunt, verum sint homogeneae nec ne? Respici enim debent tantum differentialia, omisiss quantitibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus secundi altiorumque ordinum scribantur potestates ipsius dx ipsis homogeneae, quae si praebant ubique eundem dimensionum numerum, expressiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ esse inter se homogeneas. Nam ddy^2 denotat quadratum ipsius ddy , & quia ddy homogeneousum est cum dx^2 , erit ddy^2 homogeneousum cum dx^4 . Deinde quia dy cum dx & d^3y cum dx^3 homogeneousum est, erit productum dyd^3y cum dx^4 homogeneousum: ex quo sequitur expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ inter se esse homogeneas, ideo-

P

que

que rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{P d^3 y^2}{dx dy}$ & $\frac{Q d^5 y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro dy , ddy , $d^3 y$ & $d^5 y$ his ipsius dx potestatibus ipsis homogeneis dx , dx^2 , dx^3 & dx^5 , orientur hae expressiones $P dx^3$ & $Q dx^3$, quae utique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius dx potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinites siue maior siue minor altera, hincque vna respectu alterius evanescet. Sic $\frac{P d^3 y}{dx^2}$ ad $\frac{Q ddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad $P dx$ & altera ad $Q dx^3$, unde haec prae illa evanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{P d^3 y}{dx^2} + \frac{Q ddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{P d^3 y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones

$$\frac{P d^3 y}{dx^2} + \frac{Q ddy^2}{dy} \& \frac{P d^3 y}{dx^2},$$

quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Q dx^2 ddy^2}{P dy d^3 y} = 1 \text{ ob } \frac{Q dx^2 ddy^2}{P dy d^3 y} = 0.$$

Hoc.

Hocque pacto expressiones differentiales quandoque mirifice contrahi possunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusvis quantitatis propositae differentiale primum inueniri potest: & quoniam differentia secunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex secundis & ita porro sequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentia inueniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina deriuantur, quae usu sunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod significat *differentiale inuenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur. *Differentiatio* autem denotat operationem, qua differentia inueniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentia inueniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale inuestigatur, ita vicissim calculi species constituitur quoque in inuentione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propositum fuerit differentiale quodcunque, eius respectu ea quantitas, cuius est differentiale, vocari solet integrale. Cuius denominationis ratio est, quod, cum differentiale considerari possit, tanquam pars infinite parua, qua quantitas quaepiam crescit, ipsa illa quantitas respectu huius partis tanquam totum seu integrum spectari potest, hancque ob causam eius vo-

catur integrale. Sic cum dy sit differentiale ipsius y , vicissim y erit integrale ipsius dy , & cum ddy sit differentiale ipsius dy , erit dy integrale ipsius ddy . Similique modo erit ddy integrale ipsius d^3y , & d^3y ipsius d^4y & ita porro: vnde quaelibet differentiatio, si inuerse spectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clarissime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo exposita explicari potest. Postquam enim esset ostensum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inueniri oporteat, retrogrediendo quoque monstrauimus, quomodo, si proposita fuerit differentia, ea quantitas inueniri queat, cuius illa sit differentia; quam quantitatem respectu suae differentiae vocauimus eius summam. Vti igitur ad infinita parua procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita summae quae ibi erant vocatae, integralium nomen fortiuntur: & hanc ob causam integralia quoque non raro summae appellari solent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem inuenire, idem est, quod nostro more dati differentialis integrale inuenire dicimus.

141. Vti differentialia caractere d designamus, ita ad integralia indicanda hac littera \int vtimus, quae ergo quantitibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa sunt differentialia. Sic si differentiale ipsius y fuerit pdx , seu $dy = pdx$, erit y integrale ipsius
 pdx ,

pdx , quod hoc modo scribitur $y = \int p dx$, cum sit $y = \int f dy$. Integrabile ergo ipsius pdx , quod per $\int p dx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale est pdx . Simili modo cum sit $ddy = qdx^2$ existente $dp = qdx$; erit integrale ipsius ddy hoc est $dy = p dx$, atque ob $p = \int q dx$, erit $dy = dx \int q dx$, ac propterea $y = \int dx \int q dx$. Si ulterius sit $dq = r dx$, erit $q = \int r dx$ & $dp = dx \int r dx$; unde si character \int denuo praefigatur, fiet $p = \int dx \int r dx$, porroque $dy = dx \int dx \int r dx$, atque $y = \int dx \int dx \int r dx$.

142. Quia differentiale dy est quantitas infinite parva, eius integrale autem y quantitas finita, parique modo differentiale secundum ddy infinites minus est, quam eius integrale dy , manifestum est differentialia prae suis integralibus evanescere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parva in ordines diuidi solent, diciturque infinite paruum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima dx , dy . Infinite paruum secundi ordinis complectitur differentialia secundi ordinis, quae homogenea sunt cum dx^2 ; similique modo infinite parva, quae cum dx^3 sunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; sicque porro. Vnde vti infinite parua primi ordinis prae quantitatibus finitis evanescunt, sic infinite parua secundi ordinis prae infinite paruis primi ordinis, atque generatim infinite parua cuiusque ordinis altioris prae infinite paruis ordinis inferioris evanescunt.

143. His igitur infinite paruorum ordinibus constitutis, vti differentiale quantitatis finitae est infinite par-

vum primi ordinis, atque differentiale infinite parvi primi ordinis est infinite paruum secundi ordinis, & ita porro; ita vicissim manifestum est integrale infinite parvi primi ordinis esse quantitatem finitam, integrale autem infinite parvi secundi ordinis esse infinite paruum primi ordinis sicque deinceps. Quare si differentiale propositum fuerit infinite paruum ordinis n , eius integrale erit infinite paruum ordinis $n-1$; hincque uti differentiando ordo infinite parvorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipsas quantitates finitas perveniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum secundum hanc legem perveniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione instituta ad quantitates adhuc infinites maiores, sicque progrediendo obtinebimus similes infinitorum ordines, quorum quisque praecedentem infinites superat.

144. Supereft vt in hoc Capite quaedam de vfu signorum recepto moneamus, ne ambiguitati vllus locus relinquatur. Ac primo quidem signum differentiationis d tantum afficit literam immediate sequentem solam: sic dxy non denotat differentiale producti xy , sed differentiale ipsius x per ipsam quantitatem y multiplicatum. Solet autem, quominus confusio nascatur, quantitas y ante signum d hoc modo scribi ydx , quo productum ex y in dx indicatur. Attamen si y sit quantitas vel signum radicale $\sqrt{}$ vel logarithmicum habens praefixum; tum post differentiale poni solet: nimirum $dx\sqrt{(aa-xx)}$ significat productum ex quantitate finita $\sqrt{(aa-xx)}$ in dif-

differentiale dx , similique modo $dx/(1+x)$ est productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per dx multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\sqrt{x}$ exprimit productum differentialis secundi ddy & quantitatis finitae \sqrt{x} .

145. Neque vero signum d litteram immediate sequentem solam afficit, sed etiam nequidem exponentem si quem habet, spectat. Ita dx^2 non exprimit differentiale ipsius x^2 , sed quadratum differentialis ipsius x , ita ut exponens 2 non ad x , sed ad dx referri debeat. Posset etiam scribi $dx dx$, quemadmodum productum duorum differentialium dx & dy hoc modo $dx dy$ exponitur, verum prior modus dx^2 , uti est breuior, ita vsitatur. Praesertim si altiores potestates ipsius dx essent indicandae, nimis prolixum foret dx toties repeti: sic dx^3 denotat cubum ipsius dx , & in differentialibus altiorum ordinum similis ratio observatur. Scilicet ddy^4 denotat potestatem quartam differentialis secundi ordinis ddy ; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ significat quadratum differentialis tertii ordinis ipsius y multiplicatum esse per \sqrt{x} ; si autem per quantitatem rationalem x multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo $x d^3y^2$.

146. Sin autem velimus, ut signum d plus quam solam litteram subsequenter afficiat, id peculiari modo indicari debet. Vt in hoc casu praecipue vncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Vti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum si velimus differentiale potestatis hu-

huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix evitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita ut $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum d ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius xdy ; & $d.^3xdyV(aa+xx)$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdyV(aa+xx)$, quae est productum ex quantitibus finitis x & $V(aa+xx)$ atque ex differentiali dy .

147. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis \int semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dx lx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $x dx \int dx lx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx \int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx \int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita ut $\int ydx . \int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148. *Analysis* infinitorum igitur cum in differentialibus tum in integralibus inueniendis versatur, & hanc obrem in duas praecipuas partes diuiditur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur quantitatum quarumvis differentialia inueniendi; in posteriori vero via monstratur differentialium propositorum integralia inuestigandi: in utroque autem simul summus usus, quem isti calculi tam ad ipsam *Analysin* quam ad *Geometriam* sublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob causam ista *Analyseos* pars iam tanta accepit incrementa, ut modico volumine prorsus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in soluendis variis generis problematibus, deteguntur, ut ob haec noua inuenta, quae continuo accedunt, nunquam exauriri, multo minus perfecte describi atque explicari possit. Dabo autem operam, ut quae adhuc sunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel saltem methodos explicem, unde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures *Analyseos* infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inueniuntur passim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi solet methodus differentialia secundi atque altiorum ordinum inueniendi: quoniam autem modum cuiusque ordinis differentialia inueniendi in ipso calculo differentiali sum expositurus, hac subdiuisione, quae potius

Q

ex

ex merito inuentionis, quam ex re ipsa facta esse videtur, superfedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyseos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales transtulit, quia vtrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam transcendentes accommodare constitui, hinc partem peculiarem facere superfluum atque instituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare statui, modumque sum expositurus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non solum prima, sed etiam secunda & altiorum ordinum expedite inueniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, siue sint functiones vnius variabilis, siue plurium, siue demum explicite dentur, siue per aequationes. Deinde inuentionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem sine calculi integralis subsidio peruenire licet: cuiusmodi sunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, vicissimque arcuum circularium sinus, & tangentes. Denique etiam quantitates vtcunque ex his compositas & permixtas differentiare docebo; sicque calculi differentialis pars prior, methodus scilicet differentiandi absoluetur.

151. Altera pars vsui, quem methodus differentiandi tam ad Analyfin quam Geometriam sublimiorem affert, explicando est destinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inueniendas, partim ad series tractandas atque summandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expressionum, quae certis casibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae sunt alia. Geometria autem sublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curuarum, eorumque curuatura ipsa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curuis vel reflexos vel refractos resolui possunt. Quibus etsi amplissimus tractatus impleri posset, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breuiter ac perspicue explicare.

CAPUT V.
DE DIFFERENTIATIONE FUN-
TIONUM ALGEBRAICARUM VNICAM
VARIABLEM INUOLUENTUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale est $= dx$
erit x in proximum promouendo $x^1 = x + dx$.
Quare si fuerit y quaecunque functio ipsius x , si in ea
loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^1 , atque differen-
tia $y^1 - y$ dabit differentiale ipsius y . Si igitur pona-
mus $y = x^n$ fiet

$$y^1 = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \&c.$$

eritque ergo

$$dy = y^1 - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \&c.$$

At in hac expressione terminus secundus cum reliquis se-
quentibus prae primo euanescit, eritque idcirco $nx^{n-1}dx$
differentiale ipsius x^n , seu $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Vnde si a sit
numerus seu quantitas constans, erit quoque $d.ax^n =$
 $nax^{n-1}dx$. Cuiuscunque ergo ipsius x potestatis diffe-
rentiale inuenitur, multiplicando eam per exponentem,
diuidendo per x , & reliquum per dx multiplicando, quae
regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipsius x^n , ex eo
facile differentiale secundum reperitur, dummodo, ut
hic

hic constanter assumemus, differentiale dx constans statuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}dx$ factor ndx sit constans, alterius factoris x^{n-1} differentiale sumi debet, quod proinde erit $(n-1)x^{n-2}dx$. Hoc ego per ndx multiplicatum dabit differentiale secundum: $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo si differentiale ipsius x^{n-2} quod est $(n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d^3.x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d^4.x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d^5.x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

vnde simul forma sequentium differentialium facillime colligitur.

154. Quoties ergo n est numerus integer affirmativus, toties ad differentialia tandem pervenitur evanescencia; quae scilicet ita sunt $= 0$, vt prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescant. Horum autem notandi sunt casus simpliciores.

$$dx = dx; \quad dd.x = 0; \quad d^3.x = 0; \quad \&c.$$

$$d.x^2 = 2xdx; \quad dd.x^2 = 2dx^2; \quad d^3.x^2 = 0; \quad d^4.x^2 = 0 \&c.$$

$$d.x^3 = 3x^2dx; \quad dd.x^3 = 6xdx^2; \quad d^3.x^3 = 6dx^3; \quad d^4.x^3 = 0$$

$$d.x^4 = 4x^3dx; \quad dd.x^4 = 12x^2dx^2; \quad d^3.x^4 = 24xdx^3;$$

$$d^4.x^4 = 24dx^4$$

$$d.x^5 = 5x^4dx; \quad dd.x^5 = 20x^3dx^2; \quad d^3.x^5 = 60x^2dx^3;$$

$$d^4.x^5 = 120xdx^4; \quad d^5.x^5 = 120dx^5; \quad d^6.x^5 = 0.$$

Patet ergo si n fuerit numerus integer affirmatiuus, potestatis x^n differentiale ordinis n esse constans, nempe $= 1. 2. 3. \dots n dx^n$, adeoque differentiaalia superiorum ordinum omnium esse $= 0$.

155. Si n sit numerus integer negatiuus, huiusmodi ipsius x potestatum negatiuarum $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \&c.$ differentiaalia sumi poterunt, cum sit $\frac{1}{x} = x^{-1}; \frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur $n = -m$, erit ipsius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m dx}{x^{m+1}}$; differentiale secundum $= \frac{m(m+1) dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2) dx^3}{x^{m+3}}$ &c. unde sequentes casus simpliciores imprimis notari merentur.

$$\begin{aligned} d. \frac{1}{x} &= \frac{-dx}{x^2}; & dd. \frac{1}{x} &= \frac{2dx^2}{x^3}; & d.^3. \frac{1}{x} &= \frac{-6dx^3}{x^4} \\ d. \frac{1}{x^2} &= \frac{-2dx}{x^3}; & dd. \frac{1}{x^2} &= \frac{6dx^2}{x^4}; & d.^3. \frac{1}{x^2} &= \frac{-24dx^3}{x^5} \\ d. \frac{1}{x^3} &= \frac{-3dx}{x^4}; & dd. \frac{1}{x^3} &= \frac{12dx^2}{x^5}; & d.^3. \frac{1}{x^3} &= \frac{-60dx^3}{x^6} \\ d. \frac{1}{x^4} &= \frac{-4dx}{x^5}; & dd. \frac{1}{x^4} &= \frac{20dx^2}{x^6}; & d.^3. \frac{1}{x^4} &= \frac{-120dx^3}{x^7} \\ d. \frac{1}{x^5} &= \frac{-5dx}{x^6}; & dd. \frac{1}{x^5} &= \frac{30dx^2}{x^7}; & d.^3. \frac{1}{x^5} &= \frac{-210dx^3}{x^8} \end{aligned}$$

&c.

156.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim

$n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ differentiale primum

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} \quad \text{secundum} \\ &= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}} \quad \&c. \end{aligned}$$

Hinc erit :

$$\begin{aligned} d.\sqrt{x} &= \frac{dx}{2\sqrt{x}}; & dd.\sqrt{x} &= \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}; & d.^3\sqrt{x} &= \frac{1.3 dx^3}{8x^2\sqrt{x}} \\ d.\sqrt[3]{x} &= \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; & dd.\sqrt[3]{x} &= \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}; & d.^3\sqrt[3]{x} &= \frac{2.5 dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}} \\ d.\sqrt[4]{x} &= \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}; & dd.\sqrt[4]{x} &= \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}; & d.^3\sqrt[4]{x} &= \frac{3.7 dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}} \end{aligned}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquireretur huiusmodi differentialia, etiam sine praeuia reductione ad formam potestatis, inueniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius siue affirmatiuus siue negatiuus integer, differentialia aequae facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriuentur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

$d.x$

$$\begin{aligned}
d.x\sqrt{x} &= \frac{3}{2} dx\sqrt{x}; & d.x^2\sqrt{x} &= \frac{5}{2} xdx\sqrt{x}; & d.x^3\sqrt{x} &= \frac{7}{2} x^2dx\sqrt{x}; \\
d.\frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}; & d.\frac{1}{x\sqrt{x}} &= \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}; & d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} &= \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}}; \\
d.\sqrt[3]{x^2} &= \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; & d.x\sqrt[3]{x} &= \frac{4}{3} dx\sqrt[3]{x}; & d.x\sqrt[3]{x^2} &= \frac{5}{3} dx\sqrt[3]{x^2}; \\
d.xx\sqrt[3]{x} &= \frac{7}{3} xdx\sqrt[3]{x}; & d.xx\sqrt[3]{x^2} &= \frac{8}{3} xdx\sqrt[3]{x^2}; & & \&c. \\
d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} &= \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}; & d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} &= \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}; & d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} &= \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}; \\
d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} &= \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}; & d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} &= \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}; & & \&c.
\end{aligned}$$

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integralium differentialia poterunt inueniri, propterea quod earum singuli termini sunt potestates ipsius x , quas differentiare nouimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p+q+r+s+\&c.$ posito $x+dx$ loco x abeat in $p+dp+q+dq+r+dr+s+ds+\&c.$ erit eius differentiale $=dp+dq+dr+ds+\&c.$ Quare si singularum quantitatum p, q, r, s , differentialia assignare queamus, simul quoque aggregati earum differentiale innotescet. Atque cum multipli ipsius p differentiale sit aequale multiplo ipsius dp , hoc est $d.ap=adp$; erit quantitatis $ap+bq+cr$ differentiale $=adp+bdq+cdr$. Cum denique quantitatum constantium differentialia sint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap+bq+cr+f$ differentiale $=adp+bdq+cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum singuli termini sint vel constantes vel potestates ipsius x ,
diffe-

differentiatio secundum praecepta data facile absoluetur.

Sic erit :

$$\begin{aligned} d(a+x) &= dx ; & d(a+bx) &= bdx ; \\ d(a+xx) &= 2xdx ; & d(aa-xx) &= -2xdx ; \\ d(a+bx+cx) &= bdx+2cxdx ; \\ d(a+bx+cx+ex^3) &= bdx+2cxdx+3ex^2dx ; \\ d(a+bx+cx+ex^3+fx^4) &= bdx+2cxdx+3ex^2dx \\ &\quad +4fx^3dx. \end{aligned}$$

Atque si exponentes fuerint indefiniti erit :

$$\begin{aligned} d(1-x^n) &= -nx^{n-1}dx ; & d(1+x^m) &= mx^{m-1}dx ; \\ d(a+bx^m+cx^n) &= mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx. \end{aligned}$$

160. Cum igitur functiones rationales integrae secundum maximam ipsius x dignitatem in gradus distinguantur, manifestum est, si huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri constantia, posteaque in nihilum abire, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx est constans, secundum cum sequentibus nullum. Sit functio secundi gradus

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2 &= y ; \text{ erit } dy = bdx+2cxdx ; \\ ddy &= 2cdx ; & d^3y &= 0. \end{aligned}$$

Simili modo si ponatur functio tertii gradus

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2+ex^3 &= y ; \text{ erit } dy = bdx+2cxdx+3ex^2dx ; \\ ddy &= 2cdx+6exdx & \& \quad d^3y = 6edx \text{ atque } d^4y = 0. \end{aligned}$$

Quare generaliter si huiusmodi functio sit gradus n , eius differentiale ordinis n erit constans, & sequentia omnia nulla.

R

160.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, si inter potestates ipsius x , quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes sint numeri negativi seu fracti. Ita

$$\text{I. Si fit } y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$$

$$\text{erit } dy = \frac{b dx}{2\sqrt{x}} + \frac{c dx}{xx}.$$

$$\text{II. Si fit } y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$$

$$\text{erit } dy = \frac{-a dx}{2x\sqrt{x}} + \frac{c dx}{2\sqrt{x}} - e dx,$$

$$\& ddy = \frac{3a dx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{c dx^2}{4x\sqrt{x}}.$$

$$\text{III. Si fit } y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt{x}} + \frac{f}{xx}$$

$$\text{erit } dy = \frac{-2b dx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4c dx}{3xx\sqrt{x}} - \frac{2f dx}{x^3},$$

$$\& ddy = \frac{10b dx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28c dx^2}{9x^3\sqrt{x}} + \frac{6f dx^2}{x^4}.$$

cuiusmodi exempla secundum praecepta data facillime absoluuntur.

162. Si quantitas differentianda proposita fuerit potestas eiusmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta sufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipsius x , cuius differentiale dp in potestate est, erit ipsi-

ipsius potestatis p^n differentiale primum $= np^{n-1} dp$.
Hinc sequentia exempla solvuntur:

I. Si fit $y = (a+x)^n$; erit $dy = n(a+x)^{n-1} dx$

II. Si fit $y = (aa-xx)^2$; erit $dy = -4x dx (aa-xx)$

III. Si fit $y = \frac{1}{aa+xx}$ seu $y = (aa+xx)^{-1}$

erit $dy = \frac{-2x dx}{(aa+xx)^2}$

IV. Si fit $y = V(a+bx+cx^2)$ erit

$dy = \frac{b dx + 2c x dx}{2V(a+bx+cx^2)}$

V. Si fit $y = V^3(a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$ seu $y = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3} x^3 dx (a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3 dx}{3V^3(a^4-x^4)}$

VI. Si fit $y = \frac{1}{V(1-xx)}$ seu $y = (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = x dx (1-xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x dx}{(1-xx)V(1-xx)}$

VII. Si fit $y = V^3(a+Vbx+x)$

erit $dy = \frac{dxVb+2Vx+dx}{3V^3(a+Vbx+x)^2} = \frac{dxVb+2dxVx}{6Vx.V^3(a+Vbx+x)^2}$

VIII. Si fit $y = \frac{1}{x+V(aa-xx)}$,

ob id $V(aa-xx) = \frac{x dx}{V(aa-xx)}$, erit

$dy = \frac{-dx+x dx:V(aa-xx)}{(x+V(aa-xx))^2} = \frac{x dx-dxV(aa-xx)}{(x+V(aa-xx))^2 V(aa-xx)}$

seu $dy = \frac{dx(x-V(aa-xx))^3}{(2xx-aa)^2 V(aa-xx)}$

IX.

IX. Si fit $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1 - p + q)^3}$, erit $dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1 - p + q)^3}}$.

Iam per antecedentia est

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \quad \& \quad dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1 - xx)}}{-4x dx} \right) \frac{-4x dx}{3\sqrt[3]{(1 - xx)^2}},$$

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4x dx : \sqrt[3]{(1 - xx)^2}}{4\sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2}\right)^3}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusue functionibus ipsius x , quarum differentialia constant; eius differentiale sequente modo commodissime inuenietur. Sint p & q functiones ipsius x , quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x + dx$ loco x ; p abit in $p + dp$ & q in $q + dq$; productum pq transmutabitur in

$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$,
vnde producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$;
vbi cum pdq & qdp sint infinite parua primi ordinis, at $dpdq$ secundi ordinis, vltimus terminus euanesceat, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$. Differentiale ergo producti pq constat ex duobus membris, quae obtinentur,

si uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus constantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + r dq$, quibus valoribus loco z & dz substitutis erit

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp,$$

Simili modo si quantitas differentianda quatuor habeat factores erit:

$$d.pqrs = pqrds + pqsd r + prsdq + qrsdp,$$

vnde quilibet differentiationem plurium factorum facile perspiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a+x)(b-x)$, erit

$dy = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx$
quod idem differentiale quoque inuenitur, si quantitas proposita euoluatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per superiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x} V(aa - xx)$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $V(aa - xx) = q$, quia est $dp = \frac{-dx}{xx}$

$$\& dq = \frac{-x dx}{V(aa - xx)}, \text{ erit}$$

$$dy = p dq + q dp = \frac{-dx}{V(aa - xx)} - \frac{dx}{xx} V(aa - xx);$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt

$$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xxV(aa - xx)} = \frac{-aadx}{xxV(aa - xx)}. \text{ Hinc erit differen-}$$

$$\text{tiale quaesitum, } dy = \frac{-aadx}{xxV(aa - xx)}.$$

III.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{V(a^4 + x^4)}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{V(a^4 + x^4)} = q$; quia inuenimus $dp = 2x dx$ & $dq = \frac{-2x^3 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$p dq + q dp = \frac{-2x^5 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x dx}{V(a^4 + x^4)} = \frac{2a^4 x dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4 x dx}{(a^4 + x^4) V(a^4 + x^4)}$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x + V(1 + xx)}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x + V(1 + xx)} = q$, ob $dp = dx$ & $dq = \frac{-dx - x dx \cdot V(1 + xx)}{(x + V(1 + xx))^2} = \frac{-dx(x + V(1 + xx))}{(x + V(1 + xx))^2 V(1 + xx)}$ erit $p dq + q dp = \frac{-dx}{(x + V(1 + xx)) V(1 + xx)}$ $= \frac{-x dx}{(x + V(1 + xx)) V(1 + xx)} + \frac{dx}{x + V(1 + xx)} = \frac{dx(V(1 + xx) - x)}{(x + V(1 + xx)) V(1 + xx)}$. Fiet ergo differentiale

quaesitum $dy = \frac{dx(V(1 + xx) - x)}{(x + V(1 + xx)) V(1 + xx)}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $V(1 + xx)$

$$V(1+xx)-x, \text{ fiet } dy = \frac{dx(1+2xx-2xV(1+xx))}{V(1+xx)}$$

$$= \frac{dx+2xxdx}{V(1+xx)} - 2xdx.$$

Idem differentiale alio modo commodius inueniri potest; cum enim sit $y = \frac{x}{x+V(1+xx)}$, multiplicetur numerator ac denominator per $V(1+xx)-x$, fietque

$$y = xV(1+xx) - xx = V(x^2+x^4) - xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam est

$$dy = \frac{xdx+2x^3dx}{V(x^2+x^4)} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{V(1+xx)} - 2xdx.$$

V. Si fuerit $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y = x(aa+xx)V(aa+xx)$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy = dx(aa+xx)V(aa+xx) + 2xxdxV(aa+xx)$$

$$- \frac{xxdx(aa+xx)}{V(aa+xx)} = \frac{dx(a^4+aa^2xx-4x^4)}{V(aa+xx)}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendendi possunt, tamen commodius utemur regula fractionibus differentiandi inferuiente. Sit ergo proposita

haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inueniri oporteat.

Quoniam posito $x+dx$ loco x fractio illa abit in

$$\frac{p+}{q+}$$

$$\frac{p+dp}{q+dq} = (p+dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq} \right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq},$$

vnde si fractio ipsa $\frac{p}{q}$ subtrahatur, remanet eius differentiale

$$d. \frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}, \text{ ob euanescentem terminum } \frac{dpdq}{qq}.$$

Hinc ergo erit $d. \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, vnde haec regula pro differentiatione cuiusque fractionis enascitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato subtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, residuum dividatur per quadratum denominatoris, quotusque erit differentiale fractionis quaesitum.* Cuius regulae usus per sequentia exempla illustrabitur.

I. Si fuerit $y = \frac{x}{aa+xx}$, erit per hanc regulam

$$dy = \frac{(aa+xx)dx - 2xxdx}{(aa+xx)^2} = \frac{(aa-xx)dx}{(aa+xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{V(aa+xx)}{aa-xx}$; reperitur

$$dy = \frac{(aa-xx)xdx : V(aa+xx) + 2xdx V(aa+xx)}{(aa-xx)^2},$$

$$\& \text{ facta reductione } dy = \frac{(3aa+xx)xdx}{(aa-xx)^2 V(aa+xx)}.$$

Saepe numero expedit ea regula vti, quae sequitur ex formula priori $d. \frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per de-

no-

nominatorem diuiso, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at per quadratum denominatoris diuiso. Ita

III. Si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, erit

$$dy = \frac{-2x dx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aax dx + 4x^3 dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

quae ad eundem determinatorem reuocata praebet.

$$dy = \frac{-2x dx (2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

165. Haec iam sufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipsius x propositae differentiale inuestigandum; si enim fuerit integra modus differentiandi iam supra est expositus. Sit igitur functio proposita fracta, quae semper ad huiusmodi formam reduceretur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.}{a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, vt fiat

$$y = \frac{p}{q}; \text{ eritque } dy = \frac{q dp - p dq}{qq}. \text{ At cum sit:}$$

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

$$\& q = a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.$$

$$\text{erit } dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \&c.$$

$$\& dq = \epsilon dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\epsilon x^3dx + \&c.$$

S

vnde

vnde per multiplicationem obtinebitur :

$$\begin{aligned} qdp = & aBdx + 2aCxdx + 3aDx^2dx + 4aEx^3dx + \&c. \\ & + 6Bxdx + 26Cx^2dx + 36Dx^3dx + \&c. \\ & + 7Bx^2dx + 27Cx^3dx + \&c. \\ & + 8Bx^3dx + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pdq = & 6Adx + 6Bxdx + 6Cx^2dx + 6Dx^3dx + \&c. \\ & + 27Axdx + 27Bx^2dx + 27Cx^3dx + \&c. \\ & + 36Ax^2dx + 36Bx^3dx + \&c. \\ & + 48Ax^3dx + \&c. \end{aligned}$$

Ex his ita que obtinebitur differentiale quaesitum :

$$\begin{aligned} dy = & \frac{+aBdx + 2aCxdx + 3aDx^2dx + 4aEx^3dx + 5aFx^4dx + \&c.}{-6A - 27A - 36A - 48A} \\ & + \frac{6Cx^2dx + 26Cx^3dx + 27Cx^4dx + \&c.}{-7B - 28B - 39B - 50B} \\ & + \frac{6Dx^3dx + 36Dx^4dx + \&c.}{-8C - 40C - 56C} \\ & + \frac{6Ex^4dx + \&c.}{-9D - 54D} \\ & + \frac{6Fx^5dx + \&c.}{-10E - 60E} \end{aligned}$$

$$(a + 6x + 7x^2 + 8x^3 + 9x^4 + 10x^5 + \&c.)^2$$

Quae expressio ad cuiusvis functionis rationalis differentiale expedite inueniendum maxime est accommodata. Quamadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propositae combinatur, ex inspectione mox intelligitur. Denominator vero differentialis est quadratum denominatoris functionis propositae.

166. Si fractionis propositae vel numerator vel denominator vel vterque ex factoribus constet, multiplicatione actu instituta orietur quidem forma, qualem modo differentiauimus; attamen facilius pro his casibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur proposita huiusmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, ut sit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{q dP - P dq}{qq}$, substitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$;

$$\text{eius diff. } dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}.$$

Si sit $y = \frac{p}{qs}$, posito denominatore $qs = Q$,

$$\text{erit } dQ = qds + sdq, \text{ \& } dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}. \text{ Quare}$$

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$,

$$\text{erit } dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}.$$

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$, ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, ut ha-

beat $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem

fit $dP = pdr + rdp$ & $dQ = qds + sdq$, prodibit sequens differentiatio:

S 2

III.

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

$$\text{erit } dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss},$$

$$\text{feu } dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}.$$

Simili modo, si numerator ac denominator fractionis propositae plures habeant factores, differentialia eadem ratione inuestigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla hac pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem casus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi potest, quam per regulas generaliores hic expositas. Euenit hoc si factores, qui vel functionem ipsam, vel functionis numeratorem aut denominatorem constituunt, fuerint potestates.

Ponamus functionem differentiandam esse $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inueniendum sit $p^m = P$ & $q^n = Q$, ut fiat $y = PQ$ & $dy = P dQ + Q dP$. Cum autem sit $dP = mp^{m-1} dp$ & $dQ = nq^{n-1} dq$, fiet his valoribus substitutis :

$$dy = np^m q^{n-1} dq + mp^{m-1} q^n dp = p^{m-1} q^{n-1} (np dq + mq dp);$$

vnde sequens oritur regula :

I. Si

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;

$$\text{erit } dy = p^{m-1} q^{n-1} (n p dq + m q dp).$$

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale inuenietur, ac reperiatur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;

$$\text{erit } dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (m q r dp + n p r dq + k p q dr).$$

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum proposita huiusmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inferuentem $dy = \frac{m p^{m-1} q dp - p^m dq}{q q}$, quod differentiale commodius sic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$,

$$\text{erit } dy = \frac{p^{m-1} (m q dp - p dq)}{q q}.$$

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem superiorem regulam

$$dy = \frac{q^n dp - n p q^{n-1} dq}{q^{2n}}, \text{ cuius expressionis si numerator ac}$$

denominator per q^{n-1} diuidatur, erit $dy = \frac{q dp - n p dq}{q^{n+1}}.$

Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{q dp - n p dq}{q^{n+1}}.$

Quod si vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; inuenietur

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^ndp - np^mq^{n-1}dq}{q^{2n}}, \text{ quae reducitur ad}$$

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^mdq}{q^{n+1}}. \text{ Quocirca}$$

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$;

$$\text{erit } dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}.$$

Denique si proposita fuerit huiusmodi fractio $y = \frac{r}{p^mq^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem

$$dy = \frac{pq^ndr - mp^{m-1}q^nr dp - np^mq^{n-1}rdq}{p^{2m}q^{2n}},$$

cuius expressionis cum numerator & denominator sit divisibilis per $p^{m-1}q^{n-1}$:

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^mq^n}$;

$$\text{erit } dy = \frac{pqdr - mqr dp - npr dq}{p^{m+1}q^{n+1}}.$$

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae speciales, quas verbis exprimere superfluum foret, facili negotio pro quouis casu erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas haecenus exposuimus tam late patent, ut nulla excogitari possit functio ipsius x algebraica, quae non earum ope differentiari que-

queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi fractiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absoluimus. Simul vero etiam compendia, si factores inuoluantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusvis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, siue ei per additionem, siue per subtractionem siue multiplicationem, siue diuisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos reuocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriusue variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad vnam maxime vniuersalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel diuisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro quolibet parte functio proposita seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis; reliquae vero partes omnes constantes.*

Quo

Quo facto singula ista differentialia, quae ex singulis partibus modo descripto eliciuntur, in unam summam colligantur, sicque obtinebitur differentiale functionis propositae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, uti infra ostendetur.

171. Ad regulam hanc illustrandam ponamus functionem y duabus constare partibus, siue per additionem siue subtractionem connexis, ita ut sit $y = p \pm q$. Ponatur primo sola pars p variabilis, altera q constans erit differentiale $= dp$, deinde ponatur altera pars $\pm q$ sola variabilis, altera vero p constans, eritque differentiale $= \pm dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaesitum ita componetur, ut sit $dy = dp \pm dq$, omnino uti idem iam supra inuenimus. Hinc vero simul liquet, si functio pluribus constet partibus, siue inuicem additis siue subtractis, nempe $q = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inuentum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane uti & superior regula docebat.

172. Si partes sint in se inuicem multiplicatae, ita ut sit $y = pq$; manifestum est posita sola parte p variabili, fore differentiale $= q dp$; at si altera pars q sola variabilis statuatur, erit differentiale $= p dq$. Addantur ergo haec duo differentialia inuicem, atque prodibit differentiale quaesitum $dy = q dp + p dq$, quemadmodum ex iam allatis constat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, scilicet $y = pqrs$, si successive
vna-

vnaquaeque sola variabilis statuatur, orientur ista differentialia : $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$,

quorum summa dabit differentiale quaesitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorsus vti iam ante inuenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, siue partes functionem constituentes sint inuicem additae subtractaeve, siue in se inuicem multiplicatae.

173. Si partes functionem formantes per diuisionem sint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$, ponatur secundum regulam primum sola pars p variabilis, eritque ob q constans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur sola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$, erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propositae $dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, sicut iam supra inuenimus. Simili modo si functio proposita sit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo successiue singulas partes solas p, q, r & s variabiles, prodibunt sequentia differentialia :

$$\frac{qdp}{rs}; \quad \frac{pdq}{rs}; \quad \frac{-pqdr}{rrs}; \quad \& \quad \frac{pqds}{rss}, \quad \text{vnde fit}$$

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}.$$

174. Dummodo ergo singulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae, ut earum differentialia exhiberi queant, simul quoque totius functionis differentiale inueniri poterit. Quod si igitur partes fuerint functiones racionales, tum earum differentialia non solum ope praeceptorum ante iam datorum inueniuntur, sed ea quoque ex hac ipsa regula generali erui poterunt: si autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad potestates, quarum exponentes sunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem potestatum, qua est $d.x^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias insuper expressiones surdas inuoluunt. Vnde patet si cum regula generali hic data, infra vero demonstranda, coniungatur regula differentiandi potestates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi posse.

175. Ex his omnibus iam dilucide sequitur, si y fuerit functio quaecunque ipsius x , differentiale eius dy huiusmodi habiturum esse formam $dy = p dx$, in qua valor ipsius p per praecepta hic exposita semper assignari queat. Erit autem p functio ipsius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, nisi consuetae, quibus functiones algebraicae constitui solent. Hancobrem si y fuerit functio algebraica ipsius x , erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipsius x . Atque si z fuerit etiam functio algebraica ipsius x , ita ut
si dz

si $dz = q dx$, ob q functionem algebraicam ipsius x , erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipsius x , quippe quae est $= \frac{p}{q}$.

Quare si huiusmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expressionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impediunt, quominus ea expressio sit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia secunda & superiorem ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipsius x , fuerit $dy = p dx$, atque $dp = q dx$; erit sumto differentiali dx constante, $ddy = q dx^2$ uti supra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas sit quoque q functio algebraica ipsius x , erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non solum quantitas finita, sed etiam functio algebraica ipsius x , dummodo y fuerit eiusmodi functio. Simili modo perspicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones algebraicas ipsius x , modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x , omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusvis ordinis ipsarum y , z , & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{dz}$, $\frac{d^3y}{dz ddy}$, $\frac{dx d^4y}{dy^3 ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x .

177. Cum igitur nunc methodus sit tradita cuiusque functionis ipsius x algebraicae differentiale primum inueniendi, eadem methodo poterimus quoque differentiaalia secunda altiorumque ordinum inuestigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipsius x , ex eius differentiatione $dy = p dx$ innotescet valor ipsius p . Qui si denuo differentietur atque reperiatur $dp = q dx$, erit $ddy = q dx^2$, posito dx constante, ficque definietur differentiale secundum. Differentiando porro q , vt sit $dq = r dx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = r dx^3$; ficque vltcrius differentiaalia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r , &c. omnes sunt functiones ipsius x algebraicae; ad quas differentiandas praecepta data sufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omissis enim dx , in differentiatione ipsius y , prodibit valor ipsius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatu ac diuifus per dx , quod fit dum vbique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipsius $q = \frac{ddy}{dx^2}$.

Simili modo porro inuenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa + xx}$ cuius differentiaalia tam prima quam fequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando fimulque per dx diuidendo

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{-2 a a x}{(a a + x x)^2}, \text{ hincque porro}$$

ddy

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa + xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa + xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa + xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{V(1-xx)}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile vterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem supremarum ipsius x potestatum semper est productum numerorum naturalium, ab 1 usque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim si has formas vterius continuemus atque perpendamus,prehendemus fore generaliter, si $y = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3 \dots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} + \right. \\ \left. \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1.2 \dots 6} x^{n-6} \right. \\ \left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{1.2 \dots 8} x^{n-8} + \&c. \right)$$

Huiusmodi ergo exempla non solum inferuiunt, ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, sed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum obseruantur, per se sunt notatu dignissimae, atque ad alias inuentiones deducere possunt.

CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium seu non algebraicarum genera, quae calculus integralis supeditabit, in Introductione ad analysin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis vsitarum nobis peruenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus suggererat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide exposuimus, ut fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite inuestigabimus, quo earum indoles ac proprietates clarius perspiciantur; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium est fons proprius, patefiat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicæ, seu eiusmodi functiones ipsius x , quae praeter expressiones algebraicas quoque logarithmum ipsius x , seu cuiusvis ipsius functionis inuoluunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius facestant, omnis difficultas in inueniendo differentiali logarithmi cuiusque ipsius x functionis erit posita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diuersa,

quae

quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumptus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob causam lp perpetuo hic designabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p .

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x , ponaturque $y = lx$, ita ut differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x , sicque transibit y in $y' = y + dy$; quare habebitur $y + dy = l(x + dx)$ & $dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x})$.

At iam supra logarithmum hyperbolicum huiusmodi expressionis $1 + z$ ita per seriem infinitam expressimus, ut

$$\text{effet } l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \&c.$$

Posito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z , obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \&c.$$

Cum igitur huius seriei omnes termini prae primo evanescant, erit $d.lx = dy = \frac{dx}{x}$. Vnde alius cuiuscunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio est ut $n:1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181. Si igitur cuiusque ipsius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale esse $= \frac{dp}{p}$, vnde ad logarithmorum differentialia inuenienda haec habetur regula. *Quantitatis p , cuius logarithmus proponitur, sumatur differentiale; hocque per ipsam quantitatem p diuisum dabit differentiale logarithmi quaesitum.* Sequitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^{\omega} - 1^{\omega}}{\omega}$, ad quam superiori libro logarithmum ipsius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum fit $lp = \frac{p^{\omega} - 1}{\omega}$; erit $d \cdot lp = d \cdot \frac{1}{\omega} p^{\omega} = p^{\omega-1} dp = \frac{dp}{p}$ ob $\omega = 0$. Notandum autem est $\frac{dp}{p}$ esse differentiale logarithmi hyperbolici ipsius p ; ita vt, si logarithmus vulgaris ipsius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inueniri poterit, quemadmodum ex sequentibus exemplis perspicietur:

I. Si fit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si fit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$; vt fit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At est $dp = nx^{n-1} dx$, vnde fit $dy = \frac{n dx}{x}$.

V

Idem

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim fit $lx^n = n/x$, erit $d.lx^n = n.d.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Si fit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2x dx}{1+xx}$.

IV. Si fit $y = l \frac{1}{V(1-xx)}$; quia erit $y = -lV(1-xx) = -\frac{1}{2}l(1-xx)$, inuenitur $dy = \frac{xdx}{1-xx}$.

V. Si fit $y = l \frac{x}{V(1+xx)}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$, fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si fit $y = l(x + V(1+xx))$, fiet $dy = \frac{dx + xdx:V(1+xx)}{x + V(1+xx)} = \frac{xdx + dxV(1+xx)}{(x + V(1+xx))V(1+xx)}$, cuius fractionis cum numerator ac denominator per $x + V(1+xx)$ fit diuisibilis fiet $dy = \frac{dx}{V(1+xx)}$.

VII. Si fit $y = \frac{1}{V-1} l(xV-1 + V(1-xx))$, ponatur $xV-1 = z$. Atque ob $y = \frac{1}{V-1} l(z + V(1+zz))$, erit per praecedens $dy = \frac{1}{V-1} dz:V(1+zz)$.

Quare, ob $dz = dxV-1$, fiet $dy = \frac{dx}{V(1-xx)}$.

Quamuis ergo logarithmus propositus imaginaria inuoluat, tamen eius differentiale fit reale.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resoluetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit $y = lp + lq + lr + ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$.

Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim

$y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp + lq - lr - ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$.

Neque etiam potestates difficultatem mouebunt, si enim fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$, erit

$$dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}.$$

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum $dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2}l(1+x) - \frac{1}{2}l(1-x)$, hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si fit $y = \frac{1}{2}l\frac{V(1+xx)+x}{V(1+xx)-x}$, ob $y = \frac{1}{2}l(V(1+xx)+x) - \frac{1}{2}l(V(1+xx)-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{V(1+xx)} + \frac{\frac{1}{2}dx}{V(1+xx)} = \frac{dx}{V(1+xx)}$. Hoc idem facilius inuenitur, si in fractione

V 2

V(1

$\frac{V(1+xx)+x}{V(1+xx)-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per

$V(1+xx)+x$, prodibit enim

$$y = \frac{1}{2} l(V(1+xx)+x)^2 = l(V(1+xx)+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{V(1+xx)}$.

IV. Si fit $y = l \frac{V(1+x)+V(1-x)}{V(1+x)-V(1-x)}$. Ponatur huius

fractionis numerator $V(1+x)+V(1-x)=p$ & de-

nominator $V(1+x)-V(1-x)=q$, erit $y = l \frac{p}{q} = lp - lq$,

& $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$. Est vero $dp = \frac{dx}{2V(1+x)} - \frac{dx}{2V(1-x)} =$

$\frac{-dx}{2V(1-xx)} (V(1+x)-V(1-x)) = \frac{-qdx}{2V(1-xx)}$; &

$dq = \frac{dx}{2V(1+x)} + \frac{dx}{2V(1-x)} = \frac{pdx}{2V(1-xx)}$. Hinc fiet

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-qdx}{2pV(1-xx)} - \frac{pdx}{2qV(1-xx)} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pqV(1-xx)}.$$

At est $pp+qq=4$ & $pq=2x$, unde erit

$dy = -\frac{dx}{xV(1-xx)}$. Hoc autem differentiale facilius

inuenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y = l \frac{1+V(1-xx)}{x} = l \left(\frac{1}{x} + V\left(\frac{1}{xx}-1\right) \right).$$

Posito

Posito enim $\frac{1}{x} + V\left(\frac{1}{xx} - 1\right) = p$, erit

$$\begin{aligned} dp &= \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3 V\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx V(1 - xx)} \\ &= \frac{-dx(1 + V(1 - xx))}{xx V(1 - xx)}, \text{ ideoque, ob } p = \frac{1 + V(1 - xx)}{x}, \\ \text{erit } dy &= \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x V(1 - xx)} \text{ vt ante.} \end{aligned}$$

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx diuidantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inueniuntur, siquidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$$\begin{aligned} y &= lx, & \text{erit} \\ dy &= \frac{dx}{x}, & \& \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \\ ddy &= \frac{-dx^2}{x^2}, & \& \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2} \\ d^3y &= \frac{2dx^3}{x^3}, & \& \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3} \\ d^4y &= \frac{-6dx^4}{x^4}, & \& \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4} \\ & & \& \text{c.} \end{aligned}$$

Atque si p fuerit quantitas algebraica, sitque $y = lp$, etiam si y non sit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipsius x .

185. • Expofita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis folis componuntur; vti ex fequentibus exemplis fiet perfpicuum.

I. Si fit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x} lx$.

II. Simili modo fi fit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x} (lx)^{n-1}$, unde, fi fit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque fi p fuerit functio quaecunque ipsius x , ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p} (lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia assignari poffit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum.

IV. Si fit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quaecunque ipsius x , per regulam factorum fupra datam erit $dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp$.

V. Si fit $y = x lx$; erit per eandem regulam $dy = dx lx + \frac{xdx}{x} = dx lx + dx$. VI.

VI. Si fit $y = x^m l x - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione secundum partes instituta, reperietur $d. x^m l x = m x^{m-1} dx l x + x^{m-1} dx$, & $d. \frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, vnde erit $dy = m x^{m-1} dx l x$.

VII. Si fit $y = x^m (l x)^n$, fiet $dy = m x^{m-1} dx (l x)^n + n x^{m-1} dx (l x)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, vti si fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$; vnde fiet $dy = \frac{dx}{x l x}$.

IX. Atque si fuerit $y = lllx$, si statuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{p l p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus substitutis habebitur $dy = \frac{dx}{x l x. llx}$.

186. Expofita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, seu eiusmodi potestates, quarum exponentes sint variables. Huiusmodi autem ipsius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inueniri possunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipsius a^x , ad quod inuestigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis sumendis $ly = x l a$. Sumantur iam differentialia, atque obtinebitur $\frac{dy}{y} = dx l a$; vnde fit $dy = y dx l a$, cum autem sit $y = a^x$, erit $dy = a^x dx l a$, quod est differentiale ipsius a^x . Simili mo-

modo, si sit p functio quaecunque ipsius x , huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dpla$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione exposita deduci potest. Sit enim proposita a^p , denotante p functionem quamcunque ipsius x , quae, posito $x+dx$ loco x , abeat in $p+dp$. Vnde si ponatur $y = a^p$, si x abeat in $x+dx$, erit $y+dy = a^{p+dp}$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Ostendimus autem supra, quamvis quantitatem exponentialem a^z per huiusmodi seriem exprimi $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} + \&c.$ vnde erit $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} + \&c.$, & $a^{dp} - 1 = dpla$, quia sequentes termini prae $dpla$ omnes evanescunt. Consequenter erit $dy = d: a^p = a^p dpla$. Quare quantitatis exponentialis a^p differentiale erit productum ex ipsa quantitate exponentiali, exponentis differentiali dp , & logarithmo quantitatis constantis a , quae ad exponentem variabilem est euecta.

188. Si igitur e sit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, vt sit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque si dx sumatur constans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod est differentiale secundum ipsius e^x . Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare si sit

$y =$

$$y = e^{nx}, \text{ erit } \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \text{ \& } \frac{d^2y}{dx^2} = n^2e^{nx}$$

$$\text{porroque } \frac{d^3y}{dx^3} = n^3e^{nx}; \frac{d^4y}{dx^4} = n^4e^{nx}; \text{ \&c.}$$

Vnde patet ipsius e^{nx} differentialia primum, secundum
& reliqua sequentia constituere progressionem geometri-
cam: eritque ergo differentiale ordinis m ipsius $e^{nx} = y$,

nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y dx^m}$ quantitas
constans n^m .

189. Si ipsa quantitas, quae eleuatur, fuerit varia-
bilis, eius differentiale simili modo inuestigabitur. Sint
 p & q functiones quaecunque ipsius x , ac proponatur
quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit

$$\log y = q \log p, \text{ quibus differentiat } \frac{dy}{y} = d q \log p + \frac{q dp}{p},$$

$$\text{vnde fit } dy = y d q \log p + \frac{y q dp}{p} = p^q d q \log p + q p^{q-1} dp,$$

ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale constat duobus mem-
bris, quorum prius $p^q d q \log p$ oritur, si quantitas proposita
 p^q ita differentietur, quasi p esset quantitas constans, so-
lusque exponens q variabilis: alterum vero membrum
 $q p^{q-1} dp$ oritur, si in quantitate proposita p^q exponens q
tanquam constans spectetur, solaque quantitas p , quasi
esset variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per
regulam generalem differentianti supra traditam inueniri
potuisset.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, utique $y + dy = (p + dp)^{q + dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resoluatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq) p^{q+dq-1} dp + \frac{(q + dq)(q + dq - 1)}{2} p^{q+dq-2} dp^2 + \&c.$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq) p^{q+dq-1} dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates inuoluunt, prae $(q + dq) p^{q+dq-1} dp$ euanescent. At est $p^{q+dq} - p^q = p^q (p^{dq} - 1) = p^q (1 + dq \log p + \frac{dq^2 (\log p)^2}{2} + \&c. - 1) = p^q dq \log p$. In altero vero termino $(q + dq) p^{q+dq-1} dp$, si loco $q + dq$ scribamus q , orietur $qp^{q-1} dp$, ideoque differentiale erit ut ante $dy = p^q dq \log p + qp^{q-1} dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium inuestigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, sit $p^q = e^{q \log p}$, utriusque enim logarithmus est idem $q \log p$; erit $y = e^{q \log p}$. Quare, cum nunc quantitas eleuata e sit constans, erit $dy = e^{q \log p} \left(dq \log p + \frac{q dp}{p} \right)$, uti ante ostendimus in regula §. 187. data. Restituatur igitur p^q loco $e^{q \log p}$, fietque

$$dy = p^q dq \log p + p^q q dp : p = p^q dq \log p + qp^{q-1} dp.$$

Si

Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dx lx + x^x dx$; atque hinc quoque eius vltiora differentialia definientur: reperietur enim:

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x \left(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2 \right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x \left((1 + lx)^3 + \frac{3(1 + lx)}{x} - \frac{1}{xx} \right)$$

&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatio-
ne formulae $e^x p$ originem habent; est autem

$$d. e^x p = e^x dp + e^x p dx = e^x (dp + p dx).$$

- I. Si fit $y = e^x x^n$; erit $dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx$
seu $dy = e^x dx (n x^{n-1} + x^n)$
- II. Si fit $y = e^x (x - 1)$
Erit $dy = e^x x dx$.
- III. Si fit $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$
Erit $dy = e^x x x dx$.
- IV. Si fit $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$
Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta in-

stitueretur. Sic si haec quantitas e^x differentiari debeat, statuatur $e^x = p$, vt sit $y = e^x = ep$, erit $dy = ep dp$; at est $dp = e^x dx$, vnde si fuerit

$$y = e^x; \text{ erit } dy = e^x dx,$$

$$\text{atque si sit } y = e^{ex}; \text{ erit } dy = e^{ex} e dx.$$

Quod si vero fuerit $y = p^q$, statuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dz lp + z p^{z-1} dp$, at $dz = q^r dr lq + r q^{r-1} dq$, vnde $dy = p^z q^r dr lp.lq + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp:p$.

Quare si sit :

$$y = p^q, \text{ erit } dy = p^q q^r \left(dr lp.lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inueniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem consideratio arcuum circularium nos supra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium constanter ponimus vnitati aequalem, propositus arcus, cuius sinus sit $= x$, quem arcum hoc modo exprimamus A sin x ; huiusque arcus differentiale inuestigemus, seu incrementum quod accipit, si sinus x differentiali suo dx au-

augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praestari poterit, quia in introductione ostendimus hanc expressionem $A \sin x$ reduci posse ad hanc logarithmicam:

$\frac{1}{V-1} l(V(1-xx)+xV-1)$. Posito ergo $y = A \sin x$, erit quo-

que $y = \frac{1}{V-1} l(V(1-xx)+xV-1)$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{V-1} \left(\frac{-x dx}{V(1-xx)} + dx V-1 \right)}{V(1-xx)+xV-1} = \frac{dx(xV-1+V(1-xx))}{(V(1-xx)+xV-1)V(1-xx)},$$

vnde fit $dy = \frac{dx}{V(1-xx)}$.

195. Istud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius sine logarithmorum subsidio inueniri potest. Si enim sit $y = A \sin x$, erit x sinus arcus y , seu $x = \sin y$. Cum igitur, posito $x + dx$ loco x , abeat y in $y + dy$, fiet $x + dx = \sin(y + dy)$. At quia est

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \text{ erit}$$

$$\sin(y+dy) = \sin y \cos dy + \cos y \sin dy;$$

arcus autem euanescentis dy sinus ipsi illi arcui dy , eiusque cosinus sinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$$\sin(y+dy) = \sin y + dy \cos y, \text{ ideoque } x + dx = \sin y + dy \cos y.$$

Quia vero est

$\sin y = x$, erit cosinus ipsius y seu $\cos y = V(1-xx)$, quibus valoribus substitutis, erit $dx = dy V(1-xx)$,

ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{V(1-xx)}$.

Arcus ergo, cuius sinus proponitur, differentiale aequatur differentiali sinus per cosinum diuiso.

196. Cum igitur, si p fuerit functio quaecunque ipsius x , atque y denotet arcum, cuius sinus est $= p$, seu $y = A \sin p$, sit huius arcus differentiale $dy = \frac{dp}{V(1-pp)}$, vbi $V(1-pp)$ exprimit cosinum eiusdem arcus, inueniri quoque poterit differentiale arcus, cuius cosinus proponitur. Sit enim $y = A \cos x$, erit eiusdem arcus sinus $= V(1-xx)$, ideoque $y = A \sin V(1-xx)$. Facto ergo $p = V(1-xx)$, erit $dp = \frac{-x dx}{V(1-xx)}$, & $V(1-pp) = x$; vnde fiet $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$.

Arcus ergo, cuius cosinus proponitur, differentiale aequatur differentiali cosinus negative sumto, atque per sinum eiusdem arcus diuiso. Quod etiam hoc modo ostendi potest:

si sit $y = A \cos x$, ponatur $z = A \sin x$, erit $dz = \frac{dx}{V(1-xx)}$; at arcus $y + z$ simul sumti dant arcum constantem 90° , eritque $y + z = \text{constans}$ ideoque $dy + dz = 0$, seu $dy = -dz$; vnde fit $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$, vt ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita vt sit $y = A \tan x$. Arcus autem cuius tangens est x , sinus erit $= \frac{x}{V(1+xx)}$, & cosinus $= \frac{1}{V(1+xx)}$.

Posito ergo $\frac{x}{V(1+xx)} = p$, vt sit $V(1-pp) = \frac{1}{V(1+xx)}$,
fiet

fiet $y = A \sin p$: vnde per regulam modo datam erit
 $dy = \frac{dx}{V(1-pp)}$. At, ob $p = \frac{x}{V(1+xx)}$, erit $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$;
 quibus valoribus substitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. Arcus
 ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur diffe-
 rentiali tangens per quadratum secantis diuiso. Est enim
 $V(1+xx)$ secans, si x sit tangens.

198. Simili modo si proponatur arcus, cuius cotan-
 gens datur, ita vt sit $y = A \cot x$; quia eiusdem arcus
 tangens est $= \frac{1}{x}$, posito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = A \tan p$, ac
 propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc sit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta
 substitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod est differentiale co-
 tangens negativae sumtum, atque per quadratum cosecan-
 tis diuisum. Porro si proponatur $y = A \sec x$, quia est
 $y = A \cos \frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xxV(1-\frac{1}{xx})} = \frac{dx}{xV(xx-1)}$.

Atque, si sit $y = A \operatorname{cosec} x$, erit $y = A \sin \frac{1}{x}$, ideoque
 $dy = \frac{-dx}{xV(xx-1)}$. Saepe etiam sinus versus occurrit, ita
 si proponatur $y = A \operatorname{fv} x$, quia est $y = A \cos(1-x)$, huius-
 que arcus sinus est $= V(2x-xx)$, fiet $dy = \frac{dx}{V(2x-xx)}$.

199. Quamquam ergo arcus, cuius sinus, vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel denique sinus versus datur, est quantitas transcendens, tamen eius differentiale, si per dx diuidatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia secunda, tertia, quarta &c. si per potestates ipsius dx conuenientes diuidantur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus sequentia exempla.

I. Si fit $y = A \sin 2x\sqrt{1-xx}$, ponatur $p = 2x\sqrt{1-xx}$, ut fit $y = A \sin p$, eritque $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$. At est $dp = 2dx\sqrt{1-xx} - \frac{2xxdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}}$, & $\sqrt{1-pp} = 1-2xx$, quibus valoribus substitutis, erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\sqrt{1-xx}$ fit sinus arcus dupli, dum x est sinus simpli, erit ergo $y = 2A \sin x$, ideoque $dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}$.

II. Si fit $y = A \sin \frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-2xdx}{(1+xx)^2}$ & $\sqrt{1-pp} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum fit $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, erit $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III.

III. Si fit $y = A \sin V \frac{1-x}{2}$, ponatur $V \frac{1-x}{2} = p$,
 erit $V(1+pp) = V \frac{1+x}{2}$, & $dp = \frac{-dx}{2V(1-x)}$, unde
 fit $dy = \frac{dp}{V(1+pp)} = \frac{-dx}{2V(1-x)}$.

IV. Si fit $y = A \tan \frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$,
 erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare
 cum fit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197),
 erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si fit $y = A \tan \frac{V(1+xx)-1}{x}$, posito
 $p = \frac{V(1+xx)-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2V(1+xx)}{xx}$, &
 $1+pp = \frac{2+2xx-2V(1+xx)}{xx} = \frac{2(V(1+xx)-1)V(1+xx)}{xx}$.

Atqui $dp = \frac{-dx}{xxV(1+xx)} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(V(1+xx)-1)}{xxV(1+xx)}$.

Quare cum fit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod

etiam inde intelligitur, quod sit $A \tan \frac{V(1+xx)-1}{x}$
 $= \frac{1}{2} A \tan x$.

VI. Si sit $y = e^{A \sin x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{A \sin x} \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

Hoc ergo modo omnes functiones ipsius x , in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx diuisa sunt quantitates algebraicae, eorum differentialia secunda & sequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione exposuimus, inuenientur. Sit $y = A \sin x$, quia est $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$, cuius differentiale dabit valorem pro $\frac{ddy}{dx^2}$, si quidem dx fumatur constans: vnde differentialia ipsius y cuiusuis ordinis ita se habebunt.

Si sit $y = A \sin x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}; \text{ \& sumto } dx \text{ constante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x^2+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

d^5y

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^6 y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

vnde concludimus vt supra §. 177 fore generaliter :

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3 \dots n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} \right. \\ \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} x^{n-6} + \&c. \right)$$

201. Superfunt quantitates, quae ex harum inuersione nascuntur, scilicet sinus, tangentesue arcuum datorum, quas quomodo differentiari oporteat, ostendamus. Sit igitur x arcus circuli, & $\sin x$ denotet eius finum, cuius differentiale inuestigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x + dx$ loco x , quia y abit in $y + dy$, erit $y + dy = \sin(x + dx)$, & $dy = \sin(x + dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x + dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$, arque cum sit, vti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

Y 2

erit

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x , erit simili modo $d. \sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x , cuius differentiale inuestigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x+dx$ loco x , fiet $y+dy = \cos(x+dx)$. Est vero $\cos(x+dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx$, & quia ut modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y+dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = -dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negative sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x , erit $d. \cos p = -dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{V(1-yy)}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = V(1-yy)$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, ut ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $V(1-yy) = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{V(1-yy)} = \frac{-dy}{\sin p}$, unde fit ut ante $dy = -dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \tan x$, erit $dy = \tan(x+dx) - \tan x$; at est $\tan(x+dx) = \frac{\tan x + \tan dx}{1 - \tan x \cdot \tan dx}$,
a qua

a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit

$$dy = \frac{\text{tang } dx (1 + \text{tang } x. \text{tang } x)}{1 - \text{tang } x. \text{tang } dx}.$$

Verum arcus euanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque $\text{tang } dx = dx$, & denominator $1 - dx \text{ tang } x$, abit in unitatem: quocirca fiet: $dy = dx (1 + \text{tang } x^2)$. Est

$$\text{vero } 1 + \text{tang } x^2 = \sec. x^2 = \frac{1}{\cos x^2}, \text{ denotante } \cos x^2$$

quadratum cosinus ipsius x : consequenter si fuerit $y = \text{tang } x$, erit $dy = dx \sec x^2 = \frac{dx}{\cos x^2}$. Quod diffe-

rentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inueniri potest; cum enim sit $\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}$, erit

$$dy = \frac{dx \cos x. \cos x + dx \sin x. \sin x}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2},$$

ob $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale inuenitur. Cum sit $y = \text{tang } x$, erit $x = \text{Atang } y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. At cum sit $y = \text{tang } x$, erit

$$\sqrt{1 + yy} = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ ideoque } dx = dy \cos x^2, \text{ \&}$$

$dy = \frac{dx}{\cos x^2}$, vt ante. Tangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diuiso per quadratum cosinus eiusdem arcus. Simili modo si proponatur

Y 3

y =

$y = \cot x$, fiet $x = A \cot y$, & $dx = \frac{-dy}{1+y^2}$. At vero erit
 $V(1+y^2) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, vnde habebitur $dx = -dy \sin x^2$,
 & $dy = \frac{-dx}{\sin x^2}$. Cotangentis ergo cuiusvis arcus differen-
 tiale aequatur differentiali arcus negativae sumto ac per qua-
 dratum sinus eiusdem arcus diviso. Vel quia est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
 fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx \sin x^2 - dx \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2},$$

vti modo inuenimus.

205. Si proponatur secans arcus, vt sit $y = \sec x$,
 quia erit $y = \frac{1}{\cos x}$, erit $dy = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \tan x \sec x$.

Simili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec} x$, ob $y = \frac{1}{\sin x}$, erit

$$dy = \frac{-dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec} x, \text{ pro quibus casibus}$$

peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus
 versus arcus proponatur $y = \operatorname{fv} x$, quia est $y = 1 - \cos x$,
 erit $dy = dx \sin x$. Omnes ergo casus, quibus linea quae-
 piam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per
 sinum cosinumue exprimi potest, sine difficultate diffe-
 rentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia pri-
 ma, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas
 inuenientur. Ponamus esse $y = \sin x$ & $z = \cos x$, atque
 dx esse constans: erit vt sequitur:

$$y =$$

$y = \sin x$	$z = \cos x$
$dy = dx \cos x$	$dz = -dx \sin x$
$ddy = -dx^2 \sin x$	$ddz = -dx^2 \cos x$
$d^3y = -dx^3 \cos x$	$d^3z = dx^3 \sin x$
$d^4y = dx^4 \sin x$	$d^4z = dx^4 \cos x$
&c.	&c.

206. Simili modo inueniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x . Sit enim

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, & ponatur dx constans, erit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin x}{\cos^5 x} - \frac{8 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos^6 x} - \frac{120}{\cos^4 x} + \frac{16}{\cos^2 x}$$

d^6y

$$\frac{d^6 y}{dx^6} = \frac{720 \sin x}{\cos x^7} - \frac{480 \sin x}{\cos x^5} + \frac{32 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^7 y}{dx^7} = \frac{5040}{\cos x^8} - \frac{6720}{\cos x^6} + \frac{2016}{\cos x^4} - \frac{64}{\cos x^2}$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas sinus vel cosinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, vti ex sequentibus exemplis videre licet.

I. Si fit $y = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

Erit $dy = 2 dx \cos x^2 - 2 dx \sin x^2 = 2 dx \cos 2x$.

II. Si fit $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, vel $y = \sin \frac{1}{2} x$

Erit $dy = \frac{dx \sin x}{2 \sqrt{2(1 - \cos x)}}$. Cum autem sit

$\sqrt{2(1 - \cos x)} = 2 \sin \frac{1}{2} x$, & $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x$;

fiet $dy = \frac{1}{2} dx \cdot \cos \frac{1}{2} x$, vti ex forma $y = \sin \frac{1}{2} x$ immediate sequitur.

III. Si fit $y = \cos l \frac{1}{x}$; erit, posito $l \frac{1}{x} = p$,

$y = \cos p$, & $dy = -dp \sin p$. At, ob $p = lx - lx$,

erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x} \sin l \frac{1}{x}$.

IV. Si fit $y = e^{\sin x}$; erit $dy = e^{\sin x} dx \cos x$.

V. Si

V. Si fit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = \frac{e^{\frac{-n}{\cos x}} n dx \sin x}{\cos^2 x}$.

VI. Si fit $y = l(1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}})$; ponatur
 $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1 - \sqrt{1 - p})$, erit

$$dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{1 - p})\sqrt{1 - p}}. \text{ At est } dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n dx \cos x}{\sin^2 x}.$$

Quo valore substituto prodibit

$$dy = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n dx \cos x}{2 \sin^2 x (1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}}) \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}}}$$



CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESUE VARIABLES INVOLVENTIUM.

208.

Si duae pluresue quantitates variables x , y , z , a se inuicem prorsus non pendeant, fieri potest, ut etiam si omnes sint variables, tamen dum una crescit decrescitue, reliquae maneant inuariatae: quia enim nullum nexum inter se habere ponuntur, immutatio vnus reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendent a differentiali ipsius x ; ideoque dum x differentiali suo dx augetur, quantitates y & z , vel eadem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari possunt. Quod si igitur differentiale quantitatis x statuatur dx , reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio nostro vel prorsus nihil, vel infinite parua ad dx quamuis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipsius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non spectatur, significare solent, hocque casu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Siue autem y & z pendeant ab x siue secus, ratio differentiationis; quam hic spectamus, eodem redit. Quærimus enim

enim functionis, quae ex pluribus variabilibus x , y , & z utouque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variables x , y , & z suis differentialibus dx , dy , & dz crescunt. Ad hoc ergo inueniendum in functione proposita ubique loco variabilium quantatum x , y , z scribatur respectiue $x+dx$; $y+dy$; $z+dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur, quemadmodum ex natura differentialium luculenter constat.

210. Sit X functio ipsius x , eiusque differentiale, seu augmentum, dum x differenti suo dx crescit, sit $=Pdx$. Deinde sit Y functio ipsius y , eiusque differentiale $=Qdy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y+dy$; atque Z sit functio ipsius z , eiusque differentiale sit $=Rdz$, quae differentialia Pdx , Qdy , Rdz ex natura functionum X , Y & Z ope praeceptorum supra datorum inueniri poterunt. Quod si ergo proposita fuerit haec quantitas $X+Y+Z$, quae utique erit functio trium variabilium x , y , & z , eius differentiale erit $=Pdx+Qdy+Rdz$. Vtrum autem haec tria differentialia sint inter se homogenea nec ne? perinde est. Termini enim qui continent potestates ipsius dx prae Pdx aequae euanescent, ac si reliqua membra Qdy & Rdz abessent, similique est ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z sunt neglecti.

211. Retineant X , Y & Z easdem significationes, sitque proposita ista functio XYZ ipsarum x , y & z , cuius

ius differentiale inuestigari oporteat. Quoniam, si $x + dx$ loco x ; $y + dy$ loco y , & $z + dz$ loco z scribatur, abit X in $X + Pdx$; Y in $Y + Qdy$; & Z in $Z + Rdz$, ipsa functio proposita XYZ abibit in

$$\begin{aligned} & (X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz) \\ &= XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz \\ &+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz. \end{aligned}$$

At quia dx , dy , & dz sunt infinite parua, siue inter se sint homogenea siue non; vltimus terminus prae uno quoque praecedentium euanescit. Deinde terminus $ZPQdxdy$ tam prae $YZPdx$ quam prae $XZQdy$ euanescit; atque ob eandem rationem termini $YPRdxdz$ & $XQRdydz$ euanescent. Ablata ergo ipsa functione proposita XYZ , erit eius differentiale $= YZPdx + XZQdy + XYRdz$.

212. Exempla haec functionum trium variabilium x , y , & z , quibus pro lubitu quisque plura adicere potest, sufficiunt ad ostendendum, si functio quaecunque trium variabilium x , y , & z proponatur, vtcunque etiam hae variables inter se fuerint permixtae, eius differentiale semper huiusmodi formam esse habiturum $pdx + qdy + rdz$: vbi p , q , & r futurae sint singulae functiones, vel omnium trium variabilium x , y , & z , vel binarum, vel vnus tantum, prout ratio compositionis, qua functio proposita ex variabilibus x , y , & z atque constantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, si proponatur functio quatuor pluriumue variabilium

lium x, y, z , & v , eius differentiale semper huius modi formam habebit $pdx + qdy + rdz + s dv$.

213. Consideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y , quae sit $=V$, cuius ergo differentiale ita se habebit, ut sit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y assumeretur constans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale esset pdx : sin autem x statueretur constans, ut esset $dx = 0$, solaue y maneret variabilis, tum ipsius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur utraque quantitate x & y variabili posita sit $dV = pdx + qdy$, ista regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y inuolvente resultabit: Ponatur primum sola x variabilis, altera vero y tanquam constans tractetur, & quaeratur ipsius V differentiale, quod sit $= pdx$. Deinde ponatur sola quantitas y variabilis, altera x pro constanti habita, & quaeratur ipsius V differentiale, quod sit $= qdy$. Quibus factis, posita utraque quantitate x & y variabili, fiet $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y , & z , quae sit $=V$, differentiale huiusmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifestum est, si sola quantitas x fuisset variabilis posita, reliquae vero y & z constantes mansissent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiiisset ipsius V differentiale $= pdx$. Pari modo inueniretur differentiale ipsius $V = qdy$, si x & z essent constantes solaue y poneretur variabilis; atque si x & y tanquam constantes tractarentur solaue z statueretur variabilis, pro-

direct differentiale ipsius $V = r dz$. Quare ad functionem trium pluriumue variabilium differentiandam, consideretur seorsim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quasi reliquae omnes essent constantes; tum singula haec differentialia, quae ex singulis quantitatibus variabilibus sunt inuenta, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaesitum functionis propositae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium inuenimus, continetur demonstratio regulae supra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque vnicam variabilem complectens differentiri potest. Si enim pro singulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diuersae collocentur, functio speciem induet functionis totidem diuersarum variabilium, atque adeo modo hic praescripto differentiabitur, successive vnamquamque partem, quasi sola esset variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex singulis partibus oriuntur, in vnam summam coniiciendo: quae summa erit differentiale quaesitum, postquam pro singulis litteris valores fuerint restituti. Haec ergo regula latissime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Vnde eius vsus per vniuersum calculum differentialem est amplissimus.

216. Inuenta ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiri possunt, eius vsus in nonnullis exemplis ostendisse iuuabit.

I. Si

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = xdy + ydx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{V(aa - xx)}$; erit

$$dV = \frac{dy}{V(aa - xx)} + \frac{yx dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

IV. Si fuerit $V = (ax + by + c)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n$;

erit

$$dV = m(ax + by + c)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n (a dx + b dy) \\ + n(ax + by + c)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1} (\delta dx + \epsilon dy),$$

sive

$$dV = (ax + by + c)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1} \text{ in}$$

$$\left(\frac{ma\delta}{na\delta} x dx + \frac{m\epsilon\delta}{n\epsilon\delta} x dy + \frac{m\alpha\epsilon}{n\epsilon\delta} y dx \right. \\ \left. + \frac{m\epsilon\epsilon}{n\epsilon\epsilon} y dy + \frac{m\alpha\zeta}{n\gamma\delta} dx + \frac{m\epsilon\zeta}{n\gamma\epsilon} dy \right).$$

V. Si fuerit $V = ylx$; erit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Si fuerit $V = x^y$; erit $dV = yx^{y-1} dx + x^y dylx$.

VII. Si fuerit $V = A \text{tang} \frac{y}{x}$; erit $dV = \frac{x dy - y dx}{xx + yy}$.

VIII. Si fuerit $V = \sin x \cos y$; erit

$$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y.$$

IX.

IX. Si fuerit $V = \frac{e^{xy}}{V(xx+yy)}$, crit

$$dV = \frac{e^{xy} dy}{V(xx+yy)} + \frac{e^{xy}(xx dy - yy dx)}{(xx+yy)V(xx+yy)}.$$

X. Si fuerit $V = e^x A \sin \frac{x - V(xx-yy)}{x + V(xx-yy)}$,

$$\begin{aligned} \text{reperietur } dV &= e^x dx A \sin \frac{x - V(xx-yy)}{x + V(xx-yy)} \\ &+ e^x \frac{xy dy - yy dx}{(x + V(xx-yy))(xx-yy)^{\frac{3}{2}} Vx}. \end{aligned}$$

217. Quoniam vidimus, si V fuerit functio quacunque binarum variabilium x & y , eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV = P dx + Q dy$, in qua sint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: sequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo etiam a se inuicem pendere, propterea quod utraque ab eadem functione V pendet. Quicumque igitur sit iste nexus inter quantitates finitas P & Q , quem deinceps inuestigabimus, perspicuum est, non omnes formulas differentiales huiusmodi $P dx + Q dy$, in quibus P & Q pro lubitu sint ex x & y formatae, posse esse differentialia cuiuspiam functionis finitae V ipsarum x & y . Nisi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiusmodi differentiale $P dx + Q dy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque vicissim integrale non habebit.

218. In integratione igitur plurimum interest nosse hanc relationem inter quantitates P & Q , ut differentialia, quae reuera ex differentiatione functionis cuiuspiam finitae sunt orta, dignosci queant ab iis, quae ad libitum sunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quoniam autem hic nondum integrationis negotium suscipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitus inspiciendam conueniet hanc relationem inuestigari; quippe cuius cognitio non solum ad calculum integrelem, ad quem hic viam paramus, est maxime necessaria, sed etiam in ipso calculo differentiali insignem lucem accendit. Primum igitur patet, si V sit functio duarum variabilium x & y , in eius differentiali $Pdx + Qdy$ utriusque differentiale dx & dy inesse oportere. Neque ergo potest esse $P = 0$ neque $Q = 0$. Hinc si P fuerit functio ipsarum x & y , formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit esse differentiale, seu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale sit Pdx .

219. Sic nulla datur quantitas finita V siue algebraica siue transcendens, cuius differentiale sit $yx dx$, si quidem sit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiusmodi quantitatem finitam V , quia y in eius differentiale ingreditur, necesse est, ut y quoque in ipsa quantitate V insit; verum si V contineret y , ob variabilitatem ipsius y necessario quoque in differentiali ipsius V differentiale dy inesse deberet. Quod tamen cum non adsit, fieri nequit, ut differentiale $yx dx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione sit ortum. Cum

igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit ϕ , & P contineat y , differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ inuestigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y : a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione V quantitas x prorsus euanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t . Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdx$, vbique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$, quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est vt sit.

$$P + Qt = 0; \text{ ideoque } Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}, \text{ seu erit}$$

$Px + Qy = 0$, vnde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t , hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y . Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y .

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y , quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale

$$dV =$$

$dV = Pdx + Qdy$, semper ita erit comparatum, ut sit $Px + Qy = 0$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y , resultabit quantitas $= 0$: uti in his exemplis usu venire patet:

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy , erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{V(xx - yy)}$, erit $dV = -\frac{yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde fit $\frac{-yyx + yxy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + V(xx + yy)}{-y + V(xx + yy)}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y ; erit $dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(V(xx + yy) - y)^2 V(xx + yy)}$, quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$; erit $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A \sin \frac{V(x-y)}{V(x+y)}$, erit $dV = \frac{ydx - xdy}{(x+y)V2y(x-y)}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y . Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n , existente T functione ipsius t , sitque

$$dT = \Theta dt, \text{ erit } dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1} dx.$$

Quodsi ergo statuamus:

$$dV = Pdx + Qdy, \text{ ob } dy = tdx + xdt,$$

$$\text{fiet } dV = Pdx + Qt dx + Qx dt:$$

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \text{ ob } V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, ut si altera sit cognita, altera facile inueniatur. Quia porro est $Qx = x^n \Theta$, erit Qx , ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y .

223. Si ergo in differentiali cuiusvis functionis homogeneae ipsarum x & y , loco dx & dy , ponatur x & y , quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si fit $V = V(xx + yy)$; erit $n = 1$, & ob

$$dV = \frac{x dx + y dy}{V(xx + yy)}, \text{ fiet } \frac{xx + yy}{V(xx + yy)} = V = V(xx + yy).$$

II. Si

II. Si fit $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3 dy - 3yyx dy + 3yx dx - 2x^3 dx + y^3 dx - x^3 dy}{(y - x)^2}.$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y - x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V.$$

III. Si fit $V = \frac{1}{(yy + xx)^2}$, erit $n = -4$, atque

$$dV = -\frac{4y dy - 4x dx}{(yy + xx)^3}.$$

Quae formula positis x & y

$$\text{loco } dx \text{ \& } dy \text{ abit in } -\frac{4yy - 4xx}{(yy + xx)^3} = -4V.$$

IV. Si fit $V = x \log \frac{y+x}{y-x}$; erit $n = 2$, atque

$$dV = 2x dx \log \frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(y dx - x dy)}{yy - xx}, \text{ facta autem}$$

$$\text{memorata substitutione oritur } 2xx \log \frac{y+x}{y-x} = 2V.$$

224. Similis proprietas observabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium: fit ergo V functio quantitatum x, y, z , quae coniunctim vbique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $Pdx + Qdy + Rdz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, vt fit $dy = tdx + xdt$, & $dz = sdx + xds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n , existente U

functione binarum variabilium t & s ; hinc ergo si statuatur

$$dU = p dt + q ds, \quad \text{fiet}$$

$$dV = x^n p dt + x^n q ds + n U x^{n-1} dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = P dx + Q t dx + Q x dt + R s dx + R x ds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Q t + R s = n U x^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

vnde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quocunque plures variables extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quocunque variabilium x, y, z, v , &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, vt si loco differentialium dx, dy, dz, dv , &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v , &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea vnicae tantum variabilis x : Hoc enim casu erit V potestas ipsius x , puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia datur functio ipsius x , in qua x vbique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n . Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx , atque prodibit nax^n , hoc est nV . Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur; cum in calculo integrali maximam afferat vtilitatem.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q , quae differentiale $Pdx + Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituent, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y ; atque ponamus V abire in R , si loco x ponatur $x + dx$; posito autem $y + dy$ loco y abeat V in S : quodsi autem simul $x + dx$ loco x , & $y + dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^1 . Cum itaque R oriatur ex V , posito $x + dx$ loco x , manifestum est si ulterius in R ponatur $y + dy$ loco y , tum prodire V^1 ; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x + dx$ loco x , & $y + dy$ loco y . Simili modo si in S ponatur $x + dx$ loco x , quia S iam orta est ex V posito $y + dy$ loco y , denuo prodibit V^1 ; vti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^1	x	$x + dx$
		y	$y + dy$
R	V^1	y	$y + dy$
S	V^1	x	$x + dx$

227. Si igitur V ita differentietur, ut tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia posito $x + dx$ loco x , functio V abit in R , eius differentiale erit $= R - V$; at ex forma $dV = Pdx + Qdy$, sequitur idem differentiale fore $= Pdx$, unde erit $R - V = Pdx$. Quod si iam loco y ponatur $y + dy$, x vero tanquam constans tractetur, quia R abit in V^1 & V in S , quantitas $R - V$ abibit in $V^1 - S$; ideoque ipsius $R - V = Pdx$ differentiale, quod oritur si sola y variabilis assumatur, erit $V^1 - R - S + V$. Simili modo, cum posito $y + dy$ loco y , abeat V in S , erit $S - V$ differentiale ipsius V posita sola y variabili, eritque propterea $S - V = Qdy$; nunc quia loco x posito $x + dx$, transiit S in V^1 & V in R , quantitas $S - V$ abibit in $V^1 - R$; atque ipsius $S - V = Qdy$ differentiale, quod oritur si sola x variabilis statuatur, erit $= V^1 - R - S + V$, quod prorsus congruit cum differentiali ante inuento.

228. Ex hac conuenientia deducitur sequens conclusio: Si functionis V cuiuscunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV = Pdx + Qdy$, tum differentiale ipsius Pdx , quod oritur si sola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam constans tractetur, aequale erit differentiali ipsius Qdy , quod oritur si sola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur. Si scilicet posita sola y variabili fuerit $dP = Zdy$ erit differentiale ipsius Pdx praescripto modo sumtum $= Zdx dy$; atque posita sola x variabili erit quoque $dQ = Zdx$; sic enim differentiale ipsius Qdy praescripto modo

modo sumtum fiet quoque $\equiv Z dx dy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc consistit, ut differentiale ipsius $P dx$ posito x constante aequale sit differentiali ipsius $Q dy$ posito y constante.

229. Ista insignis proprietas clarius perspicietur, si eam nonnullis exemplis illustremus.

I. Sit igitur $V = yx$; erit $dV = y dx + x dy$, ideoque $P = y$ & $Q = x$; vnde posito x constante erit $d.P dx = dx dy$, & posito y constante erit $d.Q dy = dx dy$, sicque haec duo differentia inter se aequantur.

II. Sit $V = V(xx + 2xy)$; erit $dV = \frac{xdx + ydx + ydy}{V(xx + 2xy)}$, ideoque $P = \frac{x+y}{V(xx + 2xy)}$, & $Q = \frac{x}{V(xx + 2xy)}$, vnde posito x constante erit $d.P dx = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Q dy = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin Ay + y \sin Ax$; eritque $dV = dx \sin Ay + x dy \cos y + dy \sin Ax + y dx \cos x$.

Quare erit

$$P dx = dx \sin Ay + y dx \cos x,$$

$$\& \quad Q dy = dy \sin Ax + x dy \cos y.$$

B b

Po.

Posito ergo x constante erit

$$d.Pdx = dx dy \cos y + dx dy \cos x,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = dx dy \cos y + dx dy \cos x.$$

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dylx + yx^{y-1}dx$,
atque

$$Pdx = yx^{y-1}dx, \quad \& \quad Qdy = x^y dylx.$$

Quamobrem posito x constante habebitur

$$d.Pdx = x^{y-1}dx dy + yx^{y-1}dx dylx,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = yx^{y-1}dx dylx + x^{y-1}dx dy.$$

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, unde eximia omnium functionum, quae duas variables inuoluunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inuerso functio V primum posita sola y variabili differentietur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentietur: utroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Z dx dy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx ; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy , horum differen-

tia-

tialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstrauiamus. Caeterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§. 227) allato.

231. Relatio inter P & Q , si $Pdx + Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y , differentientur ambae posita vtraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$

fit $dP = pdx + rdy$

& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit

$$dP = rdy, \quad \& \quad d.Pdx = rxdy.$$

Deinde posito y constante erit

$$dQ = qdx, \quad \& \quad d.Qdy = qdxdy.$$

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita inuicem connectuntur, vt si ambae differentientur, vti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Breuitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, vt r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, quae scriptura designatur P ita differentiari, vt sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy diuidatur: sic enim prodibit quantitas finita r . Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ quantitatem

finitam q , quia hac ratione indicatur functionem Q sola x posita variabili differentiari, tumque differentiale per dx diuidi debere.

232. Utamur ergo hoc scribendi modo, etiam si alias ambiguitatem afferre possit, quae tamen hic per clausulas euitatur, ut ambages in describendis differentiandi conditionibus euitemus, sicque breuiter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, ut dicamus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi scilicet fractionibus denominator praeter propriam significationem, qua numerator per eum diuidi debet, indicat numeratoris differentiale ita esse capiendum, ut ea sola quantitas cuius differentiale denominatorem constituit, tanquam variabilis spectetur. Hoc enim modo per diuisionem differentialia prorsus ex calculo egredientur, istaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praesenti casu erunt inter se aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, ut sit $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, si quidem ut monitum est, differentiatio numeratoris per denominatorem restringatur.

233. Consentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis inesse ostendimus. Sit enim V functio homogenea n dimensionum.

fionum ipsarum x & y , ponaturque $dV = Pdx + Qdy$,
atque demonstrauius fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}. \text{ Sit } dP = pdx + rdy;$$

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, cui aequale esse $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita ostendetur. Differentietur Q posita sola x variabili, & quia

$$\text{in hac hypothesi est } dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y},$$

$$\text{fiet } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}, \text{ debeatque esse}$$

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r \text{ seu } (n-1)P = px + ry.$$

Quae aequalitas inde fit perspicua, quod P sit functio homogenea $n-1$ dimensionum ipsarum x & y , unde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet esse comparatum, ut sit $(n-1)P = px + ry$.

234. Ista proprietas, quod sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem esse ostendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumue variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x , y , & z , ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod si igitur in hac differentiatione z tanquam constans tractaretur, foret utique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem casu per

antecedentia debet esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde si quantitas y constans assumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique posito x constante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P , Q , & R ita a se inuicem pendent, ut fit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Sequitur hinc ista functionum, quae tres pluresue variables inuoluunt, proprietas analogae ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio, quaecunque trium variabilium x , y , & z , eaque continuo ter differentietur, ita ut primum una quantitatium, puta x , sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y , atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Zdx dy dz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x , y , & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Zdx dy dz$ peruenietur, quoniam ordo quantitatium x , y , & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum

rum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, vtcunque ordo quantitatum x , y , & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P , Q , & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata, ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$

$$dQ = sdx + qdy + udz$$

$$dR = tdy + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx ; quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdx dy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dx dy dz$ fuerit diuisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variables

hoc ordine y , x , z , atque prima differentiatio dabit Qdy , secunda $sdx dy$, & tertia (facta diuisione per $dx dy dz$)

dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ vt ante. Disponantur variables hoc ordine

z , y , x , ac prima differentiatio dabit Rdz secunda $udy dz$, tertia vera post diuisionem per $dx dy dz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

At cum posito y constante sit $dQ = sdx + udz$; erit

$$\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right), \text{ vti pariter est demonstratum.}$$

237. Ponamus esse $V = \frac{xyz}{aa - zz}$; hancque functionum toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari potest:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
posito variabili	folo x	folo y	folo z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdx dy dz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	folo x	folo z	folo y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyz dx dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xz dx dy dz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	folo y	folo x	folo z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xxdx dy dz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	folo y	folo z	folo x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxz dy dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xxdx dy dz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	folo z	folo x	folo y
	$\frac{2xxyz dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xyz dx dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xxdx dy dz}{(aa - zz)^2}$
posito variabili	folo z	folo y	folo x
	$\frac{2xxyz dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{2xxz dy dz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xxdx dy dz}{(aa - zz)^2}$

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variables fuerint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4xxdx dy dz}{(aa - zz)^2}$. 238.

238. Vti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est peruentum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus; quae secunda differentiatio suppeditauit. In iis scilicet expressio quacuis bis occurrit; unde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales; atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dx dy dz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quocunque variabilium x, y, z, v, u , &c. eaque successive aliquoties differentietur, ut semper vnica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perueniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Z dx dy$, dum in altera sola x , in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est vtrā prius, posteriusue sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Z dx dy dz$; atque viginti quatuor variis modis peruenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Z dx dy dz dv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita leui attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, ut non solum has proprietates ipsi diligen-

ter meditentur, earumque veritatem scrutentur, sed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto sibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos postmodum facilius percipere queant. Neque vero solum tyrones, sed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam sunt imbuti, ad hoc sunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyseos partem hoc argumentum penitus praetermitti solet. Plerumque enim Auctores solas differentiâtionis regulas praescripserunt; earumque usum in Geometria sublimiori ostendisse fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquisierunt; unde tamen maxima subsidia in calculum integralem redundant. Quam ob causam hoc argumentum fere novum in isto Capite fusius persequi visum est, quo simul via ad integrationes alias difficiliore pararetur, atque negotium postea suscipiendum subleuaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresue variables inuoluentium gaudent, facile poterimus dignoscere, utrum formula differentialis proposita, in qua occurrunt duae pluresue variables, sit orta ex differentiâtionem cuiuspiam functionis finitae an secus? Si enim in formula $Pdx + Qdy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam existere functionem ipsarum x & y , cuius differentiale sit $= Pdx + Qdy$: neque ergo infra in calculo integrali huiusmodi formulae integrale indagari potest. Sic

¶¶¶¶

cum in $yxdx + xxdy$ requisita conditio non adsit, nulla datur functio, cuius differentiale est $= yxdx + xxdy$.

Vtrum autem semper, quoties est $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, formula ex differentiatione cuiuspiam functionis fit orta? quaestio est, quae demum ex integrationis principiis solide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali proposita tres pluresue infinitae variables, uti $Pdx + Qdy + Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxisse omnino nequit, nisi tres istae conditiones in ea locum habeant, ut fit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Quarum conditionum, si una tantum desit, certo affirmare debemus, nullam extare functionum ipsarum x , y , & z , cuius differentiale sit $Pdx + Qdy + Rdz$; huius modi ergo formularum differentialium nequidem requiri possunt integralia, hincque integrationem prorsus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignosci oportere, vtrum integrationis sint capaces, quam inuestigatio integralis actu suscipiatur.

CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM ULTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si vnica variabilis adsit, eiusque differentiale primum constans assumatur, supra iam methodus est tradita differentialia cuiusque gradus intuenendi. Scilicet si functionis cuiusvis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale secundum, hocque iterum differentialium dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, siue functio plures inuoluat variables siue vnicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur constans. Sit igitur V functio quaecunque ipsius x , neque vero dx sit constans, sed utcunque variabile, ita ut ipsius dx differentiale sit $=ddx$, huiusque differentiale $=d^3x$, & ita porro, atque inuestigemus differentialia secundum & sequentia functionis V .

243. Ponamus differentiale primum functionis V esse $=Pdx$, vbi erit P functio quaeipiam ipsius x pendens ab V . Si iam functionis V differentiale secundum inuenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum sit productum ex duabus quantitibus variabilibus P & dx , quarum illius differentiale sit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale ddx ,

ddx , per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo vltiora differentialia inuenientur.

224. Applicemus haec ad potestates ipsius x , quarum singula differentialia inuestigemus, si dx non ponatur constans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;

$$d^3V = d^3x; \quad d^4V = d^4x;$$

&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &

$$ddV = 2xdx + 2dx^2$$

$$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$$

$$d^4V = 2xd^4x + 8dx d^3x + 6ddx^2$$

$$d^5V = 2xd^5x + 10dx d^4x + 20ddx d^3x$$

&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit

$$dV = nx^{n-1}dx$$

$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$

$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx$$

$$+ n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$

C c 3

d^4V

$$\begin{aligned}
 d^4V &= nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dx d^3x \\
 &\quad + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 \\
 &\quad + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx \\
 &\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4 \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

Si igitur fuerit dx constans, ac propterea

$$ddx = 0, \quad d^3x = 0, \quad d^4x = 0, \quad \&c.$$

orientur eadem differentialia, quae iam supra pro hac hypothesis sunt inuenta.

245. Quoniam igitur differentialia cuiusque ordinis ipsius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expressiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, secundum praecepta supra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illustrabimus.

I. Si fuerit $V = \frac{x ddx}{dx^2}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{x d^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x ddx^2}{dx^3}$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$, Verit $dV = \frac{x ddx}{dx^2}$,

vbi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam posuimus.

III. Si fuerit $V = xxl \frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

V in

V in $xxl ddx - 2xxl dx$;

erit secundum regulas consuetas differentiando:

$$dV = 2x dx l ddx + \frac{xx d^3 x}{ddx} - 4x dx l dx - \frac{2xx ddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipsius V reperiuntur.

246. Si expressio proposita duas variables inuoluat, nempe x & y , vel vnus differentiale ponitur constans vel neutrius; arbitrarium enim est alterutrius differentiale constans assumi, quia ab arbitrio nostro pendet, quemadmodum vnus valores successiuos crescere statuere velimus. Neque vero vtriusque variabilis differentialia simul statui possunt constantia, hoc ipso enim relatio inter variables x & y assumeretur, quae tamen vel nulla est, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter crescere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere statueretur, tum eo ipso indicaretur fore $y = ax + b$; sicque y ab x penderet, quod tamen assumere non licet. Hancobrem vel vnus tantum variabilis differentiale constans assumi potest vel nullum. Quodsi autem differentiationes absolvere nouerimus nullo differentiali assumpto constante, simul quoque differentialia constabunt, si alterutrum differentiale ponatur constans: tantum enim opus est, vt si dx constans statuatur, vbique termini continentes ddx , d^3x , d^4x , &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipsarum x & y , fitque $dV = P dx + Q dy$. Ad
diffe-

differentiale ipsius V secundum inueniendum assumamus
vtrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q
sint functiones ipsarum x & y statuamus:

$$dP = p dx + r dy$$

$$dQ = r dx + q dy$$

supra enim vidimus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$.

His positis differentietur $dV = P dx + Q dy$, & reperiatur:

$$ddV = P ddx + p dx^2 + 2r dx dy + Q ddy + q dy^2.$$

Si igitur differentiale dx statuatur constans, erit

$$ddV = p dx^2 + 2r dx dy + Q ddy + q dy^2,$$

sin autem differentiale dy statueretur constans, foret

$$ddV = P ddx + p dx^2 + 2r dx dy + q dy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipsarum x & y
bis differentietur, nullo differentiali posito constante, eius
differentiale secundum semper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = P ddx + Q ddy + R dx^2 + S dy^2 + T dx dy$$

pendebunt autem quantitates P , Q , R , S , & T ita a se
inuicem, vt sit signandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); R = \left(\frac{dP}{dx}\right); S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

$$\& T = 2 \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2 \left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum si vel vnica desit, certo affirmare po-
teri-

terimus, formulam propositam nullius functionis esse differentiale secundum. Statim ergo dignosci poterit, vtrum huiusmodi formula sit cuiuspiam quantitatis differentiale secundum an minus?

242. Simili modo differentialia tertia ac sequentia inuenientur, quod in exemplo particulari ostendisse expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

$$\text{Erit } dV = y dx + x dy$$

$$ddV = y ddx + 2 dx dy$$

$$d^3V = y d^3x + 3 dy ddx + x d^3y$$

$$d^4V = y d^4x + 4 dy d^3x + 6 ddx ddy + 4 dx d^3y + x d^4y$$

&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem potestatum binomii sequuntur, indeque quousque libuerit continuari possunt.

At si fuerit $V = \frac{y}{x}$;

$$\text{Erit } dV = \frac{dy}{x} - \frac{y dx}{xx}$$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2 dx dy}{xx} + \frac{2 y dx^2}{x^3} - \frac{y ddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3 dx ddy}{xx} + \frac{6 dx^2 dy}{x^3} - \frac{3 dy ddx}{x^2}$$

$$+ \frac{6 y dx ddx}{x^3} - \frac{6 y dx^3}{x^4} - \frac{y d^3x}{x^2}$$

&c.

D d

in

in quo exemplo progressio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adstringitur, sed etiam eodem negotio cuiusvis expressionis, quae iam differentialia in se continet, differentiale inueniri potest, siue vnum quoddam differentiale assumitur constans siue minus. Cum enim singula differentialia aequae & eadem lege differentientur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque obseruari debent. Denotet igitur V eam expressionem, quam differentiari oportet, siue sit finita, siue infinite magna siue infinite parua; atque ratio differentiationis ex his exemplis perspicietur:

$$\text{I. Sit } V = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

$$\text{Erit } dV = \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

$$\text{II. Sit } V = \frac{y dx}{dy};$$

$$\text{Erit } dV = dx + \frac{y ddx}{dy} - \frac{y dx ddy}{dy^2}.$$

$$\text{III. Sit } V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy - dy ddx};$$

$$\begin{aligned} \text{Erit } dV = & \frac{(3 dx ddx + 3 dy ddy) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx ddy - dy ddx} \\ & - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} (dx d^3 y - dy d^3 x)}{(dx ddy - dy ddx)^2}. \end{aligned}$$

quae

quae differentialia cum sint generalissime sumta, nullo differentiali pro constante habito, hinc facile ea differentialia deriuari poterunt, quae oriuntur, si vel dx vel dy statuatur constans.

251. Quia nullo differentiali constante assumpto, nulla etiam lex, secundum quam successiui variabilium valores progrediantur, praescribitur, differentialia secunda & sequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi significabunt. Hinc formula, in qua differentialia secunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, nisi quodpiam differentiale constans sit assumtum; sed eius significatio erit vaga, atque variabitur, prouti aliud atque aliud differentiale fuerit constans positum. Interim tamen dantur quoque eiusmodi expressiones differentialia secunda continentes, quae, etiam si nullum differentiale positum sit constans, tamen significatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale constans statuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius scrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoscendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas vnicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit eius variabilis x differentiale secundum ddx , nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valo-

rem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2x dx$ seu $x dx$ constans ponatur, cum ipsius $x dx$ differentiale $x ddx + dx^2$ fit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$.

Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1} dx$ seu $x^{n-1} dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1} ddx + (n-1)x^{n-2} dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt,

si aliarum ipsius x functionum differentia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diuersissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel 0 vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xx ddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parua homogenea. finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in 0 , si fit $d.x^2$ constans, ea abit in $-x$; si fit $d.x^3$ constans, ea abit in $-2x$; si $d.x^4$ fit constans, ea abit in $-3x$, & ita porro. Neque ergo determinatum valorem habere potest, nisi definiatur, cuiusmodi differentiale constans sit assumtum.

253. Ista inconstantia significationis simili ratione ostenditur, si differentiale tertium in quapiam formula in-
fit. Consideremus hanc formulam $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$ quae pa-
riter

riter finitum valorem prae se fert. Si differentiale dx fit constans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit

$d.x^2$ constans, erit $ddx = -\frac{dx^2}{x}$; & denuo differentiando

$$d^3x = -\frac{2 dx ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}, \text{ ob } ddx = -\frac{dx^2}{x}.$$

hoc ergo casu formula proposita $\frac{x^3 d^3x}{dx ddx}$ abit in $-3x^2$.

At si fuerit $d.x^n$ constans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$,

hincque

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dx ddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx} + \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}.$$

Hoc ergo casu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \text{ \& } \frac{x^3 d^3x}{dx ddx} = -(2n-1)x^2,$$

vnde patet si fit $n=1$, seu dx constans, valorem formulae fore $= -x^2$. Ex quo manifestum est, si in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque simul indicetur, cuiusmodi differentiale assumtum sit constans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil prorsus significare; quamobrem tales expressiones in calculo occurrere non possunt.

254. Simili modo si formula contineat duas pluresue variables, in eaque occurrant differentialia secundi altiorisue gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non posse, nisi differentiale quodpiam constans statuatur; iis tantum exceptis casibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula inest, quoniam pro variis differentialibus, quae constantia ponuntur, valor ipsius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, ut formula statum obtineat valorem; hocque idem valet de quouis differentiali altiori ipsius x , atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium secundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumue variabilium differentialia secunda insint, fieri potest, ut inconstantia ab vno oriunda per inconstantiam reliquarum destruatur; hincque nascitur ille casus, cuius meminimus, quo formula huiusmodi differentialia secunda duarum pluriumue variabilium inuoluens valorem definitum habere potest, non obstante quod nullum differentiale constans sit positum.

255. Haec igitur formula $\frac{y ddx + x ddy}{dx dy}$, statam atque fixam significationem habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans statuatur. Nam si dx constans ponatur habebitur $\frac{x ddy}{dx dy}$; sin autem dy constans ponatur, habebitur $\frac{y ddx}{dx dy}$; manifestum autem est has formulas non necessario inter se esse aequales. Si enim
ne-

necessario essent aequales; tales manere deberent, quaecunque functio ipsius x loco y substitueretur. Ponamus tantum esse $y = xx$, & cum posito dx constante, sit

$ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dx dy}$ abibit in 1, si autem dy

seu $2x dx$ ponatur constans, fiet

$ddy = 2x ddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$,

unde formula $\frac{yddx}{dx dy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in vnico

casu reperiatur discrepantia, multo minus in genere erit

$\frac{xddy}{dx dy}$ posito dx constante aequalis $\frac{yddx}{dx dy}$ posito dy con-

stante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dx dy}$ sibi non

constat, dummodo vel dx vel dy constans ponatur, multo minus sibi constabit, si functionis cuiusvis vel ipsius x vel ipsius y vel vtriusque differentiale constans ponatur.

256. Hinc apparet huiusmodi formulam statum valorem habere non posse, nisi ita sit comparata, vt postquam loco variabilium y , & z , quae praeter x insunt, functiones quaecunque ipsius x fuerint substitutae, differentialia secunda & altiora ipsius x , nempe ddx , d^3x , &c. penitus ex calculo excedant. Si enim post talem substitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx , vel d^3x , vel d^4x , &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque constantia assumuntur, significationem suam variant, valor quoque ipsius formulae erit vagus. Sic comparata est for-

formula ante proposita $\frac{y d d x + x d d y}{d x d y}$, quae si statum haberet valorem, quicquid y significet, statum quoque habere deberet valorem, si y denotaret functionem quampiam ipsius x . At si tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2 x d d x}{d x^2}$, quae utique ob $d d x$ in ea contentum est vaga, atque alios aliosque valores induit, prouti alia atque alia differentialia constantia ponuntur, uti ex §. 252 satis est manifestum.

257. Dubium autem hic subnascetur, vtrum dentur tales formulae duo pluraue differentialia secundi altiorisue gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, ut si loco reliquarum variabilium quaecunque functiones vnius substituantur, differentialia secundi gradus prorsus se destruant. Huic dubio primum ita occurramus, ut huiusmodi formulam proponamus, quae ista proprietate sit praedita, quo per explorationem vis quaestionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam

$$\frac{d y d d x - d x d d y}{d x^3}$$
 memoratam proprietatem possidere:

quaecunque enim functio ipsius x loco y substituatur, semper differentialia secundi gradus penitus evanescent; quam proprietatem sequentibus exemplis comprobemus.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Sit } y &= x^2; \text{ erit } d y = 2 x d x, \\ &\& \quad d d y = 2 x d d x + 2 d x^2, \end{aligned}$$

qui

qui valores in formula $\frac{dy ddx - dx ddy}{dx^3}$ substituti dabunt.

$$\frac{2x ddx - 2x ddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = nx^{n-1} dx$,

&

$$ddy = nx^{n-1} ddx + n(n-1)x^{n-2} dx^2,$$

qui valores substituti formulam $\frac{dy ddx - dx ddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{nx^{n-1} ddx - nx^{n-1} ddx - n(n-1)x^{n-2} dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -V(1-xx)$; erit $dy = \frac{x dx}{V(1-xx)}$,
&

$$ddy = \frac{x ddx}{V(1-xx)} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

atque formula $\frac{dy ddx - dx ddy}{dx^3}$ abit in

$$\frac{x ddx}{dx^2 V(1-xx)} - \frac{x ddx}{dx^2 V(1-xx)} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia secunda ddx se mutuo tollunt, hocque ita eueniet, quaecunque aliae functiones loco y substituantur.

258. Cum ista exempla iam probauerint veritatem nostrae propositionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$

fixum habeat valorem, etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, demonstrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipsius x , eiusque differentiale dy huiusmodi erit, vt sit $dy = p dx$, atque p erit functio quaepiam ipsius x , eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = q dx$, eritque q iterum functio ipsius x . Cum igitur sit $dy = p dx$, erit differentiando $ddy = p ddx + q dx^2$, & $dyddx - dxddy = p ddx - p ddx - q dx^3 = -q dx^3$; in qua expressione cum nullum insit differentiale secundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$

erit $= -q$. Quomocunque igitur y pendeat ab x , differentialia secunda in hac formula semper se mutuo tollent, hancque ob causam eius valor, qui alioquin esset vagus, fiet status ac fixus.

259. Quanquam hic posuimus y esse functionem ipsius x , tamen veritas aequae subsistit, si y ab x prorsus non pendeat, vti assumimus. Dum enim pro y functionem quancunque substituimus, neque qualis sit determinauimus, nullam pendentiam ab x ipsi y tribuimus. Interim tamen sine functionis mentione demonstratio formari potest; quaecunque enim y sit quantitas siue pendens ab x siue non pendens, eius differentiale dy homo-
ge-

geneum erit cum dx , sicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum; neque a differentialium secundorum lege pendeat. Sit igitur $\frac{dy}{dx} = p$;

erit $dy = p dx$, & $ddy = p ddx + dp dx$, unde fit
 $dx ddy - dy ddx = dp dx^2$,

cuius valor non est vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, siue quodpiam differentiale constans accipiatur, quaecunque id demum sit, siue nullum differentiale positum sit constans.

260. Quia igitur $dy ddx - dx ddy$ non obstantibus differentialibus secundis, quae potentia se mutuo destruere censi possunt, significationem habet fixam; expressio quaecunque, in qua nulla alia differentialia secunda praeter formulam $dy ddx - dx ddy$ insunt, pariter significationem habebit fixam. Seu si ponatur $dy ddx - dx ddy = \omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y , earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω utcumque composita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrarie, qua valores successivi ipsius x crescere ponuntur, in ω differentialia secunda se mutuo tollunt, etiam ipsa quantitas V non erit vaga sed fixa. Sic

ista expressio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy - dy ddx}$ valorem obtinet fixum,

E c 2

quam-

quamvis ea differentialibus secundis inquinata videatur, atque insuper, quia numerator est homogeneous denominatori, valorem obtinet finitum, nisi is casu vel infinite magnus vel infinite parvus euadat.

261. Quemadmodum formula $dx ddy - dy ddx$ valorem fixum habere ostensa est, ita quoque si tertia variabilis z accedat, hae formulae $dx ddz - dz ddx$ & $dy ddz - dz ddy$ valores fixos habebunt. Hinc expressiones, quas tres variables x , y , & z inuoluunt, si in eis nulla alia differentialia secunda occurrant, praeter haec assignata, tum perinde erunt fixae, ac si nulla plane differentialia secunda inessent. Ita haec expressio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz) ddy - (dy + dz) ddx + (dx - dy) ddz}$$

non obstantibus differentialibus secundis, fixa gaudet significatione. Similique modo formulae exhiberi possunt, plures variables continentes, in quibus differentialia secunda non impediunt, quominus earum significatio sit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia secunda complectuntur, reliquae omnes significationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere possunt, nisi quodpiam differentiale primum definiatur, quod constans sit assumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum constans assumitur, omnes expressiones quocunque variables contine-

tineant, & cuiuscunque ordinis differentialia post primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt significationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx assumptum sit constans, ipsius x differentialia secunda & sequentia evanescent; & quaecunque functiones ipsius x loco reliquarum variabilium $y, z, \&c.$ substituantur, earum differentialia secunda per dx^2 , tertia per dx^3 , &c. determinabuntur, sicque inconstantia a differentialibus secundis oriunda tollitur. Idem evenit, si alius variabilis seu functionis cuiuscunque differentiale primum constans ponatur.

263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda & altiorum ordinum reuera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta. Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum constans assumitur, vel nullum. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo evanescent, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem nisi se mutuo destruant, significatio erit vaga, & propterea in Analyfi locum nullum inveniunt; sin autem se mutuo destruunt, tantum apparenter adsunt, & reuera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime apparenter tantum in calculo vsurpantur, necesse fuit, vt methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus, cuius ope differentialia secunda & altiora semper exterminari queant.

264. Si expressio vnicam contineat variabilem x , eiusque differentialia altiora ddx , d^3x , d^4x , &c. in ea occurrant, ea significatum fixum habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans sit positum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt sit constans positum, ita ut sit $ddt=0$, $d^3t=0$, $d^4t=0$, &c. Ponatur $dx=pt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga significatione differentialium secundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp=qdt$, similique modo ulterius $dq=rdt$; $dr=sd$; &c. erunt q, r, s , &c. quantitates finitae fixos significatus habentes. Cum igitur sit $dx=pt$; erit

$$ddx = dpdt = qdt^2; \quad d^3x = dqdt^2 = rdt^3; \\ d^4x = drdt^3 = sdt^4; \quad \&c.$$

qui valores si loco ddx , d^3x , d^4x , &c. substituantur, tota expressio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam significationem habebit.

265. Si x sit functio ipsius t , poterit hoc modo quantitas x prorsus eliminari, ita ut sola quantitas t cum suo differentiali dt in expressione remaneat: sin autem t sit functio ipsius x , vicissim quoque x erit ipsius t functio. Interim tamen ipsa quantitas x cum suo differentiali primo dx , in calculo retineri potest, dummodo post substitutiones ante factas vbique loco t & dt earum valores per x & dx expressi restituantur. Quod quo
pla-

planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita ut differentiale primum ipsius x^n constans sit positum. Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx; \text{ erit } p = \frac{1}{nx^{n-1}}; \quad \&$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx;$$

$$\text{vnde fit } q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}}; \quad \&$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nr x^{n-1}dx.$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 x^{3n-1}}; \quad \& \quad s = \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 x^{4n-1}};$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = - \frac{(n-1)dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx}$$

$$d^4x = - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variables x & y , earumque vnus x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentiaalia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy , d^3y , &c. Haec autem eodem modo, quò ante vsi sumus, tolli poterunt ponendo

$$dy =$$

$$dy = p dx; dp = q dx; dq = r dx; dr = s dx; \&c.$$

fiet enim

$$ddy = q dx^2; d^3y = r dx^3; d^4y = s dx^4; \&c.$$

quibus substitutis expressio orietur, quae praeter quantitates finitas $x, y, p, q, r, s, \&c.$ nonnisi differentiale primum dx continebit. Sic si proposita fuerit haec expressio

$$\frac{y dx^4 + x dy d^2y + x d^4y}{(xx + yy) ddy},$$

in qua dx est constans assumtum; ponatur

$$dy = p dx; dp = q dx; dy = r dx; \& dr = s dx;$$

quibus valoribus substitutis expressio proposita transmutabitur in hanc:

$$\frac{(y + xpr + xs) dx^2}{(xx + yy) q}, \text{ quae nulla}$$

amplius differentialia secunda altioraue continet.

267. Simili modo differentialia secunda & altiora tollentur, si dy fuerit constans assumtum. Verum si aliud differentiale primum quodcunque dt statuatur constans, tum primum modo ante indicato differentialia ipsius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$$dx = p dt; dp = q dt; dq = r dt; dr = s dt; \&c.$$

vnde fit

$$ddx = q dt^2; d^3x = r dt^3; d^4x = s dt^4; \&c.$$

Deinde simili modo differentialia altiora ipsius y ponendo

$$dy =$$

$$dy = P dt; dP = Q dt; dQ = R dt; dR = S dt; \&c.$$

unde fiet

$$ddy = Q dt^2; d^3y = R dt^3; d^4y = S dt^4; \&c.$$

quibus substitutis obtinebitur expressio, quae praeter quantitates finitas, $x, p, q, r, s, \&c.$ $y, P, Q, R, S, \&c.$ solum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit significationem.

268. Si differentiale primum, quod constans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab utroque simul pendet, tum non opus est, ut duplex quantitatum finitarum $p, q, r, \&c.$ series introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae $p, q, r, \&c.$ fient functiones ipsius x , solaeque litterae $P, Q, R, \&c.$ ingrediuntur; idemque evenit, si differentiale constans dt ab y tantum pendeat. At si dt ab utraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale $y dx$ constans esse assumtum; eritque $y ddx + dx dy = 0$; unde fit

$$ddx = -\frac{dx dy}{y}. \text{ Sit nunc } dy = p dx; dp = q dx; dy = r dx$$

&c. eritque $ddx = -\frac{p dx^2}{y}$; ulteriusque differentiando

$$d^3x = -\frac{q dx^3}{y} + \frac{p p dx^3}{y y} - \frac{2 p dx ddx}{y},$$

substituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{p dx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{q dx^3}{y} + \frac{3 p p dx^3}{y y}; \text{ porroque}$$

F f

 d^4x

$$d^4x = -\frac{r dx^4}{y} + \frac{pq dx^4}{yy} + \frac{6pq dx^4}{yy} - \frac{6p^3 dx^4}{y^3} \\ + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y} \right) 3 dx^2 ddx;$$

& pro ddx substituto valore $-\frac{p dx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3} \right) dx^4 \quad \&c.$$

Deinde cum fit $dy = p dx$; erit

$$ddy = q dx^2 + p ddx = \left(q - \frac{pp}{q} \right) dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{p dx^2}{y}$ substituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy} \right) dx^3, \quad \&$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{yy} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3} \right) dx^4 \quad \&c.$$

qui valores loco differentialium altiorum ipsarum x & y substituti mutabunt expressionem propositam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque consideratione cuiuspiam differentialis constantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia secunda non insunt, nequidem opus est, ut quale differentiale sumtum fit constans, commemoretur.

269. Saepissime autem in calculo ad lineas curvas applicato euenire solet, ut hoc differentiale primum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constans assumatur: quare quemadmodum hoc casu differentialia secunda & altiora eliminari de-

debeant; ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absoluendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum

$dy = p dx$; $dp = q dx$; $dq = r dx$; $dr = s dx$; &c. atque differentiale $V(dx^2 + dy^2)$ induet hanc formam $dx V(1 + pp)$, quae cum sit constans fiet

$$ddx V(1 + pp) + \frac{pq dx^2}{V(1 + pp)} = 0,$$

$$\text{ideoque } ddx = -\frac{pq dx^2}{1 + pp};$$

vnde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

$$\begin{aligned} d^3x &= -\frac{pr dx^3}{1 + pp} - \frac{qq dx^3}{1 + pp} + \frac{2ppqq dx^3}{(1 + pp)^2} - \frac{2pq dx ddx}{1 + pp} \\ &= -\frac{pr dx^3}{1 + pp} - \frac{qq dx^3}{1 + pp} + \frac{4ppqq dx^3}{(1 + pp)^2} \\ &= -\frac{pr dx^3}{1 + pp} + \frac{(3pp - 1)qq dx^3}{(1 + pp)^2}. \end{aligned}$$

Deinde fiet

$$d^4x = -\frac{ps dx^4}{1 + pp} + \frac{(10pp - 3)qr dx^4}{(1 + pp)^2} - \frac{(15pp - 13)pq^3 dx^4}{(1 + pp)^3}.$$

Quia autem assumimus $dy = p dx$, fiet differentiando

$$ddy = q dx^2 + p ddx = q dx^2 - \frac{ppq dx^2}{1 + pp} = \frac{q dx^2}{1 + pp},$$

$$d^3y = \frac{r dx^3}{1 + pp} - \frac{2ppqq dx^3}{(1 + pp)^2} + \frac{2q dx ddx}{1 + pp}, \quad \text{ideoque}$$

$$d^3y = \frac{r dx^3}{1 + pp} - \frac{4ppqq dx^3}{(1 + pp)^2};$$

F f 2

por-

porroque differentiando :

$$d^2y = \frac{s dx^4}{1+pp} - \frac{13pqr dx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3 dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora vtriusque variabilis x & y per quantitates finitas & potestates ipsius dx exprimentur, atque post has substitutiones factas resultabit expressio a differentialibus secundis prorsus libera.

270. Exposito igitur modo differentialia secunda & altiora exuendi, conueniet hoc negotium aliquot exemplis illustrari.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{x ddy}{dx^2}$, in qua dx positum est constans. Posito ergo $dy = p dx$, & $dp = q dx$, ob $ddy = q dx^2$, expressio proposita abit in hanc finitam xq .

II. Sit proposita haec expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua positum sit dy constans. Ponatur $dx = p dy$; $dp = q dy$, ob $ddx = q dy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem ut ante statuere velimus $dy = p dx$, $dp = q dx$; ob dy constans erit $0 = p ddx + dp dx$ & $ddx = -\frac{q dx^2}{p}$; vnde expressio proposita transibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit proposita haec expressio $\frac{y ddx - x ddy}{dx dy}$ in qua $y dx$ positum sit constans. Ponatur $dy = p dx$ & $dp =$

$dp = q dx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{p dx^2}{y}$,
 $ddy = q dx^2 - \frac{pp dx^2}{y}$, quibus substitutis expressio pro-
 posita transmutatur in hanc: $-\frac{1}{y} - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit proposita ista expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua
 constans sit positum $V(dx^2 + dy^2)$. Ponatur iterum
 $dy = p dx$, $dp = q dx$, & ex paragrapho praecedente
 erit $ddy = \frac{q dx^2}{1 + pp}$; unde expressio proposita abibit
 in $\frac{(1 + pp)^2}{q}$.

Ex his autem exemplis satis intelligitur, quemadmo-
 dum in quouis casu oblato, quodcunque differentiale pri-
 mum assumtum sit constans, differentialia secunda atque
 altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quanti-
 tatibus finitis p, q, r, s , &c. differentialia secunda & al-
 tiora ita eliminari queant, ut tota expressio praeter quan-
 titates finitas x, y, p, q, r, s , &c. solum differentiale dx
 complectatur: vicissim si huiusmodi expressio reducta
 proponatur, ea iterum in formam priorem transmutari po-
 terit loco litterarum p, q, r, s , &c. introducendis diffe-
 rentialibus secundis & altioribus. Nunc autem perinde
 erit, quodnam differentiale primum constans assumatur;
 atque vel id ipsum, quod ante fuit assumtum constans

poni potest, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorsus nullum differentiale constans assumi poterit, hocque modo prodibunt expressiones differentialia secunda altioraue continentes, quae etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, tamen fixas significationes obtineant, cuiusmodi expressiones dari supra ostendimus.

272. Sit ergo proposita expressio quaecunque continens litteras finitas x, y, p, q, r , &c. una cum differentiali dx , in qua sit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dy}{dx}$; &c.

Si enim has litteras p, q, r , &c. ita eliminare velimus, ut earum loco introducamus differentialia secunda & altiora ipsarum x & y , nullo differentiali constante assumto: fiet $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, hincque $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$,

quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3 x}{dx^4},$$

vnde fit

$$r = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3 x}{dx^5}.$$

Quod si insuper littera s , quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, in fit, pro ea substitui debebit hic valor $s =$

$$\frac{dx^3 d^4 y - 6 dx^2 ddx d^3 y - 4 dx^2 ddy d^3 x + 15 dx ddx^2 ddy + 10 dx dy ddx d^3 x - 15 dy ddx^3 - dx^2 dy d^4 x}{dx^7}$$

His

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s , &c. substitutis expressio proposita transmutabitur in aliam differentialia altiora ipsarum x & y continentem, quae etiam si nullum differentiale primum constans sit assumtum, tamen non vagam sed fixam habebit significationem.

273. Hoc ergo modo quacuis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum assumtum est constans, transmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale constans ponitur, quae hoc non obstante eundem valorem fixum habeat. Primum scilicet ope methodi ante traditae assumtis valoribus $dy = p dx$; $dp = q dx$; $dy = r dx$; $dr = s dx$; &c. differentialia altiora eliminantur, tum loco p, q, r, s , &c. valores nunc inuenti substituantur; atque orietur expressio priori aequalis nullum differentiale constans inuoluens: quam transformationem exempla sequentia illustrabunt.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{x ddy}{dx^2}$, in qua dx positum constans, quae transmutari debeat in aliam formam nullum differentiale constans inuoluentem.

Ponatur $dy = p dx$; $dp = q dx$; atque vt ante (270) vidimus expressio proposita transibit in hanc: qx . Nunc loco q substituatur valor, quem obtinet nullo differentiali constanti assumto $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$ atque reperietur

haec expressio $\frac{x dx ddy - x dy ddx}{dx^3}$ propositae aequalis, & nullum amplius differentiale constans inuoluens.

II. Sit

II. Sit proposita haec expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua dy assumtum est constans. Ponatur $dy = p dx$ & $dp = q dx$; eaque transibit in hanc: $\frac{p(1+pp)}{q}$, statuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$ & $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$, atque inuenietur: $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dy ddx - dx ddy}$ quae nullo differentiali assumto eundem fixum habet valorem, quem proposita.

III. Sit proposita haec expressio: $\frac{y ddx - x ddy}{dx dy}$, in qua differentiale $y dx$ constans est assumtum. Ponatur $dy = p dx$, atque vti supra (270) vidimus haec expressio transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali constante assumto transformabitur in istam:

$$-1 - \frac{x dxdy + x dy dx}{dx^2 dy} + \frac{xdy}{y dx} \\ = \frac{x dxdy^2 - y dx^2 dy - y x dxdy + y x dy dx}{y dx^2 dy}$$

IV. Sit proposita haec expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua constans assumtum est differentiale $V(dx^2 + dy^2)$. Posito $dy = p dx$, & $dp = q dx$, orietur haec expressio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$, &

$q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, atque nullo assumpto differentiali constante nanciscemur istam expressionem $\frac{(dx^2 - dy)^2}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$ propositae aequivalentem.

V. Sit proposita haec expressio $\frac{dx d^3 y}{x ddy}$, in qua differentiale dx constans sit assumtum. Ponatur

$$dy = p dx; \quad dp = q dx \quad \& \quad dq = r dx;$$

atque ob

$$ddy = q dx^2 \quad \& \quad d^3 y = r dx^3$$

formula proposita abibit in hanc $\frac{r dx^2}{x q}$. Nunc loco

q & r substituantur valores, quos nullo differentiali constante assumpto recipiunt scilicet: $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, &

$$r = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy - 3 dy ddx^2 - dx dy d^3 x}{dx^5},$$

atque obtinebitur sequens expressio propositae aequivalens:

$$\frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy - 3 dy ddx^2 - dx dy d^3 x}{dx ddy - dy ddx}$$

$$= \frac{dx (dx d^3 y - dy d^3 x)}{dx ddy - dy ddx} - 3 ddx.$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita vt non opus sit litteras p, q, r , &c. introducere

cere. Varii autem modi hoc opus absoluendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula proposita constans fuerit assumtum. Ponamus primum in formula proposita differentiale dx constans esse assumtum;

& quia loco dy posuimus pdx , rursusque $\frac{dy}{dx}$ loco p :

differentialia prima dx & dy , vbicunque in expressione occurrunt, sine alteratione relinquuntur. Vbi autem occurrit ddy , quia eius loco scribitur qdx^2 , & porro loco q

valor $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, transmutatio absoluetur, si vbi-

que loco ddy statim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ feu

$ddy - \frac{dyddx}{dx}$. Si insuper in expressione proposita

occurrat d^3y , quia eius loco ponitur $r dx^3$, ob valorem ipsius r ante inuentum, vbique loco d^3y scribi debebit

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

quo facto expressio proposita transmutabitur in aliam, quae nullum differentiale constans inuoluit. Sic si pro-

ponatur ista expressio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx po-

situm est constans, ei aequalis erit posito $ddy - \frac{dyddx}{dx}$

loco ddy , haec nullum differentiale constans inuoluens:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}.$$

275. Hinc facile colligitur, si in expressione quapiam proposita assumtum fuerit differentiale dy constans, tum vbique loco ddx scribi debere $ddx = \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x = \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy}$; vt obtineatur expressio aequiualeus, in qua nullum differentiale constans ponatur. Sin autem in expressione proposita constans fuerit assumtum $y dx$, quoniam fit

$$ddx = -\frac{pdx^2}{y}, \quad \& \quad ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y};$$

loco ddx vbique scribi debebit $-\frac{dx dy}{y}$, & loco ddy

vbique $ddy = \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentia-

lia, quia in hoc negotio rarissime occurrere solent, non progredior. Quod si vero in expressione proposita hoc differentiale $V(dx^2 + dy^2)$ assumtum fuerit constans,

quia inuenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$;

pro ddx vbique scribi debet $\frac{dy^2ddx - dx dyddy}{dx^2 + dy^2}$,

& loco ddy vbique $\frac{dx^2ddy - dx dyddx}{dx^2 + dy^2}$. Sic si pro-

posita fuerit expressio $\frac{dy V(dx^2 + dy^2)}{ddx}$, in qua $V(dx^2 + dy^2)$

assumtum sit constans, ea transmutabitur in hanc:

$\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, in qua nullum differentiale constans assumitur.

276. Quo istae reductiones facilius ad usum accommodari queant, eas in sequenti tabella complecti visum est.

Formula igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale constans inuoluentem transmutabitur ope substitutionum sequentium :

I. Si differentiale dx fuerit constans assumtum

loco | scribatur

$$ddy \left| ddy - \frac{dy ddx}{dx} \right.$$

$$d^3y \left| d^3y - \frac{3 ddx ddy}{dx} + \frac{3 dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx} \right.$$

II. Si differentiale dy fuerit constans assumtum

loco | scribatur

$$ddx \left| ddx - \frac{dx ddy}{dy} \right.$$

$$d^3x \left| d^3x - \frac{3 ddx ddy}{dy} + \frac{3 dx ddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy} \right.$$

III.

III. Si differentiale $y dx$ fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$\frac{dx dy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dy ddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dy ddx}{y} - \frac{dx ddy}{y} + \frac{3 dx dy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3 ddx ddy}{dx} + \frac{3 dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx}$ $- \frac{4 dy ddy}{y} + \frac{4 dy^2 ddx}{y dx} + \frac{3 dy^3}{yy}$

IV. Si differentiale $V(dx^2 + dy^2)$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\frac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	$\frac{dy^2 d^3x - dx dy d^3y}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dx ddy - dy ddx)(3 dy^2 ddy - dx^2 ddy + 4 dx dy ddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	$\frac{dx^2 d^3y - dx dy d^3x}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dy ddx - dx ddy)(3 dx^2 ddx - dy^2 ddx + 4 dx dy ddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

277. Expressiones ergo istae, quae nullum differentiale constans includunt, ita erunt comparatae, ut pro lubitu quoduis differentiale constans assumi queat. Hincque expressiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale constans assumtum perhibetur, examinari possunt, utrum significatio earum sit vaga an fixa? Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx constans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expressio iterum ad formam, in qua nullum differentiale constans sit assumtum, quae si cum proposita conueniat, ea erit fixa, neque ab inconstantia differentialium secundorum pendebit: sin autem expressio prodeat diuersa, tum proposita vagam habet significationem. Sic si ponatur haec expressio $yddx - xddy$, in qua nullum differentiale positum sit constans; ad inuestigandum, utrum significationem fixam habeat an vagam? ponatur dx constans, eaque abibit $-xddy$: nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponat,

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \text{ ac prodibit } -xddy + \frac{xdyddx}{dx},$$

cuius a proposita discrepantia indicat, propositam expressionem fixam statimque significationem non habere.

278. Simili modo si proponatur expressio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiiri poterit, sub qua ea nullo differentiali constante assumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx constans, atque expressio proposita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, ut
eius

eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdx dy + Rddy - \frac{Rdy ddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx + Rdy = 0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P = -\frac{Rdy}{dx}$ seu $R = -\frac{Pdx}{dy}$ tum expressio proposita $Pddx + Qdx dy + Rddy$ valorem fixum non habebit, sed eius significatio erit vaga atque diuersa, prout aliud atque aliud differentiale constans assumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialem, in qua quodpiam differentiale constans est positum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans inuoluat, quo facto illud alterum differentiale constans ponatur. Sic si in expressione proposita differentiale dx assumtum sit constans, eaque transmutanda sit in aliam, quae differentiale dy constans implicet: in formulis supra loco ddy & d^3y substituendis ob dy constans ponatur $ddy = 0$, $d^3y = 0$, atque quaesito satisfiet, si loco ddy substituatur $-\frac{dy ddx}{dx}$ & $\frac{3dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy ddx}{dx}$ loco d^3y . Hoc modo ista formula $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy}$, in qua dx positum est constans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy ddx}$, in qua dy ponitur constans.

280. Si contra formula, in qua dy constans est positum, transmutari debeat in aliam, in qua dx fit constans, tum loco ddx substitui debet $\frac{dx ddy}{dy}$ & loco

d^3x haec expressio $\frac{3 dx ddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy}$. Simili modo

si formula, in qua $V(dx^2 + dy^2)$ positum est constans, transmutari debeat in aliam, in qua dx fit constans, tum

loco ddx scribatur $\frac{dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$ & $\frac{dx^2 ddy}{dx^2 + dy^2}$ loco

ddy . At si formula, qua dx constans est assumtum, trans-

mutari debeat in aliam, in qua $V(dx^2 + dy^2)$ fit constans, quia ob $dx^2 + dy^2$ constans fit $dx ddx + dy ddy = 0$,

& $ddx = -\frac{dy ddy}{dx}$, hoc valore loco ddx assumto,

pro ddy scribi debebit $ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2) ddy}{dx^2}$.

Sic haec formula $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy}$, in qua dx est con-

stans, transmutabitur in aliam, in qua $V(dx^2 + dy^2)$

ponitur constans, quae erit $\frac{dx V(dx^2 + dy^2)}{ddy}$.



CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS.

281.

In hoc Capite imprimis est propositum earum functionum ipsius x , quae non explicite, sed implicite per aequationem, qua relatio functionis istius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriuntur, ostendemus. Cum enim in calculo integrali summum negotium consistat in integratione aequationum differentialium, seu in inuentione eiusmodi aequationum finitarum, qua cum differentialibus conueniant; necesse est, ut hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine sequuntur, diligentius scrutemur, sicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Vt igitur hoc negotium absoluamus, sit y functio eiusmodi ipsius x , quae per hanc aequationem quadratam $yy + Py + Q = 0$ definiatur. Cum ergo haec expressio $yy + Py + Q$ sit $= 0$, quicquid x significet, nihilo quoque aequalis erit, si loco x scribatur $x + dx$, quo casu y abit in $y + dy$. Facta autem hac substitutione, si a quantitate resultante subtrahatur prior

$$\begin{array}{r} Hh \\ yy \end{array}$$

$yy + Py + Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $= 0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $= 0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales, earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit $yy + Py + Q = 0$, erit quoque

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0;$$

quia vero P & Q sunt functiones ipsius x , earum differentialia huiusmodi formam habebunt,

$$dP = p dx, \quad \& \quad dQ = q dx;$$

vnde fiet

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$$

ex qua oritur $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp + q}{2y + P}$.

283. Quemadmodum ergo, aequatio finita $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x , ita aequatio differentialis exprimit relationem seu rationem, quam dy tenet ad dx . Quoniam vero est $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp + q}{2y + P}$, haec ratio $dy:dx$ cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita: neque vero res aliter se habere potest; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, vterque suum peculiare habebit differentiale, & vtriusque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expressione $-\frac{yp + q}{2y + P}$ loco y substituatur. Simili modo functio y per aequatio-

tionem cubicam definiatur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici scilicet ipsius y valori respondens. Si in aequatione proposita finita y quatuor pluresue habeat dimensiones, necesse est vt $\frac{dy}{dx}$ totidem significaciones fortiatur.

284. Interim tamen ipsa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita scilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimensiones assurgat, quot ante habuerat y , sicque ista aequatio omnes diuersas rationes ipsius dy ad dx simul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$, cuius differentialis est:

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = -\frac{Pdy + dQ}{2dy + dP}$, qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\frac{1}{2}dP \pm \frac{(\frac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{PP - 4Q}},$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita:

$$y = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{PP - 4Q}.$$

285. Inuento valore ipsius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipsius ddy , porroque ipsorum d^3y , d^4y , &c. qui autem, cum determinati non sint, nisi aliquod differentiale primum constans statuatur. Ponamus commoditatis ergo dx constans, atque ad hoc ostendendum sumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, unde per differentiationem oritur

$$3yydy + 3xxdx = 3axy + 3aydx,$$

hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, sumantur denuo differentia

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

substituatur loco dy eius valor modo inuentus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$,

atque diuisione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

feu

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3} = \frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum ex aequatione finita sit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae his valores in innumeras formas transmutari possunt.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis potest variari, dum cum aequatione finita permiscetur. Sic cum exemplo praecedente inuenta esset aequatio differentialis

$$yydy + xx dx = ax dy + ay dx,$$

si ea multiplicetur per y , orietur

$$y^3 dy + xxy dx = axy dy + ayy dx,$$

in qua si loco y^3 substituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio noua

$$2axy dy - x^3 dy + xxy dx = ayy dx;$$

quae denuo per y multiplicata, postquam loco y^3 eius valor fuerit substitutus, praebabit

$$2axy^2 dy - x^3 y dy + xxyy dx = 3aaxy dx - ax^3 dx.$$

Generaliter autem si P , Q , R , denotent functiones quasunque ipsarum x & y . Si aequatio differentialis multiplicetur per P erit

$$Pyydy + Pxx dx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum sit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes inuicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex proposita aequatione finita natam

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3 dy + Ry^3 dy - 3aRxydy + Pxx dx - aPydx + Qx^3 dx + Qy^3 dx - 3aQxydx = 0.$$

287. Possunt vero etiam per ipsam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequa-

tionem finita inueniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut diuiditur. Sic si P fuerit functio quaecunque ipsarum x & y , ut sit $dP = p dx + q dy$, si aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diuersas induet, prouti pro P aliae atque aliae functiones assumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, si ad hanc aequationem differentialem inuentam addatur ipsa aequatio finita per huiusmodi formulam $Q dx + R dy$ multiplicata, ubi pro Q & R functiones quascunque ipsarum x & y assumere licet. Quamquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx , quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipsius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potissimum explicabitur.

288. Non solum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci possunt, sed etiam plures imo infinitae exhiberi possunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy = ax + ab$ & $yy = ax$ omnino sunt diuersae, dum in priori quaecunque quantitas constans in locum ipsius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatiae eandem dant aequationem differentialem $2y dy = a dx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy = ax$ con-

ten-

tentae, quicumque valor ipsa a tribuatur, in vna aequatione differentiali, in qua a non insit, comprehendi possunt. Diuidatur enim aequatio illa per x vt sit $\frac{yy}{x} = a$, haecque differentia dabit $2xdy - ydx = 0$. Possunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perducì, vti fit in istis aequationibus

$$yy - ax = 0 \quad \& \quad yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}},$$

si enim vtraque per $e^{\frac{x}{a}}$ diuidatur, vt habeantur istae aequationes :

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0 \quad \& \quad e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb,$$

ex vtriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diuersitatis in hoc consistit, quod quantitatis constantis differentiale sit $= 0$. Quodsi ergo aequatio finita ad eiusmodi formam reducatur, vt quantitas quaequam constans sola adsit, neque per variables vel multiplicetur vel diuidatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas constans prorsus non adsit. Hoc modo quaelibet quantitas constans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli potest. Sic si proposita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; si ea per xy diuidatur vt habeatur

$\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3} = \frac{3axy}{x^3}$

$\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam constans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates constantes, quae in aequatione finita insunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesue repetitam; sicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis constantibus prorsus carentes. Sit proposita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem constantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tollitur prima differentiatione, unde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae sumpto dx constante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydx dy = 0,$$

quae etsi nullam constantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m , n & aa tribuantur, in se aeque comprehendit.

291. Non solum vero quantitates constantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli possunt, sed etiam altera variabilis, eius scilicet, cuius differentiale constans assumitur, per differentiationem eliminari poterit. Ex aequatione enim inter x & y proposita quaeratur valor x , ut sit $x = Y$ denotante Y

func-

functionem ipsius y ; eritque $dx = dY$, & sumto dx constante, fiet differentiando $0 = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $0 = d^3Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $0 = d^4Y$. Quanquam autem in his aequationibus vna tantum variabilis inesse videtur, quae propterea variabilis esse cessaret, dum vnica variabilis in nulla aequatione adesse potest; tamen quia differentiale dx constans est assumtum, eiusque ratio in aequatione haberi debet, reuera in aequationem ingredi censendum est. Hinc mirandum non est, si saepius aequationes differentiales secundi altiorisue gradus occurrant, in quibus vnica tantum variabilis inesse videatur.

292. Praecipue autem notandum est, per differentiationem quantitates irrationales ac transcendentes ex aequatione tolli posse. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitae irrationalitas eliminari potest, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc saepenumero commodius sine ista reductione fieri potest, dum per comparisonem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, si vna tantum insit, eliminari potest. Sin autem duae pluresue partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, sicque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad singulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli poterunt.

runt. Vti si fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, post differentiationem habebitur

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

quae per finitam diuisa dat $\frac{m dy}{y} = -\frac{2n x dx}{aa - xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam ortam esse posse ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes inuolvente.

293. Vt autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminantur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum sint algebraica, negotium sine difficultate absoluetur. Sit enim

$$y = xlx: \text{ erit } \frac{y}{x} = lx, \text{ vnde differentiando fit}$$

$$\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}, \text{ ideoque } xdy - ydx = xdx.$$

Si bini insint logarithmi duplici differentiatione erit opus:

$$\text{fit enim } ylx = xly; \text{ erit } \frac{y lx}{x} = ly, \text{ \& differen-}$$

$$\text{tando, } \frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y}, \text{ ex qua con-}$$

$$\text{cluditur fore } lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - y ydx}.$$

Haec aequatio iam iterum differentietur posito dx constante, atque prodibit

dx

$$\frac{dx}{x} = \frac{xx ddy + 2x dx dy - 2y dx dy}{yxdy - yydx} + \frac{(yydx - xxdy)(yxdy + xdy^2 - ydx dy)}{(yxdy - yydx)^2}$$

feu $\frac{dx}{x} =$

$$\frac{y^3 x dx ddy - yyxx dx ddy + 3yxx dx dy^2 - y^2 x dx dy^2 + y^3 dx^2 dy - 2xyy dx^2 dy - x^3 dy^3}{(yxdy - yydx)^2}$$

quae reducta dabit :

$$y^3 x dx ddy - yyxx dx ddy + 3yxx dx dy^2 - 2xyy dx dy^2 + 3y^3 dx^2 dy - 2xyy dx^2 dy - x^3 dy^3 - \frac{y^4 dx^3}{x} = 0$$

feu

$$yyxx (y - x) dx ddy + 3yxx dx dy (xdy + yydx) - 2yyxx dx dy (dx + dy) = x^4 dy^3 + y^4 dx^2.$$

294. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi proposita fuerit $P = e^Q$, vbi P & Q functiones quascunque ipsarum x & y denotent; ea aequatio transmutari poterit in hanc logarithmicam $\log P = Q$; cuius differentialis est $\frac{dP}{P} = dQ$ feu $dP = P dQ$. Neque obstat, si quantitates exponentiales magis fuerint complicatae, tum enim si vna differentiatio non sufficit, duabus pluribusue negotium absoluetur.

I. Sit $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$,

vnde fit

$$e^{2x} = \frac{y + 1}{y - 1} \quad \& \quad 2x = l \frac{y + 1}{y - 1},$$

cuius differentiale est

$$dx = - \frac{dy}{yy - 1} = \frac{dy}{1 - yy}.$$

II. Sit $y = l \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentia-

tionem $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, seu $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$,

atque $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$. Ergo $2x = l \frac{dy + dx}{dx - dy}$.

Sumto ergo dx constante erit

$$dx = \frac{dx ddy}{dx^2 - dy^2} \quad \text{seu} \quad dx^2 = ddy + dy^2.$$

295. Simili modo quantitates transcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, vti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y = aA \sin \frac{x}{a}$; erit $dy = \frac{a dx}{V(aa - xx)}$.

II. Sit $y = a \cos \frac{y}{x}$; erit

$$\frac{y}{a} = \cos \frac{y}{x}, \quad \& \quad \frac{dy}{a} = - \frac{xdy + ydx}{xx} \sin \frac{y}{x}. \quad \text{At}$$

At cum sit

$$\cos \frac{y}{a} = \frac{y}{a}; \text{ erit } \sin \frac{y}{a} = \frac{V(aa - yy)}{a},$$

quo valore substituuo habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy)V(aa - yy)}{axx}$$

$$\text{feu } xx dy = (ydx - xdy)V(aa - yy).$$

III. Sit $y = m \sin x + n \cos x$, erit post differentiationem primam $dy = m dx \cos x - n dx \sin x$: quae denuo differentiata posito dx constante dabit

$$ddy = -m dx^2 \sin x - n dx^2 \cos x,$$

haec autem per primam diuisa dat

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2 \text{ feu } ddy + y dx^2 = 0,$$

ex qua non solum finus & cosinus, sed etiam constantes m & n euauerunt.

IV. Sit $y = \sin lx$; erit $A \sin y = lx$, vnde per differentiationem fit $\frac{dy}{V(1-yy)} = \frac{dx}{x}$; quae sumtis quadratis dat $xx dy^2 = dx^2 - yy dx^2$, haecque posito dx constante vltius differentiata praebet,

$$2xx dy ddy + 2x dx dy^2 = -2y dx^2 dy$$

$$\text{feu } xx ddy + x dx dy + y dx^2 = 0.$$

V. Sit $y = ae^{mx} \sin nx$, erit differentiando

$$dy = mae^{mx} dx \sin nx + nae^{mx} dx \cos nx,$$

quae per propositam diuifa dat:

$$\frac{dy}{y} = m dx + \frac{n dx \cos nx}{\sin nx} = m dx + n dx \cot nx.$$

Erit ergo $A \cot \left(\frac{dy}{ny dx} - \frac{m}{n} \right) = nx$. Quae aequatio posito dx constante differentiata dat:

$$n dx = \frac{n dx dy^2 - ny dx ddy}{m^2 y^2 dx^2 + n^2 y^2 dx^2 - 2 m y dx dy}$$

$$\text{seu } (m^2 + n^2) y^2 dx^2 - 2 m y dx dy = dy^2 - y ddy.$$

Perfpicuum igitur eft, etiamfi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes infint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuiffe, quae a quantitatibus transcendentibus vtrunque fit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales siue primi siue altioris gradus, quae duas variables x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variables exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variables x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y , qua y fit functio quaedam ipsius x . Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, vt si ea vbique loco y , eiusque differentiale loco dy , atque eius altiora differentia loco d^2y , d^3y , &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functio-

nis

nis inuestigatione versatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, vt proposita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipsius x , cui altera variabilis y est aequalis, definiatur; seu quod eodem redit, vt aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2ydy - a dx - \frac{yydx}{a} + x dx = 0$$

ad quam supra §. 288 peruenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae simul hac aequatione finita

$yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc sit

$$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}, \text{ patet } V(ax + bbe^{\frac{x}{a}}) = y$$

eam esse functionem ipsius x , cui variabilis y vi propositae aequationis differentialis sit aequalis. Namque si in

aequatione loco yy , hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco

$2ydy$ eius differentiale $a dx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$ substituamus, orietur aequatio identica:

$$a dx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - a dx - x dx - \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + x dx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variables x & y exhibere, quae autem sine subsidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x , quae ipsi y , vi cuiuscunque aequationis differentialis siue primi siue altioris gradus, conueniat; sitque

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \quad dq = r dx; \quad \&c.$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = q dx^2$; $d^3y = r dx^3$; &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per diuisionem euanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r , &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r , &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio reuera tantum inter duas variables x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quantam relationem inter variables x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusuis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perueniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset peruentum.

299. Hoc igitur modo aequatio quacunque differentialis ita ad formam finitam reduci potest, vt in ea nonnisi quantitates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parua prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x , si ponatur

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \quad dq = r dx; \quad \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differen-
tia-

tialia secunda & altiora per potestates ipsius dx exprimentur, quae deinceps per diuisionem penitus tollentur. Vt si proponeretur haec aequatio

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur constans; facto

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad \& \quad dq = rdx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

postquam scilicet tota aequatio per dx^3 est diuisa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque sint ordinis, his substitutionibus

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \quad \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque si aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita vt differentialia prima eam tantum ingrediantur, per istam reductionem praeter variables y & x insuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit secundi ordinis, continens differentialia secunda, praeterea quantitas q ; ac, si fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur insuper quantitas r , sicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorsus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis constantis penitus cessat; neque amplius, etiamsi insint quantitates q , r , ex differentialibus secundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale constans sit assumtum. Perinde enim est, vtrum

in evolutione aliquod differentiale pro lubitu constans statuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis secundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum constans esse assumptum perhibetur; hoc modo statim explorari poterit, utrum ea determinatam relationem inter variables x & y contineat, nec ne? Quia enim nullum differentiale constans assumitur, in arbitrio nostro relinquitur, quodnam differentiale constans ponere velimus; hincque tantum erit dispiciendum, utrum diversis differentialibus constantibus positis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quod si non eueniat, certum est signum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in solutione nullius problematis locum habere posse. Tutissimus autem modus simulque facillimus hoc explorandi erit is ipse, quem supra in simili negotio pro expressionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant significatus? dignoscendis tradidimus.

302. Proposita ergo huiusmodi aequatione differentiali secundi altiorisue ordinis, in qua nullum differentiale constans sit positum, statuatur differentiale dx constans; deinde haec aequatio, uti supra de expressionibus differentialibus ostendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans supponat, statuendo scilicet $dd y - \frac{dy d dx}{dx}$ loco $dd y$;

&

$$\& d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \text{ loco } d^3y, \\ \&c.$$

Quo facto dispiciatur, vtrum aequatio hoc modo resul-
tans conueniat cum aequatione proposita; quod si eue-
niat, aequatio proposita determinatam relationem inter
 x & y complectetur; sin autem fecus accadat, aequatio
erit vaga, neque definitam rationem inter variables x & y
exprimet: quemadmodum hoc iam ante fufius est de-
monstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequa-
tio proposita, quae nullo differentiali constante posito re-
perta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx constans, atque ea transibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum consideratio differentialis constantis
exuatur, modo ante praescripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a proposita tantum ratione primi termini
discrepat, videndum est, vtrum sit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod

si deprehendatur, aequatio proposita fixam relationem in-
ter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo inte-
grali tradendas reperietur, quodcunque differentiale pri-

num constans accipiatur. At, si fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio proposita erit impossibilis.

304. Nisi igitur haec proposita aequatio :

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0$$

fit absurda, necesse est ut fit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo euenire potest: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ seu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipsa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione proposita est orta: quo posteriore casu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum proposita, eandemque relationem inter x & y continebit, sicque sine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim sit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione proposita subtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Cum autem sit $dy = -\frac{Pdx}{Q}$, differentialia prorsus extinguere poterunt, nasceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in solutione problematis nullo differentiali constante assumpto peruentum esse ad hanc aequationem:

$$x^3 ddx + xxyddy - yydx^2 + xx dy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit

Erit ergo, cum aequationem absurdum non continere constet: $x^3 dx + xxydy = 0$, seu $xdx + ydy = 0$:

cuius differentiale erit

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydx dy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a proposita subtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydx dy = 0, \text{ seu}$$

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem sit

$$xdx + ydy = 0; \text{ erit } 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \text{ seu } yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, siquidem ea consentit cum differentiali primum inuenta $xdx + ydy = 0$. Qui consensus, nisi se manifestasset, aequatio proposita pro impossibili esset habenda; cum autem hoc casu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ sine calculo integrali elicere licuit.

306. Vt vero etiam exemplum aequationis impossibilis afferamus, proposita sit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale constans sit assumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydx dy + 2xdx dy = 0,$$

quae propositae aequalis posita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydx dy - 2xdx dy.$$

Cum vero sit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differenti-
bus obtinebitur:

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x} \quad \text{seu}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae utrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ con-
sentiatur, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{seu } \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax + 4xy - 2xx^2}$$

$$\text{at ex illa est } \frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}, \text{ foretque ergo}$$

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{seu } axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} =$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inuenta est

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab ista subtracta relinquit:

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3,$$

quae resoluitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$
constare potest, at vero aequationi finitae primum inuen-
tae

tae aduersatur, nisi statuatur $z = 0$, vel nisi vtraque variabilis x & y constans statuatur, quo quidem casu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus satisfiit, aequatio proposita subsistere nequit.

307. Consideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variables x , y , & z inuoluentes, quae erunt vel primi, vel secundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam scrutandam notari oportet, aequationem finitam tres variables complectentem determinare relationem, quam vnaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio sit z ipsarum x & y . Quemadmodum igitur aequatio huiusmodi finita resoluitur, si reperiatur qualis functio ipsarum x & y loco z substitui debeat, ut aequationi satisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variables complectens determinabit, qualis functio vna sit reliquarum; isque huiusmodi aequationem resoluisse censendus est, qui indicauerit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z substituta aequationi satisfiat, seu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis resoluitur, si vel functio ipsarum x & y valorem ipsius z exhibens definiatur, vel aequatio finita assignetur, qua idem debitus ipsius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variables complectens, semper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non semper euenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiusmodi aequationes, quibus
pla-

plane nullo modo satisfieri poterit, quaecunque functio ipsarum x & y in locum ipsius z substituatur. Vti si proposita fuerit haec aequatio $zdy = ydx$ facile patet, nullam prorsus dari functionem ipsarum x & y , quae loco z substituta reddat $zdy = ydx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguuntur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipsarum x & z , quae loco y substituta eidem aequationi satisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipsarum x & z , in eius differentiali dy inest dz , quod quia in aequatione non inest, destrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x , y , & z dari potest, quae aequationi differentiali $zdy = ydx$ conueniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variables continentes distribui oportet in imaginarias & reales. Huiusmodi autem aequatio erit imaginaria seu absurda, cui per nullam aequationem finitam satisfieri potest, cuiusmodi erat illa $zdy = ydx$, quam modo considerauimus. Aequatio autem erit realis, cui aequiualens aequatio finita exhiberi potest, quod euenit, si vna variabilis aequalis fit certae cuiuspiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \text{ fitque } z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imaginarias

ginarias & reales diligentissime est obseruandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integram, hoc est aequationem finitam satisficientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z , tantum inesse differentialia dx & dy , differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y , quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tollentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, vti fit in hac aequatione:

$$z dy - z dx = y dy - x dx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem inuestigatur, quibus casibus hoc eueniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variables involuens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse poterit. Quos casus vt euoluamus, ponamus

L I

P

P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = P dx + Q dy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaequam ipsarum x & y , cuius differentiale fit

$$dz = p dx + q dy, \text{ eritque } P = p \text{ \& } Q = q.$$

At supra demonstrauius: $p dx + q dy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y , nisi fit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, vti ante assumimus

$\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy diuisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q , posita sola x variabili, diuisum per dx . Quocirca aequatio $dz = P dx + Q dy$ realis esse nequit, nisi fit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = P dx + Q dy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z , P vero & Q sint functiones ipsarum x & y , tertiam variabilem z non complectentes. Vt enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y , necesse est vt fit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur,
diiu-

diudicari potest, utrum sit realis an absurda. Sic patebit hanc aequationem $zdz = ydx + xdy$ esse realem, nam ob

$$P=y \text{ \& } Q=x, \text{ fit } \left(\frac{dP}{dy}\right)=1=\left(\frac{dQ}{dx}\right)=1.$$

Haec vero aequatio $azdz = yydx + xx dy$ est absurda, fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right)=2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)=2x$; qui valores sunt inaequales.

313. Vt autem criterum latissime patens inuestigemus, sint $P, Q,$ & R functiones quaecunque ipsarum $x, y,$ & z ; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, siquidem sit primi gradus, continebitur in hac forma: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Quoties ergo haec aequatio est realis, z aequabitur functioni cuiusdam ipsarum x & y ; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = pdx + qdy$. Quare si in aequatione proposita ista functio ipsarum x & y loco z , & $pdx + qdy$ loco dz substituatur, necesse est, ut prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione proposita fiat:

$$dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R},$$

si in $P, Q,$ & R valor ille loco z substituatur, necesse est ut fiat

$$p = -\frac{P}{R}, \text{ \& } q = -\frac{Q}{R}.$$

314. Quoniam vero est $dz = p dx + q dy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y fit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

$$\text{erit} \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{R dP + P dR}{RR dy}\right)$$

$$\& \quad \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{R dQ + Q dR}{RR dx}\right)$$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

vbi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP , dQ , dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitibus P , Q , & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P , Q , & R sunt functiones ipsarum x , y , & z , ponamus

$$dP = a dx + b dy + c dz$$

$$dQ = d dx + e dy + f dz$$

$$dR = g dx + h dy + i dz$$

vbi

vbi $\alpha, \xi, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z ubique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz , ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$\begin{aligned} dP &= (\alpha + \gamma p)dx + (\xi + \gamma q)dy \\ dQ &= (\delta + \zeta p)dx + (\epsilon + \zeta q)dy \\ dR &= (\eta + \iota p)dx + (\theta + \iota q)dy. \end{aligned}$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dy}\right) &= \theta + \iota q ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p \\ \left(\frac{dP}{dy}\right) &= \xi + \gamma q ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p. \end{aligned}$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, ut sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inuenti valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\xi + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante inuenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$

qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non substituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\xi + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

$$\text{feu } 0 = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\xi - \delta).$$

L13

Quia

Quia autem quantitates $\xi, \delta, \gamma, \eta, \zeta, \theta$, per differentiationem inveniuntur, erit superiori notandi modo adhibito

$$0 = P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right).$$

Quae proprietas, nisi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, sed imaginaria & absurda.

317. Quanquam hanc regulam ex consideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aequae ingrediuntur, manifestum est, & reliquarum consideratione, eandem expressionem prodituram fuisse. Proposita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variables inuoluat, quacunque, statim diiudicari poterit utrum sit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right),$$

qui si fuerit $= 0$, aequatio erit realis, sin autem non fuerit $= 0$, certum hoc est signum, aequationem esse imaginariam seu absurdam.

318. Aequatio proposita per diuisionem quoque semper ad huiusmodi formam reduci potest:

$$P dx + Q dy + dz = 0,$$

in

in quam, cum prior abeat si fiat $R = 1$, criterium simplicius exprimeretur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Quoties enim haec expressio reuera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eueniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstrauius, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, vtrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione $P dx + Q dy + R dz = 0$, fuerit P functio ipsius x , Q functio ipsius y , & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem.

Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \quad \& \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0;$$

ideoque tota expressio criterii sponte euanesceat.

320. Si fuerit ut ante P ipsius x , & Q ipsius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipsarum x , y & z , aequatio erit realis si fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ seu } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

Sic si proposita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0.$$

Quia hic est $P = \frac{2}{x}$; $Q = \frac{3}{y}$, & $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$

$$\text{hinc } \left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}; \text{ atque } \left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxy}{z^6};$$

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio proposita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipsarum x & y , at R functio ipsius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \text{ \& } \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

aequatio erit realis si fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec

eadem vero conditio requiritur, si $Pdx + Qdy$ debeat esse differentiale determinarum, seu ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae ipsarum x & y ortum. Hucque redit quod supra §. 312 iam observauimus, aequatio-

tionem $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y , realem esse non posse, nisi sit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$. Ambō autem isti casus inter se prorsus conueniunt: nam loco $R dz$, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z .

322. Vt hoc criterium inuentum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy \\ + (4x^2y^2 - 6xyz^2)dz = 0,$$

qua cum forma generali comparata fit:

$$P = 6xy^2z - 5yz^3; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2$$

$$Q = 5x^2yz - 4xz^3; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

His inuentis valoribus aequatio iudicium continens erit
haec:

M m

+

$$+ (6xy^4z - 5yz^3) (-3axy - 6xz^2)$$

$$+ (5x^2yz - 4xz^3) (2xyy + 9yz^2)$$

$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2) (2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expressio si euoluatur, omnes termini actu se mutuo destruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propositam esse realem.

323. Quando autem expressio hoc modo ex criterio eruta non euanescit, tum id signum est aequationem propositam esse imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita inuenitur, ea, si quidem aequationi differentiali conueniat, simul relationem indicabit, quam variables inter se tenent. Atque hoc modo ii casus, quorum supra meminimus (310), euoluuntur. Sit enim proposita ista aequatio:

$$(z - x) dx + (y - z) dy = 0,$$

$$\text{fiet } P = z - x; \quad Q = y - z; \quad \& \quad R = 0,$$

$$\text{porro } \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1, \quad \& \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1.$$

$$\text{Aequatio iudicium exhibens fit } P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$$

$$\text{feu } z - x = z - y; \quad \text{vnde fit } y = x.$$

Quoniam igitur hic casu euenit, ut aequatio $y = x$ simul aequationi differentiali satisfaciatur, dicendum est propositam aequationem nil aliud significare, nisi esse $y = x$.

324. Proposita ergo aequatione differentiali tres variables continente :

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

tres considerandi erunt casus sequentes, ad quos haec aequatio deducit :

$$P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = 0.$$

Primus est si haec expressio reuera fit $= 0$, tumque aequatio proposita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non sit identica, tum dispiciendum est, vtrum ea aequationi propositae satisfaciat: quod si euenit, habebitur aequatio finita, qui est casus secundus. Tertius autem casus locum habet, si aequatio finita cum proposita differentiali subsistere nequeat, atque tum aequatio proposita erit imaginaria: neque enim vlla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipsi satisfaciat.

325. Casus primus ac tertius per se sunt perspicui, secundus autem, etsi rarissime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam supra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia insint :

$$(x - y) dx + x dy + (y - z) dz = 0.$$

M m 2

Erit

Erit ergo :

$$P = z - y ; \left(\frac{dQ}{dz} \right) = 0 ; \left(\frac{dR}{dy} \right) = 1$$

$$Q = x ; \left(\frac{dR}{dx} \right) = 0 ; \left(\frac{dP}{dz} \right) = 1$$

$$R = y - z ; \left(\frac{dP}{dy} \right) = -1 ; \left(\frac{dQ}{dx} \right) = 1$$

unde aequatio finita criterium continens euadet :

$$z - x - y = 0, \text{ seu } z = x + y$$

substituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque $x dx + x dy - x(dx + dy) = 0$;

quae aequatio, cum sit identica, sequitur aequationem differentialem nil aliud significare, nisi $z = x + y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variables insunt contineri in hac forma :

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

dubium hic nasci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresue dimensiones constituunt, cuiusmodi est haec :

$$P dx^2 + Q dy^2 + R dz^2 = 2S dx dy + 2T dx dz + V dy dz.$$

Ve-

Verum de huiusmodi aequationibus notandum est, eas nullo modo reales esse posse, nisi habeant diuifores prioris formae, qui propterea aequationes simplices constituent. Cum enim ex hac aequatione fiat :

$$dz = \frac{-Tdx - Vdy + V(dx^2(T^2 - PR) + 2dx dy(TV + RS) + dy^2(V^2 - QR))}{R}$$

facile patet z functioni cuiusdam ipsarum x & y , seu dz huiusmodi expressioni $p dx + q dy$ aequale fieri non posse, nisi quantitas irrationalis euadat rationalis, quod eueniet si fuerit :

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

feu

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

Nisi ergo haec aequatio finita ipsa aequationi propositae satisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Superesset vt in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variables complectuntur, perpenderemus, casusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae euadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praesertim, cum ex iisdem fontibus,

bus, quos hic aperuimus, sequantur. Ceterum si in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem causam hic quoque aequationes, quae plures variables complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, si unquam occurrerent, ex principiis hic traditis sine negotio examinari possent. Quare his expositis Institutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progressuri ad insignes usus ostendendos, quos iste calculus cum in ipsa Analyfi, tum in Geometria sublimiori affert.



INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS POSTERIOR

CONTINENS

VSUM HUIUS CALCULI IN ANALYSI
FINITORUM, NEC NON IN DOCTRINA
SERIERUM.

THE
JOURNAL
OF
CAPTAIN J. H. HARRIS
OF THE
ARMY OF THE UNITED STATES
IN THE
MEXICAN WAR
1846-1848
BY
J. H. HARRIS
CAPTAIN U. S. ARMY
NEW YORK
PUBLISHED BY
J. H. HARRIS
1848



CAPUT I.

DE TRANSFORMATIONE SERIERUM.

I.



Cum nobis propositum sit vsum Calculi differentialis tam in vniuersa Analyfi, quam in doctrina de seriebus ostendere; nonnulla subsidia ex Algebra communi, quae vulgò tractari non solent, hic erunt repetenda. Quae quamuis maximam partem iam in Introductione sumus complexi, tamen quaedam ibi sunt praetermissa, vel studio quod expediat ea tum demum explicari, quando necessitas id exigat, vel quia cuncta, quibus opus sit futurum, praeuideri non poterant. Huc pertinet transformatio serierum, cui hoc Caput destinauimus, qua quaeuis series in innumerabiles alias series transmutatur, quae omnes eandem habeant summam communem; ita vt, si seriei propositae summa sit cognita, reliquae series omnes simul summari queant. Hoc autem capite praemisso, eo vberius doctrinam serierum per calculum differentialem & integralem amplificare poterimus.

2. Considerabimus autem potissimum eiusmodi series, quarum singuli termini per potestates successiuas quantitatis cuiusdam indeterminatae sunt multiplicati: quo-

N n

niam

niam hae latius patent, maioremque vtilitatem afferent.

Sit igitur proposita sequens series generalis, cuius summam, siue sit cognita siue secus, ponamus $= S$, sitque

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

Ponatur iam $x = \frac{y}{1+y}$, & cum sit per series infinitas

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \&c.$$

$$x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 6y^6 - 7y^7 + \&c.$$

$$x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \&c.$$

$$x^4 = y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \&c.$$

&c.

hi valores substituti, serieque secundum potestates ipsius y disposita, dabunt

$$\begin{aligned} S = ay - ay^2 + ay^3 - ay^4 + ay^5 \&c. \\ + b - 2b + 3b - 4b \\ + c - 3c + 6c \\ + d - 4d \\ + e. \end{aligned}$$

3. Quoniam posuimus $x = \frac{y}{1+y}$; erit $y = \frac{x}{1-x}$;

quo valore loco y substituto, series proposita

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in hanc:

$$S = a \cdot \frac{x}{1-x} + (b-a) \frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a) \frac{x^3}{(1-x)^3} + \&c.$$

in

in qua coefficientis secundi termini $b - a$ est differentia prima ipsius a ex serie $a, b, c, d, e, \&c.$ quam supra per Δa exposuimus; coefficientis tertii termini $c - 2b + a$ est differentia secunda $\Delta^2 a$; coefficientis quarti est differentia tertia $\Delta^3 a$, &c. Hinc differentiis ipsius a continuis, quae formantur ex serie $a, b, c, d, e, \&c.$ adhibendis proposita Series transmutabitur in hanc

$$S = \frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4} \Delta^3 a + \&c.$$

cuius ergo seriei summa habebitur, si propositae summa fuerit cognita.

4. Si igitur series $a, b, c, d, \&c.$ ita fuerit comparata; ut tandem differentias habeat constantes, quod evenit, si eius terminus generalis fuerit functio rationalis integra, tum series posterior $\frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a + \&c.$ tandem habebit terminos evanescentes, sicque eius summa per expressionem finitam exhiberi poterit. Ita si seriei $a, b, c, d, \&c.$ differentiae primae iam fuerint constantes, tum seriei huius;

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

summa erit $= \frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a.$ At si illius seriei coefficientium differentiae secundae fiant constantes, tum ipsius seriei propositae erit

$$= \frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta \Delta a.$$

N n 2

Vnde

Vnde summae huiusmodi serierum ex differentiis coefficientium facile inuenientur.

I. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \&c.$$

$$\text{Diff. I. } 2, 2, 2, 2, \&c.$$

Cum ergo differentiae primae sint constantes, ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$, erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \&c.$$

$$\text{Diff. I. } 3, 5, 7, 9, \&c.$$

$$\text{Diff. II. } 2, 2, 2, \&c.$$

Quia itaque est

$$a = 1; \Delta a = 3; \Delta^2 a = 2;$$

erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x+xx}{(1-x)^3}.$$

III. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 136x^5 + 259x^6 + \&c.$$

$$\text{Diff. I. } 11, 25, 45, 71, 103$$

$$\text{Diff. II. } 14, 20, 26, 32$$

$$\text{Diff. III. } 6, 6, 6,$$

Quia

Quia est

$$a = 4; \Delta a = 11; \Delta^2 a = 14; \Delta^3 a = 6;$$

erit summa

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4};$$

sive

$$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+xx)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

5. Quoniam hoc modo istarum serierum in infinitum progredientium summae inveniuntur; tamen ex iisdem principiis hae Series quoque ad datum quemvis terminum summari possunt. Proposita enim sit haec series

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots + ox^n,$$

& quaeratur eius summa, si in infinitum progrediatur,

$$\text{quae erit} = \frac{x}{1-x} a + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 a + \&c.$$

Nunc considerentur eiusdem seriei termini post ultimum ox^n sequentes, qui sint

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \&c.$$

cuius seriei, si per x^n diuidatur, summa, vt ante inueniri poterit; quae rursus per x^n multiplicata erit

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2} \Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3} \Delta^2 p + \&c.$$

quae summa si a totius seriei in infinitum continuatae

N n 3

sum-

summa subtrahatur, remanebit summa portionis propositae quaesita: $S =$

$$\frac{x}{1-x} (a-x^np) + \frac{x^2}{(1-x)^2} (\Delta a - x^n \Delta p) + \frac{x^3}{(1-x)^3} (\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p) + \dots$$

I. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n.$$

Tam horum coefficientium, quam terminum ultimum sequentium quaerantur differentiae:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \&c. & n+1, & n+2, & n+3, & \&c. \\ 1, & 1, & 1, & 1, & & 1, & 1, & 1, & & \end{array}$$

eritque

$$a = 1, \quad \Delta a = 1, \quad p = n+1, \quad \Delta p = 1,$$

unde summa quaesita est:

$$S = \frac{x}{1-x} (1 - (n+1)x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2} (1 - x^n),$$

seu

$$S = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S = 1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots + n^2x^n.$$

Inuestigentur primum differentiae hoc modo:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 4, & 9, & 16, & \&c. & (n+1)^2, & (n+2)^2, & (n+3)^2, & \&c. \\ 3, & 5, & 7, & & & 2n+3, & 2n+5, & & & \\ 2, & 2, & & & & 2, & & & & \end{array}$$

qui-

quibus inuentis erit summa quaesita $S =$

$$\frac{x}{1-x} (1-(n+1)^2 x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2} (3-(2n+3)x^n) + \frac{x^3}{(1-x)^3} (2-2x^n),$$

feu $S =$

$$\frac{x + xx - (n+1)^2 x^{n+1} + (2n+2n-1)x^{n+2} - nx^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

6. Quodsi autem series proposita non eiusmodi habeat coefficientes, qui tandem ad differentias constantes deducantur, tum transmutatio hic exhibita nihil confert ad eius summam determinandam. Neque vero etiam eius ope summa proxime definiri poterit commodius, quam per ipsam seriei propositae additionem fieri licet. Si enim in serie $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$ fuerit $x < 1$ quo solo casu summatio proprie sic dicta locum habere potest, erit $\frac{x}{1-x} > x$, ideoque non series minus convergit quam proposita. Sin autem in serie proposita fuerit $x = 1$ tum nouae seriei omnes plane termini fiunt infiniti, quo ergo casu ista transmutatio nullius prorsus erit vfus.

7. Consideremus autem seriem, in qua signa $+ \& -$ alternatim se excipiant, quae ex praecedente deducetur ponendo x negatiuum. Si itaque fuerit

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \&c.$$

cuius seriei negatiua oritur, si in praecedente statuatur

tur x negatiuum. Sumantur ergo vt ante differentiae $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \&c.$ ex serie coefficientium $a, b, c, d, e, \&c.$ signis ad solas ipsius x potestates relatis, atque series proposita transformabitur in hanc: $S =$

$$\frac{x}{1+x} a - \frac{x^2}{(1+x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3} \Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4} \Delta^3 a + \&c.$$

vnde perspicitur aequationem propositam iisdem casibus summari posse quibus praecedens. Scilicet si series $a, b, c, d, \&c.$ tandem ad differentias constantes deducatur.

8. Hoc autem casu ista transformatio commodam praebet approximationem ad valorem seriei propositae:

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - fx^6 + \&c.$$

quantuscunque enim x fuerit numerus, fractio $\frac{x}{1+x}$, secundum cuius potestates altera series progreditur, fit vnitatem minor: atque si sit $x = 1$, erit $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. Sin

autem sit $x < 1$ puta $x = \frac{1}{n}$ fiet $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, ideoque series per transformationem inuenta semper magis conuergit quam proposita. Consideremus imprimis casum, quo $x = 1$, qui ad series summandas ingens affert subsidium, sitque

$$S = a - b + c - d + e - f + \&c.$$

ac denotentur differentiae primae, secundae & sequentes ipsius a , quas progressio $a, b, c, d, e, \&c.$ praebet per

per Δ , $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. quibus inuentis erit

$$S = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \frac{1}{16}\Delta^3 a + \&c.$$

quae nisi actu terminatur, summam vero proximam satis commodè exhibet.

9. Vsum igitur huius vltimae transmutationis, qua sumimus $x = 1$, in aliquot exemplis ostendamus, ac primo quidem in eiusmodi, quibus vera summa finite exprimi potest. Tales sunt series diuergentes, quibus numeri a, b, c, d , &c. tandem ad differentias constantes deducant, quarum summae, cum recepto huius vocis significatu, proprie non exhiberi queant, vocem summae hic eo sensu, quem supra tribuimus, accipimus, ita vt denotet valorem expressionis finitae, ex cuius evolutione proposita series nascatur.

I. Sit igitur proposita haec series Leibnitzii:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \frac{1}{2}$.

II. Sit proposita ista series:

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.$$

$$\text{Diff. I} = 1, 1, 1, 1, 1, \&c.$$

$$\text{Cum ergo sit } a = 1, \Delta a = 1, \text{ erit } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

III. Sit proposita haec series:

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \&c.$$

$$\text{Diff. I} = 2, 2, 2, 2, \&c.$$

$$\text{Ob } a = 1 \text{ \& } \Delta a = 2 \text{ fit } S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0.$$

00

IV.

IV. Sit proposita haec series trigonalium numerorum.

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = 2, 3, 4, 5, 6, \&c.$$

$$\text{Diff. 2} = 1, 1, 1, 1, \&c.$$

Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit

$$S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

V. Sit proposita series quadratorum:

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = 3, 5, 7, 9, 11, \&c.$$

$$\text{Diff. 2} = 2, 2, 2, 2, \&c.$$

Ob $a = 1$; $\Delta a = 3$; $\Delta\Delta a = 2$; erit $S = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$.

VI. Sit proposita series biquadratorum:

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = 15, 65, 175, 369, 671$$

$$\text{Diff. 2} = 50, 110, 194, 302$$

$$\text{Diff. 3} = 60, 84, 108$$

$$\text{Diff. 4} = 24, 24$$

Erit ergo $S = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} + \frac{65}{8} - \frac{175}{16} + \frac{369}{32} - \frac{671}{64} = 0$.

10. Si series magis diuergant vti geometriae aliaeque similes, eae hoc modo statim in seriem magis convergentem transmutantur, quae nisi adhuc satis conuergat, eodem modo in aliam magis conuergentem convertetur.

I. Sit

I. Sit proposita haec series geometrica :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = 1, 2, 4, 8, 16, \&c.$$

$$\text{Diff. 2} = 1, 2, 4, 8, \&c.$$

$$\text{Diff. 3} = 1, 2, 4, \&c.$$

Cum igitur in omnibus differentiis primus terminus sit $= 1$, Summa seriei exprimetur hoc modo

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \&c.$$

cuius summa est $= \frac{1}{3}$, oritur enim ex evolutione fractionis $\frac{1}{2+1}$, dum proposita oritur ex $\frac{1}{1+2}$.

II. Sit proposita haec series recurrens :

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = 1, 3, 7, 17, 41, 99, \&c.$$

$$\text{Diff. 2} = 2, 4, 10, 24, 58, \&c.$$

$$\text{Diff. 3} = 2, 6, 14, 34, \&c.$$

$$\text{Diff. 4} = 4, 8, 20, \&c.$$

$$\text{Diff. 5} = 4, 12, \&c.$$

$$\text{Diff. 6} = 8, \&c.$$

&c.

Continuarum ergo differentiarum termini primi constituunt hanc progressionem geometricam geminatam :

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \&c.$$

vnde erit

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{2}{16} + \frac{4}{32} - \frac{4}{64} + \frac{8}{128} - \&c.$$

O 0 2

cum

cum igitur praeter primum terminum reliqui bini se continuo destruant, erit $S = \frac{1}{2}$. Oritur autem series proposita ex evolutione fractionis $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, vti in expressione naturae serierum recurrentium ostendimus.

III. Sit proposita series hypergeometrica :

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \&c.$$

cuius differentias continuas hoc modo commodius inuestigabimus :

	Diff. 1.	Diff. 2.	Diff. 3.
1	1	3	11
2	4	14	64
6	18	78	426
24	96	504	3216 &c.
120	600	3720	27240
720	4320	30960	256320
5040	35280	287280	2656080
40320	322560	2943360	
362880	3265920		
3628800			

Quibus differentiis ulterius continuatis erit :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} -$$

$$\frac{16687}{256} + \frac{148329}{512} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} -$$

$$\frac{190899411}{4096} + \&c.$$

Col-

Colligantur duo termini initiales, eritque $S = \frac{1}{4} + A$
existente

$$A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \&c.$$

Si nunc eodem modo differentiae capiantur, erit

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}} \\ - \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \&c.$$

Colligantur duo termini initiales, quia conuergunt, fietque

$$A = \frac{7}{2^6} + B \text{ existente } B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \&c.$$

cuius seriei differentiis denuo sumendis fiet:

$$B = \frac{21}{2^9} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} \\ + \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \&c.$$

Colligantur quatuor termini initiales in vnum & statuatur

$$B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C \text{ existente } C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \&c.$$

fietque aliquot terminis actu colligendis proxime:

$$C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}. \text{ Ex his ergo tandem concludetur}$$

summa seriei propositae: $S = 0,40082038$, quae
tamen vix ultra tres quatuorue figuras pro accurata ha-

beri potest ob nimiam seriei diuergentiam; est tamen certe iusto minor. Aliunde enim inueni hanc summam esse $= 0,4036524077$; vbi ne vltima quidem nota a vero aberrat.

II. Imprimis autem haec transmutatio ingentem affert vtilitatem ad series iam quidem, sed lente conuergentes in alias, quae multo promptius conuergant, transmutandas. Quoniam vero termini sequentes minores sunt quam praecedentes, differentiae primae fiunt negativae; vnde in sequentibus signorum ratio probe est habenda.

I. Sit proposita haec series:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$\text{Diff. 1} = -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2.3}; -\frac{1}{3.4}; -\frac{1}{4.5}; -\frac{1}{5.6}$$

$$\text{Diff. 2} = +\frac{1}{3}; \frac{2}{2.3.4}; \frac{2}{3.4.5}; \frac{2}{4.5.6}$$

$$\text{Diff. 3} = -\frac{1}{4}; -\frac{2.3}{2.3.4.5}; -\frac{2.3}{3.4.5.6}$$

$$\text{Diff. 4} = +\frac{1}{5}; \&c.$$

Hinc ergo erit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$$

utramque autem hanc seriem logarithmum hyperbolicum binarii exhibere, iam in Introductione ostendimus.

II. Sit

II. Sit proposita ista series pro circulo:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. 1} = -\frac{2}{1.3}; -\frac{2}{3.5}; -\frac{2}{5.7}; -\frac{2}{7.9}; -\frac{2}{9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. 2} = +\frac{2.4}{1.3.5}; \frac{2.4}{3.5.7}; \frac{2.4}{5.7.9}; \frac{2.4}{7.9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. 3} = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7}; -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}; - \text{ \&c.}$$

\&c.

Hinc ergo concluditur fore summam seriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{ \&c.}$$

feu

$$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{ \&c.}$$

III. Quaeratur valor huius seriei infinitae:

$$S = l_2 - l_3 + l_4 - l_5 + l_6 - l_7 + l_8 - l_9 \text{ \&c.}$$

Quia differentiae ab initio nimis sunt inaequales, colligantur actu termini vsque ad l_{10} ex tabulis, quorum valor reperietur $= -0,3911005$; eritque

$$S = -0,3911005 + l_{10} - l_{11} + l_{12} - l_{13} + l_{14} - l_{15} + \text{ \&c.}$$

in infinitum.

De

Desumantur hi logarithmi ex tabulis, eorumque differentiae quaerantur hoc modo

	Diff.1.	Diff.2.	Diff.3.	Diff.4.	Diff.5.
$l_{10} = 1,0000000$	+	—	+	—	+
$l_{11} = 1,0413927$	413927	36042			
$l_{12} = 1,0791812$	377885	30263	5779	1292	
$l_{13} = 1,1139434$	347622	25776	4487	924	368
$l_{14} = 1,1461280$	321846	22213	3563		
$l_{15} = 1,1760913$	299633				

Ex quibus reperitur

$$l_{10} - l_{11} + l_{12} - l_{13} + \&c. =$$

1,0000000	413927	36042	5779	1292	368
2	4	8	16	32	64

$$= 0,4891606.$$

Hinc valor seriei propositae erit

$$S = l_2 - l_3 + l_4 - l_5 + \&c. = 0,0980601;$$

cui logarithmo respondet numerus 1,253315.

12. Quemadmodum has transmutationes obtinui-
mus ponendo in serie loco x hanc fractionem $\frac{y}{1 \pm y}$,
ita innumerabiles aliae transmutationes orientur, si loco x
aliae functiones ipsius y substituantur. Sit iterum pro-
posita ista series:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

atque ponatur $x = y(1 - y)$, quo facto series orietur
sequens

$$S =$$

$$\begin{aligned}
 S = & ay - ayy \\
 & + byy - 2by^3 + by^4 \\
 & + cy^3 - 3cy^4 + 3cy^5 - cy^6 \\
 & + dy^4 - 4dy^5 + 6dy^6 \\
 & + ey^5 - 5ey^6 \dots &c. \\
 & + fy^6
 \end{aligned}$$

Quodsi ergo altera harum serierum fuerit summabilis, simul alterius summa erit cognita. Ita si statuatur

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{x}{1-x}, \text{ erit}$$

$$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \dots &c.$$

$$\text{Cuius ergo seriei summa erit} = \frac{y - yy}{1 - y + yy}.$$

13. Si altera series alicubi abrumptur, tum summa prioris absolute exhiberi poterit. Ponamus esse $a = 1$, & in serie inuenta omnes terminos post primum euanescere, vt sit $S = y$; ideoque ob $x = y - yy$, erit summa prioris $= \frac{1}{2} - V(\frac{1}{4} - x)$.

Fiet autem ob $a = 1$; vt sequitur:

$$b = 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot 2^{12} \quad \&c.$$

Pp

vnde

vnde prior series abibit in hanc: $S =$
 $\frac{x}{2} - V(\frac{x}{4} - x) = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \&c.$
 quae eadem inuenitur, si quantitas furda $V(\frac{x}{4} - x)$ in
 feriem euoluatur, atque ab $\frac{x}{2}$ subtrahatur.

14. Statuamus, quo transmutatio latius pateat
 $x = y(1 + ny)^v$, atque series proposita:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in sequentem: $S = ay + \frac{v}{1} n ay^2$
 $+ by^2$
 $+ \frac{v(v-1)}{1.2} n^2 ay^3 + \frac{v(v-1)(v-2)}{1.2.3} n^3 ay^4 + \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{1.2.3.4} n^4 ay^5$
 $+ \frac{2v}{1} nby^3 + \frac{2v(2v-1)}{1.2} n^2 by^4 + \frac{2v(2v-1)(2v-2)}{1.2.3} n^3 by^5$
 $+ cy^3 + \frac{3v}{1} ncy^4 + \frac{3v(3v-1)}{1.2} n^2 cy^5$
 $+ dy^4 + \frac{4v}{1} ndy^5$
 $+ ey^5$
 $\&c.$

Si ergo illius seriei summa fuerit cognita, & huius si-
 mul summa habebitur, ac vicissim. Quoniam vero
 n & v pro lubitu accipi possunt, hinc ex vna serie sum-
 mabili innumerae aliae summabiles inueniri possunt.

15. Possunt etiam eiusmodi transmutationes fieri,
 vt seriei inuentae summa fiat irrationalis, hoc modo.

Sit

Sit proposita ista series:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \&c.$$

erit

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \&c.$$

Iam statuatur

$$x = \frac{y}{V(1 - ny^2)}; \text{ erit } xx = \frac{y}{1 - ny^2},$$

atque series proposita transmutabitur in hanc:

$$\begin{aligned} \frac{Sy}{V(1 - ny^2)} = & \\ & ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \&c. \\ & + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \&c. \\ & + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \&c. \\ & + dy^8 + 4ndy^{10} + \&c. \\ & + ey^{10} + \&c. \end{aligned}$$

Si igitur summa S ex priori serie fuerit cognita, habebitur simul summa sequentis seriei:

$$\begin{aligned} \frac{S}{V(1 - ny^2)} = & \\ ay + (na + b)y^3 + (n^2a + 2nb + c)y^5 + (n^3a + 3n^2b + 3nc + d)y^7 + \&c. \end{aligned}$$

16. Si sumatur $n = -1$, erunt coefficientes huius seriei differentiae continuae ipsius a , ex serie $a, b, c, d, \&c.$ sin autem signa in serie proposita alternentur, tum posito $n = 1$, coefficientes erunt istae differentiae. Denotent ergo $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \Delta^4 a, \&c.$

differentias primas, secundas, tertias, &c. ipsius a ex serie numerorum $a, b, c, d, e, f, \&c.$

Ac si fuerit:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \&c.$$

posito $x = \frac{y}{V(1+yy)}$; erit

$$\frac{S}{V(1+yy)} = ay + \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 + \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Sin autem fuerit:

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \&c.$$

ponaturque $x = \frac{y}{V(1-yy)}$; erit

$$\frac{S}{V(1-yy)} = ay - \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 - \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Quodsi ergo series $a, b, c, d, e, \&c.$ tandem ad differentias constantes deducat, tum vtraque series absolute summari poterit; quae summatio autem quoque ex superioribus sequitur.

17. Ponamus coefficientes $a, b, c, d, \&c.$ constituere hanc seriem $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \&c.$ eritque, vti supra iam vidimus:

$$a = 1$$

$$\Delta a = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta^3 a = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\Delta^5 a = -\frac{2.4.6}{3.5.7} \quad \&c.$$

vnde

vnde sequentes duas series summabimus :

I. Sit $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = \frac{1}{2} \int \frac{1+x}{1-x} dx$. Posito iam $x = \frac{y}{V(1+yy)}$,
fiet

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{V(1+yy) + y}{V(1+yy) - y} dy = \int (V(1+yy) + y) dy$$

vnde erit

$$\frac{1}{2} \frac{V(1+yy) + y}{V(1+yy)} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^5 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^7 + \&c.$$

II. Sit $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = A \operatorname{tang} x$. Posito iam $x = \frac{y}{V(1-yy)}$,
fiet

$$S = A \operatorname{tang} \frac{y}{V(1-yy)} = A \sin y = A \cos V(1-yy).$$

Hancobrem obtinebitur ista summatio :

$$\frac{A \sin y}{V(1-yy)} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^7 + \&c.$$

18. Possunt quoque loco x functiones transcendentes ipsius y substitui, sicque summationes aliae inuentu difficiliore erui; verumtamen ne series nouae fiant nimis perplexae, eiusmodi functiones eligi debent, quarum potestates facile exhiberi queant; quales sunt quantitates exponentiales e^x . Proposita igitur hac serie :

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

ponatur $x = e^{ny}$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

$$\text{erit } x^2 = e^{2ny} y^2; \quad x^3 = e^{3ny} y^3; \quad \&c.$$

Generaliter vero est, uti constat:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Quare series proposita in hanc transmutabitur:

$$\begin{aligned} S = & ay + 1nay^2 + \frac{1}{2}n^2ay^3 + \frac{1}{6}n^3ay^4 + \frac{1}{24}n^4ay^5 + \&c. \\ & + by^2 + \frac{2}{3}nby^3 + \frac{4}{3}n^2by^4 + \frac{8}{6}n^3by^5 + \&c. \\ & + cy^3 + \frac{3}{2}ncy^4 + \frac{3}{2}n^2cy^5 + \&c. \\ & + dy^4 + \frac{4}{3}ndy^5 + \&c. \\ & + ey^5 + \&c. \end{aligned}$$

I. Sit series proposita geometrica:

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c. \quad \text{erit } S = \frac{x}{1-x}.$$

Ponatur iam

$$n = -1; \quad \text{ut fit } x = e^{-y}; \quad \& \quad S = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{y}{ey-y};$$

reperietur summa haec:

$$\frac{y}{ey-y} = y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{5}{24}y^5 + \frac{19}{120}y^6 - \&c.$$

cuius autem seriei lex non perspicitur.

II. Sint in altera serie omnes termini praeter primum

$$= 0; \quad \text{erit } b = -na; \quad c = \frac{3}{2}n^2a; \quad d = -\frac{8}{3}n^3a;$$

$$e = \frac{125}{24}n^4a; \quad f = -\frac{29}{30}n^5a; \quad \&c.$$

Cum

Cum ergo sit summa $S = ay$; & $x = e^{ny}$; fiet:

$$y = x - nx^2 + \frac{3}{2}n^2x^3 - \frac{8}{3}n^3x^4 + \frac{125}{24}n^4x^5 \\ - \frac{29}{30}n^5x^6 + \&c.$$

Quoniam vero in his seriebus lex progressionis non est manifesta, summationes ex hac substitutione deductae parum habent utilitatis. Praecipue autem notari merentur transformationes ex substitutione $x = \frac{y}{1+y}$ derivatae, quippe quae non solum eximias summationes, sed etiam idoneos modos ad summas serierum appropinquandi suppeditant. His ergo, quae sine calculi differentialis ope sunt expedita, praemissis, ad ipsum huius calculi usum in doctrina serierum ostendendum progrediamur.

CAPUT II.

DE INVESTIGATIONE SERIERUM SUMMABILIVM.

19.

Si Seriei, in cuius terminis inest quantitas indeterminata x , summa fuerit cognita, quae utique erit functio ipsius x ; tum quicunque valor ipsi x tribuatur, seriei summa perpetuo assignari poterit. Quare si loco x ponatur $x + dx$, seriei resultantis summa erit aequalis summae prioris, una cum ipsius differentiali: unde sequitur fore differentiale summae $=$ differentiali seriei. Quia vero hoc modo tam summa, quam singuli seriei termini multiplicati erunt per dx , si ubique per dx diuidatur, habebitur noua series, cuius summa erit cognita. Simili modo si haec series cum sua summa denuo differentietur, & ubique per dx diuidatur, noua exoritur series cum sua summa: sicque ex vna serie summabili quantitatem indeterminatam x inuolvente, per continuam differentiationem innumerae nouae series pariter summabiles elicientur.

20. Quo haec clarius perspiciantur, proposita sit progressio geometrica indeterminata, quippe cuius summa est cognita, haec:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c.$$

Si

Si nunc differentiatio instituat, erit :

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2xdx + 3x^2dx + 4x^3dx + 5x^4dx + \&c.$$

atque diuisione per dx instituta, habebitur :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c.$$

Si de nouo differentietur, atque per dx diuidatur, prodibit :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \&c.$$

feu

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \&c.$$

ubi coefficientes sunt numeri trigonales. Si haec porro differentietur, atque per $3dx$ diuidatur, obtinebitur :

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c.$$

cuius coefficientes sunt numeri pyramidales primi. Sicque ulterius procedendo oriuntur eadem series quas ex euolutione fractionis $\frac{1}{(1-x)^n}$ nasci constat.

21. Latius autem patebit haec serierum inuestigatio, si antequam quacuis differentiatio suscipiatur, ipsa series vna cum summa per quamuis ipsius x potestatem seu functionem multiplicetur. Sic cum sit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

multiplicetur vbique per x^m , eritque

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \&c.$$

Qq

nunc

nunc differentietur haec series, fietque per dx diuiso:

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m \\ + (m+2)x^{m+1} + (m+3)x^{m+2} + \&c.$$

Diuidatur nunc per x^{m-1} , habebitur:

$$\frac{m - (m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x \\ + (m+2)x^2 + \&c.$$

multiplicetur haec antequam noua differentiatio suscipiatur per x^n , vt fit

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \&c.$$

Nunc instituatur differentiatio, & diuiso per dx erit:

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mn x^{n-1} \\ + (m+1)(n+1)x^n + (m+2)(n+2)x^{n+1} + \&c.$$

Diuisione autem per x^{n-1} instituta, fiet:

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2xx}{(1-x)^3} =$$

$$mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \&c.$$

ficque vltcrius progredi licebit: inuenientur autem perpetuo eadem series, quae ex euolutione fractionum summam constituentium nascuntur.

22. Quoniam progressionis geometricae primum assumtae summa ad quemuis terminum vsque assignari po-

potest, hoc modo quoque series definito terminorum numero constantes summabuntur. Ita cum sit

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

erit differentiatione instituta & terminis per dx diuisis:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

Hinc summae potestatum numerorum naturalium ad quemuis terminum inueniri poterunt. Multiplicetur enim haec series per x , vt fiat:

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

quae denuo differentiat ac per dx diuisa dabit:

$$\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2nn+2n-1)x^{n+1}-nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$$

quae per x multiplicata dabit:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2x^n$$

quae differentiat, per dx diuisa ac per x multiplicata producet feriem hanc:

$$x + 8x^2 + 27x^3 + \dots + n^3x^n$$

cuius summa propterea inuenietur. Ex hacque simili modo summa biquadratorum altiorumque potestatum indefinita eruetur.

23. Methodus igitur haec ad omnes series quantitatem indeterminatam continentes accommodari potest, quarum quidem summae constant. Cum igitur praeter geometricas series recurrentes omnes eadem praerogativa gaudeant, ut non solum in infinitum, sed etiam ad quemvis terminum summari queant; ex iis quoque hac methodo innumerae aliae series summabiles inueniri poterunt. Quod cum opus foret maxime diffusum, si id persequi vellemus, vnicum casum perpendamus.

Sit scilicet proposita haec series :

$$\frac{x}{1-x-xx} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \&c.$$

quae differentiata ac per dx diuisa dabit :

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 25x^4 + 48x^5 + 91x^6 + \&c.$$

Facile autem patet omnes has series hoc modo resultantes fore quoque recurrentes, quarum adeo summae ex ipsarum natura inueniri poterunt.

24. In genere igitur si seriei cuiuspiam in hac forma contentae :

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

summa fuerit cognita, quam ponamus $= S$, eiusdem seriei, si singuli termini singulatim per terminos progressionis arithmeticae multiplicentur, summa inueniri poterit.

Sit enim

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

multiplicetur per x^m , erit

$$Sx^m = ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \&c.$$

dis-

differentietur haec aequatio, & diuidatur per dx :

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} \\ + (m+3)cx^{m+2} + \&c.$$

diuidatur per x^{m-1} , eritque

$$mS + \frac{x dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

Quodsi ergo huius sequentis seriei summa desideretur:

$$ax + (a+\epsilon)bx^2 + (a+2\epsilon)cx^3 + (a+3\epsilon)dx^4 + \&c.$$

multiplicetur superior per ϵ ac statuatur $m\epsilon + \epsilon = a$

vt fit $m = \frac{a-\epsilon}{\epsilon}$; eritque huius seriei summa

$$= (a-\epsilon)S + \frac{\epsilon x dS}{dx}.$$

25. Poterit etiam huius seriei propositae summa inueniri, si singuli eius termini multiplicentur per terminos seriei secundi ordinis singulatim, cuius scilicet differentiae demum secundae sint constantes. Quoniam enim iam inuenimus.

$$mS + \frac{x dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

multiplicetur per x^n , vt fit

$$mSx^n + \frac{x^{n+1} dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + \&c.$$

differentietur posito dx constante, & per dx diuidatur:

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1} ddS}{dx^2} = \\ (m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \&c.$$

Diuidatur per x^{m+n} , ac multiplicatur per k , ut fit:

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kx dS}{dx} + \frac{kx^2 ddS}{dx^2} + \dots$$

$$(m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)cx^3 + \&c.$$

Comparetur nunc haec series cum ista:

erit: Diff. 1. $2k = \gamma$ Diff. 2.

$$\begin{array}{l} kmn + km + kn + k = \alpha \\ kmn + 2km + 2kn + 4k = \alpha + \epsilon \\ kmn + 3km + 3kn + 9k = \alpha + 2\epsilon + \gamma \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} km + kn + 3k = \epsilon \\ km + kn + 5k = \epsilon + \gamma \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 2k = \gamma \end{array}$$

Ergo $k = \frac{1}{2}\gamma$; & $m+n = \frac{2\epsilon}{\gamma} - 3$; atque

$$mn = \frac{\alpha}{k} - m - n - 1 = \frac{2\alpha}{\gamma} - \frac{2\epsilon}{\gamma} + 2 = \frac{2(\alpha - \epsilon + \gamma)}{\gamma}.$$

Hinc summa seriei quesita erit:

$$(\alpha - \epsilon + \gamma)S + \frac{(\epsilon - \gamma)x dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2 dx^2}.$$

26. Simili modo summa reperiri poterit seriei huius:

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

si quidem cognita fuerit summa S seriei huius:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

atque $A, B, C, D, \&c.$ constituent seriem, quae ad differentias constantes deducitur. Fingatur enim summa, quoniam eius forma ex antecedentibus colligitur, haec

$$aS + \frac{\epsilon x dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2 dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3 S}{6 dx^3} + \frac{\epsilon x^4 d^4 S}{24 dx^4} + \&c.$$

Nunc

Nunc ad litteras $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ inueniendas euoluuntur singulae series, eritque:

$$\begin{aligned}\alpha S &= \alpha a + \alpha b x + \alpha c x^2 + \alpha d x^3 + \alpha e x^4 + \&c. \\ \frac{\epsilon x dS}{dx} &= \epsilon b x + 2\epsilon c x^2 + 3\epsilon d x^3 + 4\epsilon e x^4 + \&c. \\ \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} &= \gamma c x^2 + 3\gamma d x^3 + 6\gamma e x^4 + \&c. \\ \frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^2} &= \delta d x^3 + 4\delta e x^4 + \&c. \\ \frac{\epsilon x^4 d^4S}{24dx^3} &= \epsilon e x^4 + \&c.\end{aligned}$$

quae simul sumtae comparentur cum proposita:

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

fietque comparatione singulorum terminorum instituta:

$$a = A$$

$$\epsilon = B - \alpha = B - A$$

$$\gamma = C - 2\epsilon - \alpha = C - 2B + A$$

$$\delta = D - 3\gamma - 3\epsilon - \alpha = D - 3C + 3B - A$$

&c.

His igitur valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$\begin{aligned}Z &= AS + \frac{(B - A)x dS}{1 dx} + \frac{(C - 2B + A)x^2 ddS}{1.2 dx^2} + \\ &\quad \frac{(D - 3C + 3B - A)x^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \&c.\end{aligned}$$

seu, si series $A, B, C, D, E, \&c.$ differentiae continuae more consueto indicentur, erit

$$Z =$$

$$Z = AS + \frac{\Delta A \cdot x dS}{1 dx} + \frac{\Delta^2 A \cdot x^2 d^2 S}{1.2 dx^2} + \frac{\Delta^3 A \cdot x^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

si quidem fuerit vti assumimus :

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

Si ergo series A, B, C, D, &c. tandem habeat differentias constantes, summa seriei Z finite exprimi poterit.

27. Quia sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $\doteq 1$, est:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

sumatur haec series pro priori, & cum sit

$$S = e^x \text{ erit}$$

$$\frac{dS}{dx} = e^x$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = e^x \quad \&c.$$

Quare huius seriei, quae ex illa & hac A, B, C, D, &c. componitur:

$$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

summa hoc modo exprimetur:

$$e^x \left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{xx\Delta^2 A}{1.2} + \frac{x^3\Delta^3 A}{1.2.3} + \frac{x^4\Delta^4 A}{1.2.3.4} + \&c. \right)$$

Sic si proponatur haec series:

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Ob

Ob seriem A, B, C, D, E, &c.

erit $A = 2, 5, 10, 17, 26$ &c.

$\Delta A = 3, 5, 7, 9$ &c.

$\Delta^2 A = 2, 2, 2$ &c.

erit huius seriei:

$$2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

$$\text{summa} = e^x(2 + 3x + xx) = e^x(1+x)(2+x):$$

quod quidem sponte patet. Est enim

$$2e^x = 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \&c.$$

$$3xe^x = 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \&c.$$

$$xxe^x = xx + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \&c.$$

$$e^x(2 + 3x + xx) = 2 + 5x + \frac{10xx}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

28. Quae haecenus sunt tradita non solum ad series in infinitum excurrentes spectant, sed etiam ad summas quotcunque terminorum: coefficientes enim a, b, c, d , &c. vel in infinitum progredi, vel ubicunque libuerit abrumpi possunt. Verum cum hoc non egeat vberiori explicatione, quae ex haecenus allatis sequuntur, accuratius perpendamus. Proposita ergo quacunque serie, cuius singuli termini duobus constant factoribus, quorum alteri seriem ad differentias constantes deducen-

R r

tem

tem constituent, huius seriei summa poterit assignari; dummodo omiffis istis factoribus, series fuerit summabilis. Scilicet si proposita fit ista series

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

in qua quantitates A, B, C, D, E, &c. eiusmodi seriem constituent, quae tandem ad differentias constantes perducatur; tum istius seriei summa exhiberi poterit, dummodo habeatur summa S huius seriei

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

Sumtis enim ex progressionem A, B, C, D, E, &c. differentiis continuis, vti initio huius libri ostendimus:

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F \quad \&c.$$

$$\Delta A, \quad \Delta B, \quad \Delta C, \quad \Delta D, \quad \Delta E \quad \&c.$$

$$\Delta^2 A, \quad \Delta^2 B, \quad \Delta^2 C, \quad \Delta^2 D \quad \&c.$$

$$\Delta^3 A, \quad \Delta^3 B, \quad \Delta^3 C \quad \&c.$$

$$\Delta^4 A, \quad \Delta^4 B, \quad \&c.$$

$$\Delta^5 A, \quad \&c.$$

$$\&c.$$

erit seriei propositae summa:

$$Z = SA + \frac{x dS}{1 dx} \Delta A + \frac{x^2 ddS}{1.2 dx^2} \Delta^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} \Delta^3 A + \&c.$$

posito in altioribus ipsius S differentialibus dx constante.

29. Si igitur series A, B, C, D, &c. nunquam ad differentias constantes deducat, summa seriei Z per nouam seriem infinitam exprimeretur, quae interdum magis

gis conuerget quam proposita; sicque ista series in aliam sibi aequalem transformabitur. Sit ad hoc declarandum proposita haec series:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \&c.$$

quam constat exprimere $l \frac{1}{1-y}$, ita vt sit $Y = -l(1-y)$.

Diuidatur haec series per y , & statuatur $y = x$, &

$$Y = yZ, \text{ vt sit } Z = -\frac{1}{y} l(1-y) = -\frac{1}{x} l(1-x),$$

erit

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \&c.$$

quae comparata cum ista:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c. = \frac{1}{1-x},$$

dabit pro serie A, B, C, D, E, &c. hos valores:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{1.2} & , & \frac{1}{2.3} & , & \frac{1}{3.4} & , & \frac{1}{4.5} \\ \frac{1.2}{1.2.3} & , & \frac{1.2}{2.3.4} & , & \frac{1.2}{3.4.5} \\ \frac{1.2.3}{1.2.3.4} & , & \frac{1.2.3}{2.3.4.5} \\ & & & & \&c. \end{array}$$

Erit ergo $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{2}$; $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$; $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$ &c.

Rr 2

Porro

Porro cum fit $S = \frac{1}{1-x}$, erit

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \frac{ddS}{1.2 dx^2} &= \frac{1}{(1-x)^3} \\ \frac{d^3S}{1.2.3 dx^3} &= \frac{1}{(1-x)^4} \\ &\&c.\end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis orietur summa: $Z =$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5} + \&c.$$

Cum ergo fit $x=y$, & $Y = -l(1-y) = yZ$;
erit

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4} + \&c.$$

quae series vtique exprimit

$$l\left(1 + \frac{y}{1-y}\right) = l \frac{1}{1-y} = -l(1-y),$$

cuius adeo veritas per ante demonstrata constat.

30. Proposita nunc fit ista series, vt etiam vfus pateat, si potestates tantum impares occurrant, & signa alternentur.

$$Y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \&c.$$

ex qua constat esse $Y = A \text{ tang } y$.

Di-

Diuidatur haec seriei per y , & ponatur $\frac{Y}{y} = Z$,

& $yy = x$; erit:

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quae si comparetur cum ista:

$$S = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - \&c. \text{ fiet } S = \frac{1}{1+x},$$

& series coefficientium $A, B, C, D, \&c.$ fiet:

$$A = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \&c.$$

$$\Delta A = -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3.5}; -\frac{2}{5.7}; -\frac{2}{7.9}$$

$$\Delta^2 A = \frac{2.4}{3.5}; \frac{2.4}{3.5.7}; \frac{2.4}{5.7.9}$$

$$\Delta^3 A = -\frac{2.4.6}{3.5.7}; -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}$$

$$\Delta^4 A = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} \&c.$$

At cum fit $S = \frac{1}{1+x}$; erit

$$\frac{dS}{1dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3dx^3} = -\frac{1}{(1+x)^4} \&c.$$

Quare substitutis his valoribus fiet forma $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2 \cdot 4 x^2}{3 \cdot 5 (1+x)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7 (1+x)^4} + \&c.$$

Restituto ergo $x = yy$; & per y multiplicato fiet:

$$Y = A \text{ tang } y =$$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2 \cdot 4 y^5}{3 \cdot 5 (1+yy)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 y^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 (1+yy)^4} + \&c.$$

31. Potest quoque superior series, qua arcus circuli per tangentem exprimitur, alio modo transmutari, eam comparando cum serie logarithmica.

Consideremus nempe seriem

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quam comparemus cum hac:

$$S = \frac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \&c.$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x),$$

atque valores litterarum $A, B, C, D, \&c.$ erunt

$$A = \frac{0}{1} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{5} ; \frac{6}{7} ; \frac{8}{9} ; \&c.$$

$$\Delta A = \frac{2}{3} ; \frac{+2}{3 \cdot 5} ; \frac{+2}{5 \cdot 7} ; \frac{+2}{7 \cdot 9} ; \&c.$$

$$\Delta^2 A = \frac{-2 \cdot 4}{3 \cdot 5} ; \frac{-2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} ; \frac{-2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9} ; \&c.$$

$$\Delta^3 A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} ; \&c.$$

De

Deinde cum fit $S = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x)$; erit

$$\begin{aligned}\frac{dS}{1 \cdot dx} &= -\frac{1}{2(1+x)} \\ \frac{ddS}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} &= +\frac{1}{4(1+x)^2} \\ \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} &= -\frac{1}{6(1+x)^3} \\ \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} &= \frac{1}{8(1+x)^4} \\ &\&c.\end{aligned}$$

Erit igitur $SA = S \cdot \frac{0}{1} = 1$; & ex reliquis fiet:

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3 \cdot 5(1+x)^2} - \frac{2 \cdot 4x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7(1+x)^3} - \&c.$$

Ponatur nunc $x = yy$, & multiplicetur per y fiet:

$$Y = A \text{ tang } y = y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3 \cdot 5(1+yy)^2} - \frac{2 \cdot 4y^7}{3 \cdot 5 \cdot 7(1+yy)^3} - \&c.$$

Haec ergo transmutatio non impediatur termino infinito $\frac{1}{0}$, qui in seriem S ingrediebatur. Sin autem cui supersit dubium, is tantum singulos terminos praeter primum secundum potestates ipsius y in series resoluat, atque deprehendet actu seriem primum propositam resultare.

32. Haftenus eiusmodi tantum series sumus contemplati, in quibus omnes potestates variabilis occurrunt. Nunc igitur ad alias series progrediamur, quae in singulis terminis eandem potestatem ipsius variabilis complectantur, cuiusmodi est haec :

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \&c.$$

Huius enim seriei si summa S fuerit, cognita ac per functionem quampiam ipsius x exprimatur, erit differentiando ac per $-dx$ diuidendo :

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \&c.$$

Si haec ulterius differentietur, atque per $-2dx$ diuidatur, cognoscetur series cuborum :

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \&c.$$

haecque denuo differentiata, atque per $-3dx$ diuisa dabit :

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \&c.$$

Similique modo omnium sequentium potestatum summae reperientur, dummodo summa seriei primae fuerit cognita.

33. Huiusmodi autem series fractionum quantitatem indeterminatam inuoluentes supra in introductione eliciuimus, ubi ostendimus, si circuli, cuius radius $= 1$, semiperipheria statuatur $= \pi$; fore

π

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \dots \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \dots \&c.$$

Cum igitur pro m & n numeros quoscunque assumere liceat, statuamus $n = 1$, & $m = x$; vt obtineamus series illi quam in §. praec. proposueramus similes; hoc facto erit:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \dots \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \dots \&c.$$

Per differentiationes ergo summae quarumvis potestatum ex his fractionibus oriundarum exhiberi poterunt.

34. Consideremus seriem priorem, sitque breuitatis gratia $\frac{\pi}{\sin \pi x} = S$, cuius differentialia altiora capiuntur posito dx constante: eritque

S_s

$S =$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c. \\
\frac{-dS}{dx} &= \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \&c. \\
\frac{ddS}{2dx^2} &= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \&c. \\
\frac{-d^3S}{6dx^3} &= \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \&c. \\
\frac{d^4S}{24dx^4} &= \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \&c. \\
\frac{-d^5S}{120dx^5} &= \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \&c.
\end{aligned}$$

&c.

vbi notandum est in potestatibus paribus signa eandem sequi legem, pariterque in imparibus eandem legem signorum observari. Omnium ergo istarum serierum summae invenientur ex differentialibus expressionis

$$S = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

35. Ad Differentialia haec simplicius exprimenda ponamus $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$,

erit $dp = \pi dx \cos \pi x = \pi q dx$,

& $dq = -\pi p dx$. Cum ergo sit

$$S =$$

$$S = \frac{\pi}{p} \quad \text{erit}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp}$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{-\pi^3(pp+2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3(qq+1)}{p^3} \quad \text{ob } pp+qq=1$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4} \right) = \frac{\pi^4(q^3+5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^5(q^4+18q^2+5)}{p^5}$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^6(q^5+58q^3+61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^7(q^6+179q^4+479q^2+61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^8(q^7+543q^5+3111q^3+1385q)}{p^8}$$

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p} \right)$$

&c.

S s 2

Quae

Quae expressiones facile ulterius quousque libuerit continuari possunt, si enim fuerit :

$$\pm \frac{d^n S}{dx^n} = \pi^{n+1} \left(\frac{a q^n}{p^{n+1}} + \frac{b q^{n-2}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}} + \&c. \right)$$

erit differentiale sequens signis mutatis :

$$\mp \frac{d^{n+1} S}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2} \left(\frac{(n+1)a q^{n+1}}{p^{n+2}} + \frac{n a}{(n-1)b} \frac{q^{n-1}}{p^n} + \frac{(n-2)b}{(n-3)\gamma} \frac{q^{n-3}}{p^{n-2}} + \frac{(n-4)\gamma}{(n-5)\delta} \frac{q^{n-5}}{p^{n-4}} + \&c. \right)$$

36. Ex his ergo obtinebuntur summae serierum superiorum §. 34. exhibitarum sequentes :

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot \frac{1}{p} \\ \frac{-dS}{dx} &= \frac{\pi^2}{1} \cdot \frac{q}{p^2} \\ \frac{ddS}{2dx^2} &= \frac{\pi^3}{2} \left(\frac{2q^2}{p^3} + \frac{1}{p} \right) \\ \frac{-d^3S}{6dx^3} &= \frac{\pi^4}{6} \left(\frac{6q^3}{p^4} + \frac{5q}{p^2} \right) \\ \frac{d^4S}{24dx^4} &= \frac{\pi^5}{24} \left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p} \right) \\ \frac{-d^5S}{120dx^5} &= \frac{\pi^6}{120} \left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{p^2} \right) \\ \frac{d^6S}{720dx^6} &= \frac{\pi^7}{720} \left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p} \right) \\ \frac{-d^7S}{5040dx^7} &= \frac{\pi^8}{5040} \left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2} \right) \\ \frac{d^8S}{40320dx^8} &= \frac{\pi^9}{40320} \left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p} \right) \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

37. Traitemus simili modo alteram seriem supra inuentam :

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

atque posito breuitatis ergo $\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = T$, orientur sequentes summationes :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \&c. \\ \frac{-dT}{dx} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \&c. \\ \frac{d^2T}{2dx^2} &= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \&c. \\ \frac{-d^3T}{6dx^3} &= \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \&c. \\ \frac{d^4T}{24dx^4} &= \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} - \&c. \\ \frac{-d^5T}{120dx^5} &= \frac{1}{x^6} + \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

vbi in potestatibus paribus omnes termini sunt affirmatiui, in imparibus autem signa $+$ & $-$ alternatim se excipiunt.

38. Quo differentialium horum valores innotescant, ponamus vt ante : $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$, vt sit $pp + qq = 1$; erit $dp = \pi q dx$ & $dq = -\pi p dx$.

Quibus valoribus adhibitis erit :

$$T = \pi \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{dT}{dx} = \pi^2 \left(\frac{qq}{pp} + 1 \right) = \frac{\pi^2}{pp}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \pi^3 \left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p} \right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$

$$\frac{d^3T}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2 \right) = \pi^4 \left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp} \right)$$

$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^3}{p^5} + \frac{16q}{p^3} \right)$$

$$\frac{d^5T}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp} \right)$$

$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3} \right)$$

$$\frac{d^7T}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2} \right)$$

$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3} \right)$$

&c.

Quae formulae facile ulterius quousque libuerit continuari possunt. Si enim sit

$$\pm \frac{d^n T}{dx^n} = \pi^{n+1} \left(\frac{a q^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{b q^{n-3}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-5}} + \&c. \right)$$

erit expressio sequens :

$$\pm \frac{d^{n+1} T}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2} \left(\frac{(n+1)a q^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(a+b) q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(b+\gamma) q^{n-4}}{p^{n-2}} + \&c. \right)$$

39. Series ergo potestatum §. 37. datae sequentes habebunt summas posito $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$.

$$\begin{aligned} T &= \pi \cdot \frac{q}{p} \\ \frac{-dT}{dx} &= \pi^2 \frac{1}{pp} \\ \frac{ddT}{2dx^2} &= \pi^3 \frac{q}{p^3} \\ \frac{-d^3T}{6dx^3} &= \pi^4 \left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp} \right) \\ \frac{d^4T}{24dx^4} &= \pi^5 \left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3} \right) \\ \frac{-d^5T}{120dx^5} &= \pi^6 \left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp} \right) \\ \frac{d^6T}{720dx^6} &= \pi^7 \left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^5} + \frac{17q}{45p^3} \right) \\ \frac{-d^7T}{5040dx^7} &= \pi^8 \left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11q^2}{15p^4} + \frac{17}{315pp} \right) \\ \frac{d^8T}{40320dx^8} &= \pi^9 \left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3} \right) \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

40. Praeter has series inuenimus in introductione nonnullas alias, ex quibus simili modo per differentiationes nouae elici possunt. Ostendimus enim esse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} - \frac{\pi Vx}{2x \operatorname{tang} \pi Vx} &= \\ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x} + \frac{1}{25-x} + \&c. & \text{Po.} \end{aligned}$$

Ponamus summam huius seriei esse = S,

$$\text{vt fit } S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi \sqrt{x}}{\sin \pi \sqrt{x}}, \quad \text{erit}$$

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi \sqrt{x}}{\sin \pi \sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\sin \pi \sqrt{x})^2},$$

quae ergo expressio praebet summam huius seriei:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \&c.$$

Deinde quoque ostendimus esse:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} - \frac{1}{2x} =$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \&c.$$

Quodsi ergo haec summa ponatur = S, erit:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \&c.$$

At est

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}} - 1)^2} + \frac{1}{2xx}.$$

Ergo summa huius seriei erit:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}} - 1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Similique modo ulterioribus differentiationibus summae sequentium potestatum inuenientur.

41. Si cognitus fuerit valor producti cuiuspiam ex factoribus indeterminatam litteram inuoluentibus compositi

fiti, ex eo per eandem methodum innumerabiles series summabiles inueniri poterunt. Sit enim huius producti

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)(1+ex) \&c.$$

valor $= S$, functioni scilicet cuiuspiam ipsius x , erit logarithmis fumendis :

$$lS = l(1+ax) + l(1+bx) + l(1+cx) + l(1+dx) + \&c.$$

Sumantur iam differentialia, erit diuisione per dx instituta :

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{a}{1+ax} + \frac{b}{1+bx} + \frac{c}{1+cx} + \frac{d}{1+dx} + \&c.$$

ex cuius vltiori differentiatione summae potestatum quarumuis istarum fractionum reperietur; plane vti in exemplis praecedentibus fusius exposuimus.

42. Exhibuimus autem in introductione nonnullas istiusmodi expressiones, ad quas hanc methodum accomodemus. Scilicet si fit π arcus 180° circuli, cuius radius $= 1$, ostendimus esse :

$$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \cdot \frac{4nn - mm}{4nn} \cdot \frac{16nn - mm}{16nn} \cdot \frac{36nn - mm}{36nn} \&c.$$

$$\cos \frac{m\pi}{2n} = \frac{nn - mm}{nn} \cdot \frac{9nn - mm}{9nn} \cdot \frac{25nn - mm}{25nn} \cdot \frac{49nn - mm}{49nn} \&c.$$

Ponamus $n = 1$ & $m = 2x$; vt fit

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \frac{1 - xx}{1} \cdot \frac{4 - xx}{4} \cdot \frac{9 - xx}{9} \cdot \frac{16 - xx}{16} \cdot \&c. \text{ vel}$$

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \frac{1-x}{1} \cdot \frac{1+x}{1} \cdot \frac{2-x}{2} \cdot \frac{2+x}{2} \cdot \frac{3-x}{3} \cdot \frac{3+x}{3} \cdot \frac{4-x}{4} \cdot \&c. \quad \&$$

T t

cos

$$\cos \pi x = \frac{1-4xx}{1} \cdot \frac{9-4xx}{9} \cdot \frac{25-4xx}{25} \cdot \frac{49-4xx}{49} \cdot \&c. \text{ feu}$$

$$\cos \pi x = \frac{1-2x}{1} \cdot \frac{1+2x}{1} \cdot \frac{3-2x}{3} \cdot \frac{3+2x}{3} \cdot \frac{5-2x}{5} \cdot \frac{5+2x}{5} \cdot \&c.$$

Ex his ergo expressionibus, si logarithmi sumantur, erit:

$$l \sin \pi x = l \pi x + l \frac{1-x}{1} + l \frac{1+x}{1} + l \frac{2-x}{2} + l \frac{2+x}{2} + l \frac{3-x}{3} + \&c.$$

$$l \cos \pi x = l \frac{1-2x}{1} + l \frac{1+2x}{1} + l \frac{3-2x}{3} + l \frac{3+2x}{3} + l \frac{5-2x}{5} + \&c.$$

43. Sumamus nunc harum serierum logarithmicarum differentialia, & diuisione vbique per dx facta prior series dabit:

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

quae est ea ipsa series, quam §. 37. tractauimus. Altera vero series dabit:

$$\frac{-\pi \sin \pi x}{\cos \pi x} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \&c.$$

Ponamus $2x = z$, vt sit $x = \frac{z}{2}$, & diuidamus per -2 erit:

$$\frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi z}{2 \cos \frac{1}{2} \pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \&c.$$

Cum autem sit

$$\sin \frac{1}{2} \pi z = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi z}{2}} \quad \& \quad \cos \frac{1}{2} \pi z = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi z}{2}}$$

erit:

$$\frac{\pi \sqrt{1 - \cos \pi z}}{\sqrt{1 + \cos \pi z}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \&c. \text{ feu}$$

seu loco x scribendo x erit :

$$\frac{\pi V(1 - \cos \pi x)}{V(1 + \cos \pi x)} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \dots \&c.$$

Addatur haec series ad primum inuentam :

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \dots \&c.$$

Atque reperietur huius seriei :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \dots \&c.$$

$$\text{Summa} = \frac{\pi V(1 - \cos \pi x)}{V(1 + \cos \pi x)} + \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x}. \text{ At fractio haec}$$

$\frac{V(1 - \cos \pi x)}{V(1 + \cos \pi x)}$, si numerator & denominator multiplice-

tur per $V(1 - \cos \pi x)$ abit in $\frac{1 - \cos \pi x}{\sin \pi x}$. Quocirca

summa seriei erit $= \frac{\pi}{\sin \pi x}$, quae est ea ipsa, quam §. 34.

habuimus: unde eam ulterius non persequemur.

CAPUT III. DE INVENTIONE DIFFERENTIALIARUM FINITARUM.

44.

Quemadmodum ex functionum differentiis finitis earum differentialia facile inueniri queant, in initio fufius expofuimus, atque adeo ex hoc fonte principium differentialium deriuauimus. Si enim differentiae, quae assumptae erant finitae, euanescant, in nihilumque abeant, oriuntur differentialia; & quia hoc casu plures & saepe innumerum termini, qui differentiam finitam constituunt, reiiciuntur, differentialia multo facilius inueniri, atque commodius succinctiusque exprimi possunt, quam differentiae finitae. Neque igitur hinc vicissim via patere videtur, a differentialibus ad differentias finitas ascendendi. Interim tamen eo modo, quo hic vtemur, ex differentialibus omnium ordinum cuiuscunque functionis, eiusdem differentiae finitae omnes definiri poterunt.

45. Sit y functio quaecunque ipsius x , quae cum posito $x + dx$ loco x abeat in $y + dy$, si denuo loco x ponatur $x + dx$, valor $y + dy$ suo differentiali $dy + ddy$ augebitur, fietque $= y + 2dy + ddy$, qui ergo valor respondebit ipsius x valori $x + 2dx$. Simili modo si ponamus quantitatem x continuo suo differentiali dx augeri, vt successiue valores

 $x +$

$x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; $x + 4dx$; &c.

induat, valores ipsius y respondentes erunt, quos haec tabella indicat:

Valores ipsius x	Valores respondentes functionis y
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + d^3y$
$x + 4dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + 5d^4y + d^5y$
$x + 6dx$	$y + 6dy + 15ddy + 20d^3y + 15d^4y + 6d^5y + d^6y$
&c.	&c.

46. Generaliter ergo si x abeat in $x + ndx$, functio y recipiet hanc formam:

$$y + \frac{n}{1} dy + \frac{n(n-1)}{1.2} ddy + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d^3y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} d^4y + \&c.$$

in qua expressione, etsi quilibet terminus infinites minor est quam praecedens, tamen nullum praetermissimus, quo ista formula ad praesens negotium apta redderetur. Statuimus enim pro n numerum infinite magnum, & quoniam notauimus, fieri posse ut productum ex quantitate infinite magna in infinite paruum aequetur quantitati finitae, terminus secundus utique homo-

geneus fieri poterit primo, seu ndy quantitatem finitam repraesentare poterit. Ob eandemque rationem terminus tertius $\frac{n(n-1)}{1.2} ddy$, etsi ddy infinities minus est quam dy , tamen quia alter factor $\frac{n(n-1)}{1.2}$ infinities maior est quam n , terminus quoque tertius quantitatem finitam exprimere poterit: sicque posito n numero infinito nullum illius expressionis terminum reiicere licebit.

47. Posito autem n numero infinito quocunque is numero finito siue augeatur siue diminuatur, numerus resultans ad n habebit rationem aequalitatis, hincque pro singulis factoribus $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. ubique scribi poterit n . Cum enim sit

$$\frac{n(n-1)}{1.2} ddy = \frac{1}{2} n n ddy - \frac{1}{2} n ddy$$

prior terminus $\frac{1}{2} n n ddy$ ad posteriorem $\frac{1}{2} n ddy$ rationem tenebit ut n ad 1, sicque hic respectu illius evanescet;

loco $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ergo scribi poterit $\frac{1}{2} n n$. Simili modo

quarti termini coefficientis $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ contrahi pote-

rit in $\frac{n^3}{6}$ pariterque in sequentibus numeri, quibus n

in factoribus diminuitur, negligi poterunt. Hoc vero facto functio y , si loco x ponatur $x + ndx$, existente numero n infinito, sequentem valorem accipiet:

$y +$

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{mddy}{1.2} + \frac{n^3 d^3 y}{1.2.3} + \frac{n^4 d^4 y}{1.2.3.4} + \frac{n^5 d^5 y}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

48. Cum igitur sumto n numero infinite magno etiamfi dx sit infinite paruum, productum ndx quantitatem finitam exprimere possit, ponamus $ndx = \omega$, ut sit $n = \frac{\omega}{dx}$; erit utique n numerus infinitus, cum sit quorus ex diuisione quantitatis finitae ω per infinite parvam dx resultans. Valore autem hoc loco n adhibito cognoscemus, si quantitas variabilis x augeatur quauis quantitate finita ω , seu si loco x ponatur $x + \omega$, tum quamuis ipsius functionem y abituram esse in hanc formam:

$$y + \frac{\omega dy}{1 dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

cuius expressionis singuli termini per continuam ipsius y differentiationem inueniri poterunt. Cum enim y sit functio ipsius x , ostendimus supra, has functiones omnes $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$; &c. quantitates finitas exhibere.

49. Cum igitur, dum quantitas variabilis x quantitate finita ω augeri assumitur, functio eius quaecunque y augeatur sua differentia prima, quam supra per Δy indicauimus, existente $\omega = \Delta x$: differentia ipsius y per continuam differentiationem reperiri poterit; erit enim:

$$\Delta y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

feu

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + \&c.$$

Sicque differentia finita Δy exprimitur per progressionem, cuius singuli termini secundum potestates ipsius Δx procedunt. Atque hinc vicissim patet, si quantitas x tantum quantitate infinite parva augeatur, ut Δx abeat in eius differentiale dx , omnes terminos prae primo evanescere, foreque $\Delta y = dy$; facto enim $\Delta x = dx$, differentia Δy abit per definitionem in differentiale dy .

50. Quoniam si loco x ponatur $x + \omega$, eius functio quaecunque y induit sequentem valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddx}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

veritas huius expressionis comprobari poterit eiusmodi exemplis, quibus differentialia altiora ipsius y tandem evanescunt: his enim casibus numerus terminorum superioris expressionis fiet finitus:

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor expressionis $xx - x$ si loco x ponatur $x + 1$.

Ponatur $y = xx - x$; & cum x in $x + 1$ abire statuatur, fiet $\omega = 1$, sumtis iam differentialibus erit:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1; \quad \frac{ddy}{dx^2} = 2; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0; \quad \&c.$$

Hinc

Hinc functio $y = xx - x$ posito $x + 1$ loco x abibit
in : $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = xx + x.$

Quodsi autem in $xx - x$ loco x actu ponatur $x + 1$
abibit xx in $xx + 2x + 1$
 x in $x + 1$

Ergo $xx - x$ in $xx + x.$

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor expressionis $x^3 + xx + x$, si loco x
ponatur $x + 2.$

Ponatur $y = x^3 + xx + x$, fietque $\omega = 2$; nunc
cum sit $y = x^3 + xx + x$

erit $\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Ex his valor functionis $y = x^3 + xx + x$, si pro x sta-
tuatur $x + 2$, erit sequens:

$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \frac{1}{2}(6x + 2) + \frac{1}{6} \cdot 6$
 $= x^3 + 7xx + 17x + 14$, qui idem prodit si actu
loco x substituatur $x + 2.$

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor expressionis $xx + 3x + 1$, si loco x
ponatur $x + 3.$

V v

Fiet

Fiet ergo $\omega = -3$; & posito

$$y = xx + 3x + 1, \text{ erit}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2;$$

vnde posito $x = 3$ loco x functio $xx + 3x + 1$ abibit
in $x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{2}(xx + 3) + \frac{1}{2} \cdot 2 = x^2 - 3x + 1.$

§1. Si pro ω sumatur numerus negatiuus, reperiatur valor, quem functio quaecunque ipsius x induit, dum ipsa quantitas x diminuitur data quantitate ω . Scilicet si loco x ponatur $x - \omega$, functio ipsius x quaecunque y accipiet istum valorem:

$$y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24 dx^4} - \&c.$$

vnde omnes variationes, quas functio y subire potest, dum quantitas x vtrinq̃ variatur, inueniri poterunt. Quodsi autem y fuerit functio rationalis integra ipsius x , quoniam tandem ad eius differentialia euanescentia devenitur, valor variatus per expressionem finitam exprimetur; sin autem y non fuerit huiusmodi functio, valor variatus per seriem infinitam exprimetur, cuius propterea summa, quoniam si substitutio actu instituitur, valor variatus facile assignatur, expressione finita exhiberi poterit.

§2. Quemadmodum autem differentia prima est inuenta, ita quoque differentiae sequentes similibus express-

pressionibus exhiberi possunt. Induat enim x successive valores $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$, &c. atque valores ipsius y respondentes indicentur per y^I , y^{II} , y^{III} , y^{IV} , &c. sicuti in initio huius libri posuimus: Quoniam ergo y^I , y^{II} , y^{III} , y^{IV} , &c. sunt valores, quos y nanciscitur, si loco x scribatur respectiue $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$, &c. per modo demonstrata isti ipsius y valores ita exprimentur:

$$y^I = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$y^{II} = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$y^{III} = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$y^{IV} = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

&c.

53. Cum igitur, si Δy , $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, &c. denotent differentias, primam, secundam, tertiam, quartam, &c. fit:

$$\Delta y = y^I - y$$

$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^I + y$$

$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$$

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^I + y$$

&c.

V v 2

istae

istae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur :

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2-2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3-2.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(2^4-2.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3-3.2^3+3.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(3^4-3.2^4+3.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4-4.3^4+6.2^4-4.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{(4^5-4.3^5+6.2^5-4.1)\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

54. Quantam vtilitatem afferant istae differentiarum expressio in doctrina serierum & progressionum, cum sponte patet, tum in sequentibus vberius expone-
mus. Interim tamen in hoc capite vsus, qui hinc ad serierum notitiam immediate redundat, perpendamus. Quanquam vulgo indices terminorum seriei cuiuscunque progressionem arithmeticam, cuius differentia est vnitas, constituere assumuntur; tamen quo vsus latius pateat, atque applicatio facilius fieri possit, differentiam statuamus $= \omega$, ita vt, si terminus generalis seu is qui indi-
ci x respondet, fuerit y ; sequentes conueniant indicibus

$$x + \omega, \quad x + 2\omega, \quad x + 3\omega, \quad \&c.$$

Quodsi ergo his indicibus respondeant sequentes seriei termini :

$$x, \quad x + \omega, \quad x + 2\omega, \quad x + 3\omega, \quad x + 4\omega, \quad \&c.$$

$$y, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad \&c.$$

fin-

singuli ex y eiusque differentialibus definientur hoc modo:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

&c.

55. Si hae expressiones a se inuicem subtrahantur, in differentias non amplius ingrediatur y , eritque

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{175\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{369\omega^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c.$$

&c.

Si hae expressiones denuo a se inuicem subtrahantur, etiam differentialia prima se destruent; eritque

V v 3

Q -

$$Q - 2P + y = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$R - 2Q + P = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$S - 2R + Q = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 2S + R = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

&c.

His autem denuo a se inuicem subtractis differentialia quoque secunda ex computo egredientur:

$$R - 3Q + 3P - y = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$S - 3R + 3Q - P = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 3S + 3R - Q = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

subtractionem autem ulterius continuando fiet:

$$S - 4R + 6Q - 4P + y = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - 4S + 6R - 4Q + P = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

atque

$$T - 5S + 10R - 10Q + 5P - y = \frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

56. Quodsi ergo y fuerit functio rationalis integra ipsius x , quia eius differentialia altiora tandem euanes-

E V V

cent

ceſſit, hoc modo procedendo tandem ad expreſſiones eua-
neſcentes peruenietur. Cum igitur iſtae expreſſiones ſint
differentiae ipſius y , earum formas & coefficientes dili-
gentius perpendamus:

$$y = y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 y}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \frac{\omega^5 d^5 y}{120 dx^5} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{\omega^2 d^2 y}{dx^2} + \frac{3 \omega^3 d^3 y}{3 dx^3} + \frac{7 \omega^4 d^4 y}{3 \cdot 4 dx^4} + \frac{15 \omega^5 d^5 y}{3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5} + \frac{31 \omega^6 d^6 y}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 dx^6} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{\omega^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{6 \omega^4 d^4 y}{4 dx^4} + \frac{25 \omega^5 d^5 y}{4 \cdot 5 dx^5} + \frac{90 \omega^6 d^6 y}{4 \cdot 5 \cdot 6 dx^6} + \frac{301 \omega^7 d^7 y}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4 y}{dx^4} + \frac{10 \omega^5 d^5 y}{5 dx^5} + \frac{65 \omega^6 d^6 y}{5 \cdot 6 dx^6} + \frac{350 \omega^7 d^7 y}{5 \cdot 6 \cdot 7 dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5 y}{dx^5} + \frac{15 \omega^6 d^6 y}{6 dx^6} + \frac{140 \omega^7 d^7 y}{6 \cdot 7 dx^7} + \frac{1050 \omega^8 d^8 y}{6 \cdot 7 \cdot 8 dx^8} + \&c.$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6 y}{dx^6} + \frac{21 \omega^7 d^7 y}{7 dx^7} + \frac{266 \omega^8 d^8 y}{7 \cdot 8 dx^8} + \frac{2646 \omega^9 d^9 y}{7 \cdot 8 \cdot 9 dx^9} + \&c.$$

In quibus ſeriebus quemadmodum denominatores proce-
dant, clarum eſt; numeratorum autem coefficientes ita
formantur, vt quintis coefficientis numeratoris ſit aggrega-
tum ex ſupra ſtante & praecedente per exponentem dif-
ferentiae multiplicato. Sic in ſerie differentiam $\Delta^6 y$ ex-
primente, eſt $2646 = 1050 + 6 \cdot 266$.

57. Conſideremus quoque ſeriem eandem ſimul
retro continuatam, quae continet terminos indicibus
 $x = \omega$; $x = 2\omega$; $x = 3\omega$; &c. reſpondentes:

In

$x=4\omega; x=3\omega; x=2\omega; x=\omega; x; x+\omega; x+2\omega; x+3\omega; x+4\omega; \&c.$

$s, r, q, p, y, P, Q, R, S, \&c.$

Cum igitur sit:

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24 dx^4} - \&c.$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24 dx^4} - \&c.$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24 dx^4} - \&c.$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24 dx^4} - \&c.$$

&c.

erit his valoribus a superioribus $P, Q, R, S, \&c.$
subtrahendis:

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120 dx^5} + \&c.$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120 dx^5} + \&c.$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120 dx^5} + \&c.$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120 dx^5} + \&c.$$

&c.

fin

fin autem termini hi ad superiores addantur, tum, quemadmodum hic differentialia parium ordinum deerant, differentialia imparia ex computo egredientur.

Erit enim

$$\begin{aligned} \frac{P + p}{2} &= y + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \frac{\omega^6 d^6 y}{720 dx^6} + \&c. \\ \frac{Q + q}{2} &= y + \frac{4\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6 y}{720 dx^6} + \&c. \\ \frac{R + r}{2} &= y + \frac{9\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6 y}{720 dx^6} + \&c. \\ \frac{S + s}{2} &= y + \frac{16\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6 y}{720 dx^6} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

58. Quoniam termini antecedentes omnes exprimi possunt, si ii in vnam summam colligantur, prodibit seriei propositae terminus summatorius. Respondeat scilicet terminus primus indici $x - n\omega$, eritque ipse terminus primus ==

$$y - \frac{n\omega dy}{dx} + \frac{n^2 \omega^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{n^3 \omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{n^4 \omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

Cum igitur terminus indici x respondens sit $= y$, terminorumque omnium numerus sit $= n + 1$, erit summa omnium a primo ad vltimum y inclusivæ sumtorum seu terminus summatorius ==

X x

($n + 1$)

$$\begin{aligned}
(n+1)y &= \frac{\omega dy}{dx} (1+2+3+\dots+n) \\
&+ \frac{\omega^2 d^2 y}{2 dx^2} (1+2^2+3^2+\dots+n^2) \\
&- \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} (1+2^3+3^3+\dots+n^3) \\
&+ \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} (1+2^4+3^4+\dots+n^4) \\
&- \frac{\omega^5 d^5 y}{120 dx^5} (1+2^5+3^5+\dots+n^5) \\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

59. Supra autem singularum harum serierum summas exhibuimus, quae si hic substituantur, erit summa seriei nostrae propositae \equiv

$$\begin{aligned}
(n+1)y &= \frac{\omega dy}{dx} \left(\frac{1}{2} n n + \frac{1}{2} n \right) \\
&+ \frac{\omega^2 d^2 y}{2 dx^2} \left(\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n n + \frac{1}{6} n \right) \\
&- \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} \left(\frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 \right) \\
&+ \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} \left(\frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n \right) \\
&- \frac{\omega^5 d^5 y}{120 dx^5} \left(\frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{2} n^2 \right) \\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

vbi n dabitur ex indice termini primi, a qua summa computatur. Ita si ponatur $\omega = 1$, & index termini pri-

primi sit $\equiv 1$; secundi $\equiv 2$; & ultimi $\equiv x$, ita ut
haec series sit proposita:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots & \dots & \dots & x \\ a, & b, & c, & d, & \dots & \dots & \dots & y \end{array}$$

erit huius seriei summa (ob $x - n \equiv 1$ & $n \equiv x - 1$)

$$\begin{aligned} &= xy - \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x \right) \\ &+ \frac{ddy}{2dx^2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x \right) \\ &- \frac{d^3y}{6dx^3} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx \right) \\ &+ \frac{d^4y}{24dx^4} \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x \right) \\ &- \frac{d^5y}{120dx^5} \left(\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^3 \right) \\ &+ \frac{d^6y}{720dx^6} \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{42}x \right) \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

60. Ex hac summae expressione, quia coefficientes vehementer augentur, si x fuerit numerus magnus, parum utilitatis ad doctrinam serierum redundat; interim tamen iuvabit aliquas proprietates inde fluentes commemorasse. Sit terminus generalis $y \equiv x^n$, atque terminus summatorius per Sy seu $S.x^n$ indicetur. Qua designatione ubique adhibita erit:

$$\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x \equiv S.x - x$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \equiv S.x^2 - x^2$$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx \equiv S.x^3 - x^3 \quad \&c.$$

X x 2

Quam-

Quamobrem ex superiori expressione obtinebitur :

$$\begin{aligned} S.x^n &= x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^n \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^n \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

At cum fit

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\text{erit } n - \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - \&c.$$

$= 1$, ideoque excepto casu $n=0$, quo ista expressio fit $= 0$.

$$\begin{aligned} S.x^n &= x^{n+1} + x^n - nx^{n-1}S.x \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}S.x^4 \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

61. Quo tam veritas quam vis huius formulae clarius perspiciatur, euoluamus singulos casus, fitque primo

$n=1$, eritque :

$$S.x = x^2 + x - S.x, \text{ ideoque } S.x = \frac{xx+x}{2},$$

quemadmodum satis constat.

Pona-

Ponamus ergo $n = 2$, est erit:

$$S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2,$$

quae aequatio, cum utrinque termini $S.x^2$ se tollant, idem

dat, quod praecedens $S.x = \frac{xx+x}{2}$. Si fit $n = 3$, erit

$$S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x^2S.x + 3xS.x^2 - S.x^3,$$

ideoque

$$S.x^3 = \frac{3}{2}xS.x^2 - \frac{3}{2}x^2S.x + \frac{1}{2}x^3(x+1),$$

si ponatur $n = 4$ prodibit:

$$S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3S.x + 6x^2S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x^4,$$

vnde ob $S.x^4$ destructum erit:

$$S.x^3 = \frac{3}{2}xS.x^2 - x^2S.x + \frac{1}{4}x^3(x+1)$$

a cuius triplo, si praecedentis duplum subtrahatur rema-

nebit: $S.x^3 = \frac{3}{2}xS.x^2 - \frac{1}{4}x^3(x-1)$.

Si ponatur $n = 5$ fiet:

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4S.x + 10x^3S.x^2 - 10x^2S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5$$

feu

$$S.x^5 = \frac{5}{2}xS.x^4 - 5x^2S.x^3 + 5x^3S.x^2 - \frac{1}{2}x^4S.x + \frac{1}{2}x^5(x+1)$$

atque ex $n = 6$ sequitur:

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5S.x + 15x^4S.x^2 - 20x^3S.x^3 + 15x^2S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

feu

$$S.x^5 = \frac{5}{2}xS.x^4 - \frac{10}{3}x^2S.x^3 + \frac{5}{2}x^3S.x^2 - x^4S.x + \frac{1}{6}x^5(x+1).$$

62. Ex his ergo generaliter concludimus, si fuerit
 $n = 2m + 1$ fore :

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x Sx^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2 \cdot 1 \cdot 2} x^2 Sx^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 Sx^{2m-2} \\
- \dots - \frac{(2m+1)}{2} x^{2m} Sx + \frac{1}{2} x^{2m+1} (x+1).$$

Sin autem sit $n = 2m + 2$, quia termini $S.x^{2m+2}$
 se mutuo destruunt, reperietur :

$$S.x^{2m+2} = \frac{2m+1}{2} x Sx^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2 \cdot 3} x^2 Sx^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 Sx^{2m-2} \\
- \dots - x^{2m} Sx + \frac{1}{2m+2} x^{2m+2} (x+1).$$

Duplici ergo modo summae potestatum imparium ex
 summis potestatum inferiorum determinari possunt : at-
 que ex varia combinatione harum duarum formularum
 infinitae aliae formari possunt.

63. Multo facilius autem summae potestatum im-
 parium ex antecedentibus definiri possunt : atque ad hoc
 quidem sufficit solam summam potestatis paris antece-
 dentis novisse. Ex summis enim potestatum supra ex-
 hibitis constat, numerum terminorum summas constitu-
 entium, imparibus tantum potestatibus augeri, ita ut sum-
 ma potestatis imparis totidem constet terminis, quot sum-
 ma potestatis paris praecedentis. Sic si potestatis paris

x^{2n} summa sit :

$$S.x^{2n} = ax^{2n+1} + bx^{2n} + \gamma x^{2n-1} + \delta x^{2n-2} + \epsilon x^{2n-3} + \dots \&c.$$

vidi-

vidimus enim, post terminum tertium alternos terminos deficere, simulque signa alternari; hinc summa sequentis potestatis x^{2n+1} inuenietur, si singuli illius termini respectiue multiplicentur per hos numeros:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x; \frac{2n+1}{2n+1}x; \frac{2n+1}{2n}x; \frac{2n+1}{2n-1}x; \frac{2n+1}{2n-2}x; \&c.$$

non omitting terminos deficientes; eritque ergo

$$S.x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}ax^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}bx^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}yx^{2n} \\ - \frac{2n+1}{2n-1}dx^{2n-2} + \frac{2n+1}{2n-4}ex^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}gx^{2n-6} + \&c.$$

Quodsi ergo constet summa potestatis x^{2n} , ex ea expedite summa sequentis potestatis x^{2n+1} formari poterit.

64. Haec sequentium summarum inuestigatio etiam ad potestates pares extenditur; quoniam autem harum summae nouum terminum recipiunt, hic per istam methodum non inuenitur, ex natura tamen ipsius seriei, qua constat, si ponatur $x=1$, summam quoque fieri debere $=1$, semper erui poterit. Vicissim autem semper ex summa cuiusuis potestatis cognita praecedentium potestatum summae inueniri poterunt. Si enim fuerit:

$$S.x^n = ax^{n+1} + bx^n + \gamma x^{n-1} + \delta x^{n-2} + \epsilon x^{n-3} + \zeta x^{n-4} + \&c.$$

erit pro potestate praecedente:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}ax^n + \frac{n}{n}bx^{n-1} + \frac{(n-1)}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{(n-3)}{n}\delta x^{n-4} + \&c.$$

hinc-

hincque ulterius regredi licet, quousque libuerit. Notandum autem est esse perpetuo $\alpha = \frac{1}{n+1}$ & $\beta = \frac{1}{2}$, vti ex formulis iam supra datis apparet.

65. Attendenti statim patebit summam potestatum x^{n-1} prodire, si summa potestatum x^n differentietur, eiusque differentiale per ndx diuidatur; eritque adeo

$$d.Sx^n = ndx.Sx^{n-1} \quad \& \quad \text{quia est} \quad d.x^n = nx^{n-1}dx;$$

$$\text{erit} \quad d.Sx^n = S.nx^{n-1}dx = S.d.x^n;$$

ex quo intelligitur differentiale summae aequari summae differentialis: ita in genere si seriei cuiuspiam terminus generalis fuerit $= y$, & Sy eius terminus summatorius; erit quoque $S.dy = d.Sy$: hoc est summa differentialium omnium terminorum aequatur differentiali summae ipsorum terminorum. Ratio autem huius aequalitatis facile perspicitur ex iis, quae supra de serierum differentiatione attulimus. Cum enim sit

$$S.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \&c.$$

erit

$$\frac{d.Sx^n}{ndx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \&c. = S.x^{n-1}$$

quae demonstratio ad omnes alias series patet.

66. Reuertamur autem, vnde digressi sumus, ad differentias functionum, circa quas adhuc quaedam annotanda sunt. Quoniam vidimus, si y fuerit functio quaecunque ipsius x , atque loco x vbique ponatur $x \pm \omega$, functionem y adepturam esse sequentem valorem:

$$y \pm$$

$$y \pm \frac{\omega dy}{1dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

haec expressio locum habebit, siue pro ω quantitas quaecunque constans accipiat, siue etiam variabilis, ab ipsa x pendens. Inuentis enim per differentiationem valoribus fractionum

$$\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \&c. \text{ in factoribus}$$

$\omega, \omega^2, \omega^3, \&c.$ variabilitas non spectatur, hincque perinde est siue ω denotet quantitatem constantem, siue variabilem ab x pendentem.

67. Ponamus ergo esse $\omega = x$, atque in functione y loco x scribi $x - x = 0$. Quamobrem si in functione ipsius x quacunque y loco x vbique scribatur 0 , valor functionis erit hic:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c.$$

Haec ergo expressio semper indicat valorem, quem functio quaecunque y induit, si in ea ponatur $x = 0$, cuius veritatem sequentia exempla illustrabunt:

EXEMPLUM I.

Sit $y = xx + ax + ab$, cuius valor, si ponatur $x = 0$, quaeratur, quem quidem constat fore $= ab$.

Cum sit $y = xx + ax + ab$

$$\text{erit } \frac{dy}{1dx} = 2x + a$$

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 1$$

Y y

ideo-

ideoque prodibit valor quaesitus

$$= xx + ax + ab - x(2x + a) + xx. 1 = ab.$$

EXEMPLUM II.

Sit $y = x^3 - 2x + 3$, cuius valor, posito $x = 0$, quaeratur, quem constat fore $= 3$.

Cum sit $y = x^3 - 2x + 3$

erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2$

$$\frac{d^2y}{1.2 dx^2} = 3x$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3 dx^3} = 1$$

obtinebitur valor quaesitus

$$= x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx. 3x - x^3. 1 = 3.$$

EXEMPLUM III.

Sit $y = \frac{x}{1-x}$, cuius valor posito $x = 0$, quaeritur, quem constat fore $= 0$.

Cum sit $y = \frac{x}{1-x}$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$;

$$\frac{d^2y}{1.2 dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}; \quad \frac{d^3y}{1.2.3 dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}; \quad \&c.$$

Hinc erit valor quaesitus

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \&c.$$

huiusque ergo seriei valor est $= 0$.

Quod

Quod etiam hinc patet, quod haec series primo termino

truncata $\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4} + \&c.$ sit series

geometrica, eiusque summa $= \frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x}$,

vnde valor inuentus erit $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

EXEMPLUM IV.

Sit $y = e^x$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, & quaeratur valor ipsius y si ponatur $x = 0$, quem quidem constat fore $= 1$.

Cum sit $y = e^x$; erit $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$; &c.

ideoque valor quaesitus erit

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x x x}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$= e^x \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c. \right)$$

At supra vidimus seriem $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.$

exprimere valorem e^{-x} , erit ergo valor quaesitus utique $= e^x \cdot e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$.

EXEMPLUM V.

Sit $y = \sin x$, atque posito $x = 0$, manifestum est fore $y = 0$, id quod etiam formula generalis indicabit.

Y y 2

Cum

Cum enim sit $y = \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$;
 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$; &c.

erit posito $x = 0$ valor ipsius y hic:

$$\sin x - \frac{x}{1} \cos x - \frac{xx}{1.2} \sin x + \frac{x^3}{1.2.3} \cos x + \frac{x^5}{1.2.3.4} \sin x - \&c.$$

$$\text{qui est} = \sin x \left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c. \right)$$

$$- \cos x \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c. \right)$$

harum autem serierum superior exprimit $\cos x$, inferior autem $\sin x$, unde valor quaesites erit

$$= \sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x = 0.$$

68. Hinc igitur vicissim cognoscimus, si y eiusmodi fuerit functio ipsius x , ut ipsa euanescat, posito $x = 0$, tum fore

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{xxddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = 0.$$

Vnde haec est aequatio generalis omnium omnino functionum ipsius x , quae dum fit $x = 0$, simul ipsae euanescent. Et hancobrem ista aequatio ita est comparata, ut, quaecunque functio ipsius x , dummodo ea euanescat euanescente x , loco y substituatur, aequationi perpetuo satisfiat. Quodsi vero y eiusmodi fuerit functio ipsius x , quae

quae posito $x = 0$, recipiat valorem datum $= A$, tum

erit :

$$y = \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \&c. = A.$$

in qua aequatione omnes continentur functiones ipsius x , quae posito $x = 0$, abeunt in A .

69. Si loco x scribatur nx , seu $x + x$, functio quaecunque ipsius x , quae designetur per y hunc induet valorem

$$y + \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \&c.$$

Atque si loco x scribamur nx , hoc est $x + (n-1)x$ functio y accipiet valorem sequentem :

$$y + \frac{(n-1)xdy}{1dx} + \frac{(n-1)^2xxddy}{1.2dx^2} + \frac{(n-1)^3x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

Sin autem generaliter pro x scribamur t , functio quaecunque y ipsius x , transmutabitur ob $t = x + t - x$ in formam sequentem :

$$y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

Si igitur v fuerit talis functio ipsius t , qualis y est ipsius x , quia v ex y nascitur, ponendo t loco x , erit :

$$v = y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

cuius veritas quibuscunque exemplis comprobari potest.

EXEMPLUM.

Sit enim $y = xx - x$: manifestum est posito t loco x fore $v = tt - t$, quod idem expressio inuenta declarabit.

Nam ob

$$y = xx - x; \text{ erit } \frac{dy}{dx} = 2x - 1; \text{ \& } \frac{d^2y}{2dx^2} = 1;$$

vnde fiet

$$v = xx - x + (t - x)(2x - 1) + (t - x)^2 = \\ xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Si itaque y fuerit eiusmodi functio ipsius x , quae posito $x = a$ abeat in A ; ob $t = a$ & $v = A$ fiet

$$A = y + \frac{(a-x)dy}{1dx} + \frac{(a-x)^2 d^2y}{1.2 dx^2} + \frac{(a-x)^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

hnicque ergo aequationi omnes functiones ipsius x , quae facto $x = a$ abeunt in A , satisfaciunt.

CAPUT IV.

DE CONVERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES.

70.

In Capite superiori iam ex parte ostensus est usus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in investigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x , eius valor quem induit posito $x=0$, erit cognitus; hicque si ponatur $=A$, erit uti inuenimus:

$$y = \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 d^2y}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c. = A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A , etiamsi in singulis terminis insit quantitas variabilis x , sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus, erit enim:

$$y = A + \frac{xdy}{dx} + \frac{xx d^2y}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec investigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z , si loco x ubique scribatur $x + \omega$, ita ut talis sit functio ipsius $x + \omega$, qualis y est ipsius x , atque ostendimus fore:

$z =$

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

Cum igitur huius seriei singuli termini per continuam ipsius y differentiationem ponendo dx constans inueniri, simulque valor ipsius z per substitutionem $x + \omega$ in locum ipsius x actu exhiberi queat; hoc modo perpetuo obtinebitur series valori ipsius z aequalis, quae si ω fuerit quantitas vehementer parua, maxime conuergit, atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipsius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum yberrimus erit vsus.

72. ^{III} Vt igitur in insigni huius formulae vsu ostendendo ordine procedamus, substituamus primo in locum ipsius y functiones ipsius x algebraicas. Ac primo quidem sit $y = x^n$; eritque si $x + \omega$ loco x ponatur $z = (x + \omega)^n$.

Cum igitur sit:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= nx^{n-1} & \frac{ddy}{dx^2} &= n(n-1)x^{n-2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \frac{d^4y}{dx^4} &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ & & & \&c. \end{aligned}$$

his valoribus substitutis fiet:

$$(x + \omega)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \omega + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} \omega^3 + \&c.$$

quae est notissima expressio Neutoniana, qua potestas binomii $(x + \omega)^n$ in seriem conuertitur. Huiusque feri-

seriei terminorum numerus semper est finitus, si n fuerit numerus integer affirmatiuus.

73. Poterimus hinc quoque progressionem inuenire, quae valorem potestatis binomii ita exprimat, vt ea abrumpatur, quoties exponens potestatis fuerit numerus negatiuus. Statuamus enim

$$\omega = \frac{-ux}{x+u}; \text{ erit } z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

ideoque habebitur:

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^n u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{n-2}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

diuidatur vbique per x^{2n} , eritque

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n-2}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n-3}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

Ponatur nunc $-n = m$; prodibitque

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^{m-2}u^2}{1.2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^{m-3}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

quae series, quoties m est numerus integer negatiuus, finito terminorum numero constabit. Haec igitur series aequalis est primum inuentae, si pro ω & n scribantur u & m ; erit enim inde

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1.2.3} + \&c.$$

74. Haec eadem series quoque deduci potest ex expressione initio §. 70. data. Cum enim, si posito $x=0$, abeat y in A sit:

$$y = \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \dots \frac{1}{\infty} = 0$$

$$y - \frac{x dy}{dx} + \frac{xx ddy}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} - \&c. = A,$$

ponatur $y = (x+a)^n$; eritque $A = a^n$; & ob

$$\frac{dy}{dx} = n(x+a)^{n-1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)(x+a)^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}; \&c. \text{ fiet}$$

$$(x+a)^n - \frac{n}{1} x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2(x+a)^{n-2} - \&c. = a^n$$

diuidatur per $a^n(x+a)^n$, atque prodibit:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1.2(x+a)^2} - \&c.$$

quae positae respectue u , x & $-m$ pro x ; a & n orietur series ante inuenta.

75. Si pro m statuantur numeri fracti, ambae series in infinitum excurrent, interim tamen si u prae x fuerit quantitas valde parua, vehementer ad verum valorem conuergent. Sit igitur $m = \frac{\mu}{\nu}$; & $x = a^{\frac{\nu}{\mu}}$, erit

ex seriem primum inuenta:

$$(a^{\frac{\nu}{\mu}} + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu} \left(1 + \frac{\mu u}{\nu a} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu.2\nu} \cdot \frac{u^2}{a^2} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu.2\nu.3\nu} \cdot \frac{u^3}{a^3} + \&c. \right)$$

Series autem posterius inuenta dabit:

$$(a^{\frac{\nu}{\mu}} + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu} \left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^{\frac{\nu}{\mu}} + u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu.2\nu(a^{\frac{\nu}{\mu}} + u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu.2\nu.3\nu(a^{\frac{\nu}{\mu}} + u)^3} + \&c. \right)$$

Haec

Haec autem posterior series magis conuergit quam prior; cum eius termini etiam decreſcant, ſi fuerit $u > a^v$, quo caſu tamen prior ſeries diuergit.

Si igitur ſit $\mu = 1$, $v = 2$, erit

$$\sqrt{a^2 + u} = a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u}{a^2 + u} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{u^3}{(a^2 + u)^3} + \&c. \right)$$

Simili modo pro v ponendo numeros 3, 4, 5 &c.

manente $\mu = 1$, erit :

$$\sqrt[3]{a^3 + u} = a \left(1 + \frac{1}{3} \frac{u}{a^3 + u} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \frac{u^2}{(a^3 + u)^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \frac{u^3}{(a^3 + u)^3} + \&c. \right)$$

$$\sqrt[4]{a^4 + u} = a \left(1 + \frac{1}{4} \frac{u}{a^4 + u} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} \frac{u^2}{(a^4 + u)^2} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} \frac{u^3}{(a^4 + u)^3} + \&c. \right)$$

$$\sqrt[5]{a^5 + u} = a \left(1 + \frac{1}{5} \frac{u}{a^5 + u} + \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 10} \frac{u^2}{(a^5 + u)^2} + \frac{1 \cdot 6 \cdot 11}{5 \cdot 10 \cdot 15} \frac{u^3}{(a^5 + u)^3} + \&c. \right)$$

&c.

76. Ex his ergo formulis facile cuiusque numeri propoſiti radix cuiusuis poteſtatis inueniri poterit. Pro- poſito enim numero c quaeratur poteſtas ei proxima, ſive maior ſive minor: priori caſu u fiet numerus nega- tiuus, poſteriori affirmatiuus. Quod ſi vero ſeries reſul- tans non ſatis conuergere videatur, multiplicetur nume- rus c per quampiam poteſtatem puta per f^v , ſi radix dignitatis v extrahi debeat, & quaeratur numeri $f^v c$ ra- dix, quae per f diuiſa dabit radicem numeri c quaefi-

tam. Quo maior autem accipitur numerus f , eo magis series conuerget; idque imprimis, si quaequam similis potestas a^v non multum ab f^v discrepet.

EXEMPLUM I.

Quaeratur radix quadrata ex numero 2.

Si sine ulteriori praeparatione ponatur $a = 1$ & $u = 1$
fiet

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^3} + \&c.$$

quae etsi iam satis conuergit, tamen praestabit numerum 2 ante per quadratum quodpiam uti 25 multiplicare, ut productum 50 ab alio quadrato 49 minime discrepet. Hanc obrem quaeratur radix quadrata ex 50, quae per 5 diuisa dabit $\sqrt{2}$. Erit autem tum $a = 7$ & $u = 1$, vnde fiet:

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7 \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 50} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 50^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 50^3} + \&c. \right)$$

feu

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 3}{100 \cdot 200} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{100 \cdot 200 \cdot 300} + \&c. \right)$$

quae ad computum in fractionibus decimalibus institutum est aptissima.

Erit

Erit enim

$$\frac{7}{8} = 1,400000000000$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{1000} = 140000000000$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} = 2100000000$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} = 35000000$$

$$\text{præc. in } \frac{1}{1000} = 612500$$

$$\text{præc. in } \frac{1}{10000} = 11025$$

$$\text{præc. in } \frac{1}{100000} = 202$$

3

$$\text{Ergo } \sqrt[3]{2} = 1,4142135623730$$

EXEMPLUM II.

Quæraturs radix cubica ex 3.

Multiplicetur 3 per cubum 8, & quæraturs radix cubica ex 24, erit enim $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. Ponatur ergo

$a = 3$ & $b = -3$, eritque

$$\sqrt[3]{24} = 3 \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 24} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 3^2}{3 \cdot 6 \cdot 24^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 24^3} + \&c. \right)$$

&

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 8^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8^3} + \&c. \right)$$

feu

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{48} - \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{48} \cdot \frac{7}{72} + \&c. \right)$$

Z z 3

quæ

quae series iam vehementer conuergit, cum quilibet terminus plusquam octies minor sit praecedente. Sin autem 3 multiplicetur per cubum 729 fiet 2187, &

$$\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\frac{1}{3}.$$

Erit ergo ob $a = 13$ & $u = -10$.

$$\sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 2187} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^2}{3 \cdot 6 \cdot 2187^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2187^3} + \&c. \right)$$

cuius quiuis terminus plusquam ducenties minor est quam praecedens.

77. Euolutio binomii potestatis tum late patet., vt omnes functiones algebraicae in ea comprehendi queant. Si enim verbi gratia quaeratur valor huius functionis $\sqrt[3]{(a + 2bx + cxx)}$ per seriem expressus, hoc per praecedentes formulas, duos terminos tanquam vnum considerando fieri poterit. Deinde vero haec explicatio fieri poterit ope expressionis primum traditae: nam si ponatur $\sqrt[3]{(a + 2bx + cxx)} = y$, quia posito $x = 0$ fit $y = \sqrt[3]{a}$, erit $A = \sqrt[3]{a}$, & cum differentialia ipsius y ita se habeant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt[3]{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = + \frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = + \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{8}{3}}}$$

&c.

Ex

Ex his ergo obtinebitur:

$$\begin{aligned} V(a+2bx+cx^2) - \frac{(b+cx)x}{V(a+2bx+cx^2)} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cx^2)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cx^2)^{\frac{7}{2}}} - \&c. = Va. \end{aligned}$$

Quodsi ergo ubique per $V(a+2bx+cx^2)$ multiplicetur series fiet rationalis, eritque

$$\begin{aligned} Va(a+2bx+cx^2) = a+2bx+cx^2 - (b+cx)x - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cx^2)} - \\ - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cx^2)^2} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cx^2)^3} - \&c. \\ \text{fiue} \end{aligned}$$

$$V(a+2bx+cx^2) = Va + \frac{bx}{Va} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cx^2)Va} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cx^2)^2Va} - \&c.$$

78. Transeamus ergo ad functiones transcendentes, quas loco y substituamus. Sit itaque primum $y = lx$, ac posito $x + \omega$ loco x fiet $z = l(x + \omega)$. Sint autem hi logarithmi quicunque, qui ad hyperbolicos rationem teneant $n:1$, eritque pro logarithmis hyperbolicis $n=1$, & pro tabularibus erit $n = 0,4342944819032$. Hinc differentialia ipsius $y = lx$ erunt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{n}{x^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2n}{x^3}; \quad \&c.$$

ex quibus conficitur:

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

Si

Simili modo si ω statuatur negativum, erit:

$$l(x - \omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

Quodsi ergo haec series a priori subtrahatur, fiet

$$\frac{l(x+\omega)}{x-\omega} = 2n \left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \&c. \right)$$

79. Si in serie primum inuenta:

$$l(x + \omega) = lx + \frac{n\omega}{x} + \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} + \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

ponatur $\omega = \frac{xx}{u-x}$, erit $\frac{l(x+\omega)}{x-\omega} = \frac{lx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \&c.$

$$l(x + \omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nx}{2(u-x)^2} + \&c.$$

atque

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \&c.$$

sumtoque x negativo habebitur:

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4} + \&c.$$

Harum ergo serierum opè logarithmi expedite inveniri poterunt, si quidem series valde conuergant. Huiusmodi autem erunt sequentes, quae ex inuentis facile deducuntur:

$$l(x+1) = lx + n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \&c. \right)$$

$$l(x-1) = lx - n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \&c. \right)$$

quae

quae duae series, cum tantum signis a se inuicem discrepent, si ad calculum reuocentur, ex logarithmo numeri x cognito, eadem opera logarithmi amborum numerorum $x+1$ & $x-1$ reperientur. Deinde ex reliquis seriebus erit:

$$l(x+1) = l(x-1) + 2n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \&c. \right)$$

$$l(x-1) = l(x-1) - 2n \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + \&c. \right)$$

$$l(x+1) = l(x+1) + 2n \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c. \right)$$

80. Ex dato ergo logarithmo numeri x , logarithmi numerorum contiguorum $x+1$ & $x-1$ facile inueniri poterunt; quin etiam ex logarithmo numeri $x-1$ logarithmus numeri binario maioris & vicissim eruatur. Quod quamuis in Introductione vberius sit ostensum, tamen hic quaedam exempla adiungemus.

EXEMPLUM I.

Ex dato numeri 10 logarithmo hyperbolico, qui est 2,3025850929940, logarithmos hyperbolicos numerorum 11 & 9 inuenire.

Quoniam haec quaestio logarithmos hyperbolicos spectat, erit $n=1$; ideoque habebuntur hae series:

$$l11 = l10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \&c.$$

$$l9 = l10 - \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} - \frac{1}{5 \cdot 10^5} + \&c.$$

A a a

Ad

Ad quarum serierum summas inueniendas, colligantur termini pares & impares seorsum, eritque

$\frac{1}{10} = 0,100000000000$	$\frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0,005000000000$
$\frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0,000333333333$	$\frac{1}{4 \cdot 10^4} = 0,000025000000$
$\frac{1}{5 \cdot 10^5} = 0,000002000000$	$\frac{1}{6 \cdot 10^6} = 0,000000166666$
$\frac{1}{7 \cdot 10^7} = 0,0000000142857$	$\frac{1}{8 \cdot 10^8} = 0,0000000012500$
$\frac{1}{9 \cdot 10^9} = 0,0000000001111$	$\frac{1}{10 \cdot 10^{10}} = 0,0000000000100$
$\frac{1}{11 \cdot 10^{11}} = 0,0000000000009$	$\frac{1}{12 \cdot 10^{12}} = 0,0000000000001$
summa = 0,1003353477310	summa = 0,0050251679267

Summa vtriusque erit . . . 0,1053605156577

Differentia ambarum erit 0,0953101798043

Iam est $l_{10} = 2,3025850929940$

Ergo erit $l_{11} = 2,3978952727983$

& $l_9 = 2,1972245773363$

Hinc porro erit $l_3 = 1,0986122886681$

& $l_{99} = 4,5951198501346$

EXEMPLUM II.

Ex logarithmo hyperbolico numeri 99 nunc inuento invenire logarithmum numeri 101.

Adhibeatur ad hoc series supra inuenta :

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{7x^7} + \&c.$$

in qua fiat $x = 100$; eritque :

$$l101 = l99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3 \cdot 100^3} + \frac{2}{5 \cdot 100^5} + \frac{2}{7 \cdot 100^7} + \&c.$$

cuius seriei summa ex his quatuor terminis colligitur
 $= 0,0200006667066$, quae ad $l99$ addita dabit
 $l101 = 4,6151205168412$.

EXEMPLUM III.

Ex dato logarithmo tabulari numeri 10, qui est $= 1$, invenire logarithmos numerorum 11 & 9.

Quoniam hic logarithmos communes tabulares quaerimus, erit $n = 0,4342944819032$, posito ergo $x = 10$ erit :

$$l11 = l10 + \frac{n}{10} + \frac{n}{2 \cdot 10^2} - \frac{n}{3 \cdot 10^3} + \frac{n}{4 \cdot 10^4} + \&c.$$

$$l9 = l10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2 \cdot 10^2} - \frac{n}{3 \cdot 10^3} - \frac{n}{4 \cdot 10^4} - \&c.$$

Colligantur termini pares & impares seorsim :

$\frac{n}{10} = 0,0434294481903$	$\frac{n}{2 \cdot 10^2} = 0,0021714724095$
$\frac{n}{3 \cdot 10^3} = 0,0001447648273$	$\frac{n}{4 \cdot 10^4} = 0,0000108573620$
$\frac{n}{5 \cdot 10^5} = 0,0000008685889$	$\frac{n}{6 \cdot 10^6} = 0,0000000723824$
$\frac{n}{7 \cdot 10^7} = 0,0000000062042$	$\frac{n}{8 \cdot 10^8} = 0,0000000005428$
$\frac{n}{9 \cdot 10^9} = 0,0000000000482$	$\frac{n}{10 \cdot 10^{10}} = 0,0000000000043$
$\frac{n}{11 \cdot 10^{11}} = 0,0000000000005$	$\frac{n}{12 \cdot 10^{12}} = 0,0000000000000$

summa = 0,0435750878593 | summa = 0,0021824027010

Aggregatum ambarum est = 0,0457574905603

Differentia earum est = 0,0413926851583

Cum ergo fit $l_{10} = 1,0000000000000$

Erit $l_{11} = 1,0413926851583$

& $l_9 = 0,9542425094396$

Hinc $l_3 = 0,4771212547198$

& $l_{99} = 1,9956351945979$

EXEMPLUM IV.

Ex logarithmo tabulari numeri 99 hic inuentis inuenire logarithmum tabularem numeri 101.

Adhibendo hic eandem feriem, qua in Exemplo secundo vfi sumus, habebimus:

$$l101 = l99 + 2n \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3 \cdot 100^3} + \frac{1}{5 \cdot 100^5} + \&c. \right)$$

cuius seriei posito pro n valore debito, summa mox reperietur $= 0,0086861791849$ quae addita,

ad $l99 = 1,9956351945979$ oritur.

$$l101 = 2,0043213737829$$

81. Tribuamus nunc in expressione nostra generali y valorem exponentialem, fitque $y = a^x$, posito $x + \omega$ loco x ; erit $z = a^{x+\omega}$, cuius valor ob differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3; \quad \&c.$$

erit

$$a^{x+\omega} = a^x \left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c. \right)$$

quae si diuidatur per a^x prodibit series valores quantitatis exponentialis exprimens, quam supra in Introductione iam elicuimus: nempe

$$e^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

A a a 3

Si-

Simili modo sumto ω negatiuo erit:

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} - \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

ex quarum combinatione oritur:

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6 (la)^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

$$\frac{a^{\omega} - a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5 (la)^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

vbi notandum est la denotare logarithmum hyperbolicum numeri a .

82. Huius formulae ope ex dato quouis logarithmo numerus ei conueniens reperiri poterit. Sit enim propositus logarithmus quicumque u ad canonem, in quo numeri a logarithmus $= 1$ statuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus x proxime ad u accedens, fitque $u = x + \omega$; numerus autem logarithmo x conueniens sit $= y = a^x$, erit numerus logarithmo $u = x + \omega$ respondens $= a^{x+\omega} = z$; fietque

$$z = y \left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \&c. \right)$$

quae series ob ω numerum valde paruum, vehementer conuerget, cuius vsum sequenti exemplo declaremus.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus isti binarii potestati 2^{2^4} aequalis.

Cum sit $2^{2^4} = 16777216$, erit $2^{2^4} = 2^{16777216}$,
fu-

CAPUT IV. 375

sumendis que logarithmis vulgaribus, erit huius numeri logarithmus $\equiv 16777216 \text{ } l2.$ Cum autem sit:

$$l2 \equiv 0,30102999566398119521373889$$

numeri quaesiti logarithmus erit:

$$5050445,259733675932039063$$

cuius characteristica indicat numerum quaesitum exprimi 5050446 figuris, quae cum omnes exhiberi nequeant, sufficiet figuras initiales assignasse, quae ex mantissa

$$,259733675932039063 \equiv "$$

inuestigari debent. Ex tabulis autem colligitur, numerum cuius logarithmus proxime ad hunc accedat fore 18.101 $\equiv 1,818$; qui ponatur y ; cuius logarithmus

$$x \equiv 0,259593878885948644, \text{ vnde erit}$$

$$\omega \equiv 0,000139797046090419. \text{ Cum iam sit}$$

$$a \equiv 10 \text{ erit}$$

$$la \equiv 2,3025850929940456840179914 \quad \&$$

$$\omega la \equiv 0,000321894594372398 \quad \text{Deinde erit}$$

$$y \equiv 1,818000000000000000$$

$$\frac{\omega la}{1} y \equiv 585204372569020$$

$$\frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} y \equiv 94187062064$$

$$\frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} y \equiv 10106100$$

$$\frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} y \equiv 813$$

$$1818585298569737997$$

hae-

haeque sunt figurae initiales numeri quaesiti, cuius omnes figurae excepta forte vltima sunt iustae.

83. Consideremus quantitates transcendentes a circulo pendentes, sitque yti perpetuo ponimus, radius circuli $\equiv 1$, atque y denotet arcum circuli cuius sinus $\equiv x$ seu sit $y \equiv A \sin x$. Ponatur $x + \omega$ loco x , eritque $z \equiv A \sin(x + \omega)$: ad quem valorem exprimendum quaerantur differentialia ipsius y :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{V(1-xx)}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-1-2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}} \quad \&c.$$

Ex his ergo inuenitur:

$$\begin{aligned} A \sin(x+\omega) &\equiv A \sin x + \frac{\omega}{V(1-xx)} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c. \end{aligned}$$

84. Si ergo cognitus fuerit arcus, cuius sinus est $\equiv x$, huius formulae beneficio inueniri poterit arcus, cuius sinus est $x + \omega$, si fuerit ω quantitas valde parua. Series autem cuius summa addi debet, exprimetur in partibus radii, quae ad arcum facile reducentur: uti ex hoc exemplo intelligetur.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus circuli, cuius sinus est

$$\equiv \frac{1}{3} \equiv 0,3333333333.$$

Quaeratur ex tabulis finuum arcus, cuius sinus sit proxime minor, quam $\frac{1}{3}$, qui erit $19^{\circ}, 28'$, cuius sinus est $\equiv 0,3332584$. Statuatur ergo $19^{\circ}, 28'$, $\equiv A \sin x \equiv y$. erit $x \equiv 0,3332584$, & $\omega \equiv 0,0000749$, atque ex tabulis $\sqrt{(1 - x^2)} \equiv \cos y \equiv 0,9428356$. Erit ergo arcus quaesitus z , cuius sinus $\equiv \frac{1}{3}$ proponitur

$$\equiv 19^{\circ}, 28' + \frac{\omega}{\cos y} + \frac{\omega \omega \sin y}{2 \cos^3 y},$$

quae expressio iam sufficit; erit ergo per logarithmos calculum instituendo:

$$l\omega = 5,8744818$$

$$l\cos y = 9,9744359$$

$$l\frac{\omega}{\cos y} = 5,9000459 \quad ; \quad \frac{\omega}{\cos y} = 0,0000794412$$

$$l\frac{\omega^2}{\cos y} = 1,8000918$$

$$l\frac{\sin y}{\cos y} = 9,5483452$$

$$1,3484370$$

$$l2 = 0,3010300$$

$$l\frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 1,0474070 \quad ; \quad \frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 0,0000000011$$

$$\text{Summa} = 0,0000794423$$

qui est valor arcus ad $19^\circ, 28'$ addendi, ad quem in minutis secundis exprimendum, sumamus eius logarithmum

$$\text{qui est} \quad 5,9000518$$

$$\text{a quo subtrahatur} \quad 4,6855749$$

$$1,2144769$$

$$\text{cui log. respondet num.} = 16,38615$$

qui est numerus minutorum secundorum; fractionem vero in tertiis & quartis exprimendo fiet arcus quaesitus

$$= 19^\circ, 28', 16'', 23''', 10'''', 8''', 24''.$$

85. Simili modo expressio pro cosinibus eruetur; posito enim $y = A \cos x$; quia est $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, series ante inuenta inuariata manebit, dummodo eius signa permutentur. Erit itaque

$$A \cos(x+\omega) = A \cos x - \frac{\omega}{\sqrt{1-xx}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c.$$

quae series pariter ac praecedens vehementer semper conuerget, si ex tabulis finuum proxime veri anguli excerptantur, ita ut plerumque vnicus terminus primus $\frac{\omega}{\sqrt{1-xx}}$ sufficiat. Interim tamen si x fuerit ipsi 1 seu finui toti proxime aequalis, tum ob denominatores admodum paruos illa series conuergentiam amittit. His igitur casibus, quibus x non multum ab 1 deficit, quoniam tum differentiae fiunt minimae, commodius vtemur solita interpolatione.

86. Ponamus quoque pro y arcum cuius tangens datur, sitque $y = A \tan x$ & $z = A \tan(x+\omega)$ ita ut sit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

Ad quos terminos indagandos quaerantur ipsius y singula differentialia:

B b b 2

dy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+xx)^5}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+xx)^6}$$

&c.

vnde colligitur fore:

$$A \operatorname{tang}(x+\omega) = A \operatorname{tang} x +$$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3} (xx - \frac{1}{3}) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4} (x^3 - x) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5} (x^4 - 2x^2 + \frac{1}{5}) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6} (x^5 - \frac{10}{3}x^3 + x) + \&c.$$

87. Haec series, cuius lex progressionis non adeo manifesta est, transmutari potest in aliam formam, cuius progressio statim in oculos incurrit. Ponatur in hunc

finem $A \operatorname{tang} x = 90^\circ - u$, vt fit $x = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$;

erit $1+xx = \frac{1}{\sin^2 u}$, vnde fit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx} = \sin u$.

Cum

Cum deinde sit $dx = \frac{-du}{\sin u^2}$, seu $du = -dx \sin u^2$,

fiet vltiora differentialia fumendo :

$$\frac{ddy}{dx} = 2 du \sin u \cos u = du \sin 2u = -dx \sin u \sin 2u$$

$$\text{ideoque } \frac{ddy}{1 dx^2} = + \sin u^2. \sin 2u.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{2 dx^2} &= -du \sin u. \cos u. \sin 2u - du \sin u^2 \cos 2u = -du \sin u. \sin 3u \\ &= dx \sin u^3 \sin 3u \end{aligned}$$

$$\text{ideoque } \frac{d^3 y}{1.2 dx^3} = + \sin u^3. \sin 3u$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y}{1.2.3 dx^3} &= du \sin u^2. (\cos u. \sin 3u + \sin u. \cos 3u) = du \sin u^2. \sin 4u \\ &= -dx \sin u^4. \sin 4u \end{aligned}$$

$$\text{ideoque } \frac{d^4 y}{1.2.3 dx^4} = - \sin u^4. \sin 4u$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 y}{1.2.3.4 dx^4} &= -du \sin u^3 (\cos u \sin 4u + \sin u \cos 4u) = -du \sin u. \sin 5u \\ &= + dx \sin u^5. \sin 5u \end{aligned}$$

$$\text{ideoque } \frac{d^5 y}{1.2.3.4 dx^5} = + \sin u^5. \sin 5u$$

&c.

Ex quibus colligitur fore :

$$\begin{aligned} \text{Atg}(x+\omega) &= \text{Atg}x + \frac{\omega}{1} \sin u. \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2. \sin u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3. \sin 3u \\ &\quad - \frac{\omega^4}{4} \sin u^4. \sin 4u + \frac{\omega^5}{5} \sin u^5. \sin 5u - \frac{\omega^6}{6} \sin u^6. \sin 6u + \&c. \end{aligned}$$

vbicum sit $\text{Atg}x = y$ & $\text{Atg}x = 90^\circ - u$, erit $y = 90^\circ - u$.

88. Si ponatur $\text{Acot } x = y$ & $\text{Acot}(x + \omega) = z$;
erit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

Cum autem sit $dy = \frac{-dx}{1+x}$, termini huius seriei con-

gruent praeter primum cum ante inuentis, exceptis tantum
signis. Quare si ponatur, vt ante $\text{Atang } x = 90^\circ - u$,
feu $\text{Acot } x = u$, vt sit $u = y$; erit:

$$\begin{aligned} \text{Acot}(x + \omega) = \text{Acot } x - \frac{\omega}{1} \text{fn } u \cdot \text{fn } u + \frac{\omega^2}{2} \text{fn } u^2 \cdot \text{fn } 2u - \frac{\omega^3}{3} \text{fn } u^3 \cdot \text{fn } 3u \\ + \frac{\omega^4}{4} \text{fn } u^4 \cdot \text{fn } 4u - \frac{\omega^5}{5} \text{fn } u^5 \cdot \text{fn } 5u + \&c. \end{aligned}$$

quae expressio immediate ex praecedente sequitur: quia
enim est $\text{Acot}(x + \omega) = 90^\circ - \text{Atang}(x + \omega)$

$$\& \text{Acot } x = 90^\circ - \text{Atang } x; \text{ erit}$$

$$\text{Acot}(x + \omega) - \text{Acot } x = -\text{Atang}(x + \omega) + \text{Atang } x.$$

89. Ex his expressionibus multa egregia corollaria
consequuntur, prout loco x & ω dati valores substituantur.
Sit igitur primum $x = 0$; & cum sit $u = 90^\circ - \text{Atang } x$
fiet $u = 90^\circ$; atque $\text{fn } u = 1$; $\text{fn } 2u = 0$; $\text{fn } 3u = -1$;
 $\text{fn } 4u = 0$; $\text{fn } 5u = 1$; $\text{fn } 6u = 0$; $\text{fn } 7u = -1$; &c.
vnde fiet

$$\text{Atang } \omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \&c.$$

quae est notissima series exprimens arcum, cuius tangens
est $= \omega$.

Sit

Sit $x = 1$, erit $\text{Atang } x = 45^\circ$, ideoque $u = 45^\circ$, hinc
 $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$;
 $\sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$; $\sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$;
 $\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ &c. Ex quibus fit:

$$\text{Atg}(1+\omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16} \\ + \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \&c.$$

Si igitur fit $\omega = -1$; ob $\text{Atang}(1+\omega) = 0$, & $45^\circ = \frac{\pi}{4}$
 fiet:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} - \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} \\ + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \&c.$$

qui valor si loco arcus 45° substituatur in illa expressione
 erit: $\text{Atang}(1+\omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^2} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \&c.$$

Illa autem series maxime est idonea ad valorem ipsius
 $\frac{\pi}{4}$ proxime inueniendum.

90. Cum fit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} - \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$

ter-

termini autem in denominatoribus habentes 2, 6, 10, &c.

$$\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{10 \cdot 2^5} - \frac{1}{14 \cdot 2^7} + \&c. \text{ exprimunt } \frac{1}{2} \text{Atg} \frac{1}{2};$$

erit :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \text{Atg} \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} - \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \frac{1}{9 \cdot 2^5} - \frac{1}{11 \cdot 2^6} + \&c.$$

In altera autem formula posito ω negatiuo, cum sit

$$\text{Atg}(1-\omega) = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} - \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \&c.$$

$$= \frac{\omega}{1 \cdot 2} - \frac{\omega^2}{2 \cdot 2} + \frac{\omega^3}{3 \cdot 2^2} - \frac{\omega^5}{5 \cdot 2^3} + \frac{\omega^6}{6 \cdot 2^3} - \frac{\omega^7}{7 \cdot 2^4} + \&c.$$

si fiat $\omega = \frac{1}{2}$; erit :

$$\text{Atg} \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} - \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \&c.$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^5} - \frac{1}{5 \cdot 2^8} + \frac{1}{6 \cdot 2^9} - \frac{1}{7 \cdot 2^{11}} + \&c.$$

& terminis per 2, 6, 10, &c. diuisis seorsim sumtis erit:

$$\text{Atg} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{Atg} \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} - \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \&c.$$

$$- \frac{1}{2} \text{Atg} \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} + \frac{1}{5 \cdot 2^8} - \frac{1}{7 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{9 \cdot 2^{14}} - \&c.$$

ideoque

$$\frac{1}{2} \text{Atang} \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^4} + \&c.$$

$$- \frac{1}{2} \text{Atg} \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} + \frac{1}{5 \cdot 2^8} - \frac{1}{7 \cdot 2^{11}} + \&c.$$

qui

qui valor si in superiore serie substituatur, atque $A \tan \frac{1}{2}$ ipse in seriem. conuertatur, reperietur :

$$\frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^1} - \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1}{7 \cdot 2^3} - \frac{1}{9 \cdot 2^4} + \&c. \\ - \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^5} - \frac{1}{5 \cdot 2^8} + \frac{1}{7 \cdot 2^{11}} - \frac{1}{9 \cdot 2^{14}} + \&c. \\ - \frac{1}{1 \cdot 2^4} + \frac{1}{3 \cdot 2^{10}} - \frac{1}{5 \cdot 2^{16}} + \frac{1}{7 \cdot 2^{22}} - \frac{1}{9 \cdot 2^{28}} + \&c. \end{array} \right]$$

90. Sequuntur hae multaeque aliae series ex positione $x = 1$: sin autem ponamus $x = \sqrt{3}$, vt sit $A \tan x = 60^\circ$, fiet $u = 30$, & $\sin u = \frac{1}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = \frac{1}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = -\frac{1}{2}$; &c. vnde erit:

$$A \tan(\sqrt{3} + \omega) = 60^\circ + \frac{\omega}{1 \cdot 2^2} - \frac{\omega^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 2^2} + \frac{\omega^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{\omega^4 \sqrt{3}}{4 \cdot 2^5} + \frac{\omega^5}{5 \cdot 2^6} - \frac{\omega^7}{7 \cdot 2^8} + \frac{\omega^8 \sqrt{3}}{8 \cdot 2^9} - \frac{\omega^9}{9 \cdot 2^9} + \frac{\omega^{10} \sqrt{3}}{10 \cdot 2^{11}} - \frac{\omega^{11}}{11 \cdot 2^{12}} + \&c.$$

Sin autem ponatur $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vt sit $A \tan x = 30^\circ$; erit $u = 60^\circ$; atque $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 0$; $\sin 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; &c.

C c c

qui-

quibus valoribus substitutis erit:

$$\text{Atg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \omega\right) = 30^\circ + \frac{3\omega}{1 \cdot 2^2} - \frac{3\omega^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 2^3} + \frac{3^2 \omega^4 \sqrt{3}}{4 \cdot 2^5} - \frac{3^3 \omega^5}{5 \cdot 2^6} + \&c.$$

si igitur fit $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ob $30^\circ = \frac{\pi}{6}$; erit:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^5} - \frac{1}{5 \cdot 2^6} + \frac{1}{7 \cdot 2^8} - \frac{1}{8 \cdot 2^9} + \&c.$$

91. Resumamus expressionem generalem inuentam:

$$A \text{ tang}(x + \omega) = A \text{ tang } x$$

$$+ \frac{\omega}{1} \sin u \cdot \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 \cdot \sin 2u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 \cdot \sin 3u - \&c.$$

ac ponamus $\omega = -x$, vt fit $A \text{ tang}(x + \omega) = 0$, eritque

$$A \text{ tang } x =$$

$$\frac{x}{1} \sin u \cdot \sin u + \frac{x^2}{2} \sin u^2 \cdot \sin 2u + \frac{x^3}{3} \sin u^3 \cdot \sin 3u + \&c.$$

Cum autem fit $A \text{ tang } x = 90 - u = \frac{\pi}{2} - u$;

erit: $x = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$. Quamobrem erit:

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos u \cdot \sin u + \frac{1}{2} \cos^2 u \cdot \sin 2u + \frac{1}{3} \cos^3 u \cdot \sin 3u + \frac{1}{4} \cos^4 u \cdot \sin 4u + \&c.$$

quae series eo magis est notatu digna, quod quicunque arcus loco u accipiatur, valor seriei semper prodeat idem

$= \frac{\pi}{2}$. Sin autem fit $\omega = -2x$, ob $\text{Atg}(-x) = -\text{Atg } x$;

fiet: $2 A \text{ tang } x =$

$$\frac{2x}{1} \sin u \cdot \sin u + \frac{4x^2}{2} \sin u^2 \cdot \sin 2u + \frac{8x^3}{3} \sin u^3 \cdot \sin 3u + \&c.$$

Cum

Cum autem sit $A \operatorname{tang} x = \frac{\pi}{2} - u$ & $x = \frac{\operatorname{cof} u}{\sin u}$, erit:

$$\pi = 2u + \frac{2}{1} \operatorname{cof} u \cdot \sin u + \frac{2^2}{2} \operatorname{cof} u^2 \cdot \sin 2u + \frac{2^3}{3} \operatorname{cof} u^3 \cdot \sin 3u + \&c.$$

Sit $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$; erit $\operatorname{cof} u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$;

$$\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin 4u = 0; \sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \sin 6u = -1;$$

$$\sin 7u = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin 8u = 0; \sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{eritque}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} + \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \&c.$$

quae series etsi diuergit, tamen ob simplicitatem est notatu digna.

92. Ponatur in expressione generali inuenta:

$$\omega = -x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{\sin u \cdot \operatorname{cof} u}, \text{ ob } x = \frac{\operatorname{cof} u}{\sin u}; \text{ erit:}$$

$$A \operatorname{tang}(x + \omega) = A \operatorname{tang} -\frac{1}{x} = -A \operatorname{tang} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + A \operatorname{tang} x.$$

Hinc ergo obtinebitur sequens expressio:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{1 \operatorname{cof} u} + \frac{\sin 2u}{2 \operatorname{cof} u^2} + \frac{\sin 3u}{3 \operatorname{cof} u^3} + \frac{\sin 4u}{4 \operatorname{cof} u^4} + \frac{\sin 5u}{5 \operatorname{cof} u^5} + \&c.$$

quae posito $u = 45^\circ$ dat eandem seriem, quam ultimo loco inuenimus. Sin autem ponamus $\omega = -V(1 + xx)$

$$\text{ob } x = \frac{\operatorname{cof} u}{\sin u}, \text{ fiet } \omega = -\frac{1}{\sin u}, \&$$

Ccc 2

A tang

$$A \operatorname{tang}(x - \sqrt{1+xx}) - A \operatorname{tang}(\sqrt{1+xx} - x)$$

$$= -\frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - A \operatorname{tang} x \right) = -\frac{1}{2} u,$$

$$\& A \operatorname{tang} x = \frac{\pi}{2} - u. \quad \text{Hancobrem erit:}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin u + \frac{1}{2} \sin 2u + \frac{1}{3} \sin 3u + \frac{1}{4} \sin 4u + \&c.$$

Quodsi haec aequatio differentietur erit:

$$0 = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cos 4u + \cos 5u + \&c,$$

cuius ratio ex natura serierum recurrentium intelligitur.

93. Si simili modo series ante inuentae differentientur, nouae series summabiles reperientur. Ac primo quidem ex serie:

$$A \operatorname{tang}(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \&c.$$

sequitur

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \&c.$$

$$\text{quae oritur ex evolutione fractionis } \frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}.$$

Deinde ista series:

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos u \sin u + \frac{1}{2} \cos u^2 \sin 2u + \frac{1}{3} \cos u^3 \sin 3u + \frac{1}{4} \cos u^4 \sin 4u + \&c.$$

per differentiationem dabit:

$$0 = 1 + \cos 2u + \cos u \cos 3u + \cos u^2 \cos 4u + \cos u^3 \cos 5u + \&c.$$

$$\text{Denique series } \frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin 2u}{2 \cos u^2} + \frac{\sin 3u}{3 \cos u^3} + \frac{\sin 4u}{4 \cos u^4} + \&c.$$

dat

$$\text{dat } 0 = \frac{1}{\cos u^2} + \frac{\cos u}{\cos u^3} + \frac{\cos 2u}{\cos u^4} + \frac{\cos 3u}{\cos u^5} + \frac{\cos 4u}{\cos u^6} + \&c.$$

$$\text{feu } 0 = 1 + \frac{\cos u}{\cos u^2} + \frac{\cos 2u}{\cos u^3} + \frac{\cos 3u}{\cos u^4} + \frac{\cos 4u}{\cos u^5} + \frac{\cos 5u}{\cos u^6} + \&c.$$

94. Imprimis autem expressio inuenta:

$$A \text{ tang } (x + \omega) =$$

$$A \text{ tg } x + \frac{\omega}{1} \sin u \cdot \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 \cdot \sin u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 \cdot \sin 3u - \&c.$$

existente $x = \cot u$ feu $u = A \cot x = 90^\circ - A \text{ tang } x$ inferuiet ad angulum seu arcum datae cuique tangenti respondentem inueniendum. Sit enim proposita tangens $= t$, quaeraturque in tabulis tangens ad hanc proxime accedens $= x$, cui respondeat arcus $= y$; eritque $u = 90^\circ - y$. Tum ponatur $x + \omega = t$, feu $\omega = t - x$; eritque arcus quaesitus:

$$= y + \frac{\omega}{1} \sin u \cdot \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 \cdot \sin 2u + \&c.$$

quae regula tum praecipue est utilis, cum tangens proposita fuerit admodum magna, ac propterea arcus quaesitus parum a 90° discrepet. His enim casibus ob tangentes vehementer increscentes, solita methodus interpolationum nimium a veritate abducit. Sit ergo propositum hoc exemplum.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus, cuius tangens sit $= 100$, posito radio $= 1$.

Ccc 3

Ar-

Arcus proxime quaesito aequalis est $89^{\circ}, 25'$, cuius tangens est $x = 98,217943$ secund.
 quae subtrahatur a $z = 100,00000$

remanebit $w = 1,782057$

Deinde cum sit $y = 89^{\circ}, 25'$, erit $u = 0^{\circ}, 35'$,
 $2u = 1^{\circ}, 10'$, $3u = 1^{\circ}, 45'$, &c. Iam singuli termini
 per logarithmos inuestigentur.

Ad $l w = 0,2509215$
 add. $l \sin u = 8,0077867$
 $l \sin u = 8,0077867$

$l w \sin u, \sin u = 6,2664949$
 $4,6855749$

fubr. $= 1,5809200$
 Ergo $w \sin u, \sin u = 38,09956$ secund.
 Ad $l w \sin u^2 = 6,2664949$
 add. $l w = 0,2509215$
 $l \sin 2u = 8,3087941$

$4,8262105$
 fuhr. $l 2 = 0,3010300$

$l \frac{1}{2} w^2 \sin u^2, \sin 2u = 4,5251805$
 fuhr. $4,6855749$

Remanet $9,8396056$

Ergo $\frac{1}{2} w^2 \sin u^2, \sin 2u = 0,69120$ secund.

Porro

CAPUT IV.

391

Porro ad $l\omega^3 = 0,7527645$

add. $l \sin u^3 = 4,0233601$

$l \sin 3u = 8,4848479$

$3,2609725$

subtr. $l_3 = 0,4771213$

$2,7838512$

subtr. $4,6855749$

$8,0982763$

Ergo $\frac{1}{3}\omega^3 \sin u^3 \sin 3u = 0,01254$ secund.

Denique ad $l\omega^4 = 1,0036860$

add. $l \sin u^4 = 2,0311468$

$l \sin 4u = 8,6097341$

$1,6445669$

subtr. $l_4 = 0,6020600$

$1,0425069$

subtr. $4,6855749$

$6,3569320$

Ergo $\frac{1}{4}\omega^4 \sin u^4 \sin 4u = 0,00023$ secund.

Hinc:

Hinc :

Termini addendi		Termini subtrahendi	
38,09956		0,69120	
0,01254		0,00023	
<hr/>		<hr/>	
38,11210		0,69143	
subtr.	0,69143		
<hr/>			

$$37,42067 = 37^{\text{II}}, 25^{\text{III}}, 14^{\text{IV}}, 24^{\text{V}}, 36^{\text{VI}}.$$

Quocirca arcus, cuius tangens centies superat radium erit: $89^{\circ}, 25^{\text{I}}, 37^{\text{II}}, 25^{\text{III}}, 14^{\text{IV}}, 24^{\text{V}}, 36^{\text{VI}}$, neque error ad minuta quarta ascendit; sed in minutis tantum quintis inesse potest, ex quo vere hunc angulum pronunciare poterimus $= 89^{\circ}, 25^{\text{I}}, 37^{\text{II}}, 25^{\text{III}}, 14^{\text{IV}}$. Si tangens adhuc maior proponatur, etiam si fortasse ω maius prodeat, tamen ob ω angulum adhuc minorem, aeque expedite arcus definiri poterit.

95. Cum hic pro y arcum circuli substituerimus, nunc functiones reciprocas in locum y ponamus, cuiusmodi sunt $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, &c. Sit igitur $y = \sin x$, positoque $x + \omega$ loco x , fiet: $z = \sin(x + \omega)$, atque aequatio

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 y}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24 dx^4} + \&c.$$

$$\text{ob } \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x; \quad \&c. \text{ dabit}$$

$$\sin(x + \omega) = \sin x + \omega \cos x - \frac{1}{2} \omega^2 \sin x - \frac{1}{6} \omega^3 \cos x + \frac{1}{24} \omega^4 \sin x + \&c.$$

&

& sumto ω negatiuo erit:

$$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x + \frac{1}{2}\omega^2 \sin x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$$

Quod si vero statuatur $y = \cos x$,

$$\text{ob } \frac{dy}{dx} = -\sin x; \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x; \frac{d^3y}{dx^3} = \sin x; \frac{d^4y}{dx^4} = \cos x; \&c.$$

erit:

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x + \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$$

& facto ω negatiuo erit:

$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x + \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$$

96. Vfus harum formularum eximius est cum in condendis, tum interpolandis tabulis sinuum & cosinuum. Si enim cogniti fuerint sinus & cosinus cuiuspiam arcus x , ex iis facili negotio sinus & cosinus angulorum $x+\omega$ & $x-\omega$ inueniri possunt, siquidem differentia ω fuerit satis exigua: hoc enim casu series inuentae vehementer couergunt. Ad hoc vero necesse est, vt arcus ω in partibus radii exprimatur; quod cum arcus 180° fit:

$$3,14159265358979323846$$

facile fiet: erit enim diuisione per 180 instituta

$$\text{arcus } 1^\circ = 0,017453292519943295769$$

$$\text{arcus } 1' = 0,000290888208665721596$$

$$\text{arcus } 10'' = 0,00048481368110953599$$

EXEMPLUM I.

Inuenire sinus & cosinus angulorum 45° , $1'$, & 44° , $59'$, ex datis sinu & cosinu anguli 45° , quorum vterque est

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067811865.$$

D d d

Cum

Cum igitur fit :

$$, \sin x \equiv \cos x \equiv 0,7071067811865$$

$$\text{atque } \omega \equiv 0,0002908882086$$

erit ad multiplicationes facilius instituendas :

$$2\omega \equiv 0,0005817764173$$

$$3\omega \equiv 0,0008726646259$$

$$4\omega \equiv 0,0011635528346$$

$$5\omega \equiv 0,0014544410432$$

$$6\omega \equiv 0,0017453292519$$

$$7\omega \equiv 0,0020362174605$$

$$8\omega \equiv 0,0023271056692$$

$$9\omega \equiv 0,0026179938779$$

Ergo $\omega \sin x$ & $\omega \cos x$ hoc modo inuenietur :

$$7 \quad . \quad 0,00020362174605$$

$$\square \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$7 \quad . \quad 0,0000020362174$$

$$1 \quad . \quad . \quad . \quad 2908882$$

$$0 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$6 \quad . \quad . \quad 174532$$

$$7 \quad . \quad . \quad 20362$$

$$8 \quad . \quad . \quad 2372$$

$$1 \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

$$1 \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$8 \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$6 \quad . \quad . \quad . \quad 0$$

$$\omega \sin x \equiv \omega \cos x \equiv 0,00020568902490$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{2} \omega \cos x \equiv 0,00010284451245$$

per

per ω . 1 . 0,00000002908882

0

2 . . . 58177

8 . . . 23271

4 . . . 1163

4 . . . 116

5 14

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0,00000002991625$$

$$\frac{1}{8}\omega^2 \cos x = 0,00000000997208$$

per ω . 9 . 0,00000000000261

9 26

7 2

$$\frac{1}{8}\omega^3 \cos x = 0,00000000000290$$

Ergo ad $\sin 45^\circ, 1^1$, inueniendum:

$$\text{Ad } \sin x = 0,7071067811865$$

$$\text{add. } \omega \cos x = 2056890249$$

$$0,7073124702114$$

$$\text{subtr. } \frac{1}{2}\omega^2 \sin x = 299162$$

$$0,7073124402952$$

$$\text{subtr. } \frac{1}{8}\omega^3 \cos x = 29$$

$$\sin 45^\circ, 1^1 = 0,7073124402923 = \cos 44^\circ, 59^1.$$

D d d 2

At

At ad $\cos 45^\circ, 1^{\text{r}}$, inueniendum:

$$\begin{array}{rcl}
 A \cos x & = & 0,7071067811865 \\
 \text{subtr. } \omega \sin x & = & 2056890249 \\
 \hline
 & & 0,7069010921616 \\
 \text{subtr. } \frac{1}{2} \omega^2 \cos x & = & 299162 \\
 \hline
 & & 0,7069010622454 \\
 \text{add. } \frac{1}{6} \omega^3 \sin x & = & 29 \\
 \hline
 & & 0,7069010622483
 \end{array}$$

$$\cos 45^\circ, 1^{\text{r}}, = 0,7069010622483 = \sin 44^\circ, 59^{\text{r}}.$$

EXEMPLUM II.

Ex datis \sin & \cos arcus $67^\circ, 30^{\text{r}}$, inuenire \sin & \cos arcuum $67^\circ, 31^{\text{r}}$, & $67^\circ, 29^{\text{r}}$.

Abfoluamus hunc calculum in fractionibus decimalibus, tantum ad 7. notas, uti tabulae vulgares construi folent, ficque negotium facile per logarithmos conficietur. Cum fit $x = 67^\circ, 30^{\text{r}}$, &

$$\begin{array}{rcl}
 \omega & = & 0,000290888; \text{ erit: } l\omega = 6,4637259 \quad \& \\
 l\sin x & = & 9,9656153; \quad l\cos x = 9,5828397 \\
 l\omega & = & 6,4637259; \quad l\omega = 6,4637259 \\
 \hline
 l\omega \sin x & = & 6,4293412; \quad l\omega \cos x = 6,0465656 \\
 l\frac{1}{2}\omega & = & 6,1626959; \quad l\frac{1}{2}\omega = 6,1626959 \\
 \hline
 l\frac{1}{2}\omega^2 \sin x & = & 2,5920371; \quad l\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 2,2092615
 \end{array}$$

ergo:

ergo:

$$\omega \sin x = 0,00026874 \quad ; \quad \omega \cos x = 0,00011232$$

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sin x = 0,00000004 \quad ; \quad \frac{1}{2} \omega^2 \cos x = 0,00000001$$

vnde fit:

$$\sin 67^\circ, 31' = 0,9239908 \quad ; \quad \cos 67^\circ, 31' = 0,3824147$$

$$\sin 67^\circ, 29' = 0,9237681 \quad ; \quad \cos 67^\circ, 29' = 0,3829522$$

vbi nequidem terminis $\frac{1}{2} \omega^2 \sin x$ & $\frac{1}{2} \omega^2 \cos x$ erat opus.

97. Ex seriebus quas supra inuenimus:

$$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega \cos x - \frac{1}{2} \omega^2 \sin x - \frac{1}{6} \omega^3 \cos x + \frac{1}{24} \omega^4 \sin x + \&c.$$

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \frac{1}{2} \omega^2 \cos x + \frac{1}{6} \omega^3 \sin x + \frac{1}{24} \omega^4 \cos x - \&c.$$

$$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x + \frac{1}{2} \omega^2 \sin x - \frac{1}{6} \omega^3 \cos x + \frac{1}{24} \omega^4 \sin x - \&c.$$

$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2} \omega^2 \cos x - \frac{1}{6} \omega^3 \sin x + \frac{1}{24} \omega^4 \cos x + \&c.$$

sequitur per combinationem fore:

$$\frac{\sin(x+\omega) + \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\sin x - \frac{1}{2} \omega^2 \sin x + \frac{1}{24} \omega^4 \sin x - \frac{1}{720} \omega^6 \sin x + \&c. = \sin x \cos \omega$$

$$\text{Et } \frac{\sin(x+\omega) - \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\omega \cos x - \frac{1}{6} \omega^3 \cos x + \frac{1}{120} \omega^5 \cos x - \&c. = \cos x \sin \omega$$

vnde prodeunt series pro sinibus & cosinibus iam supra inuentae:

$$\cos \omega = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{24} \omega^4 - \frac{1}{720} \omega^6 + \&c.$$

$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6} \omega^3 + \frac{1}{120} \omega^5 - \frac{1}{5040} \omega^7 + \&c.$$

quae eadem series ex primis ponendo $x=0$ consequuntur; cum enim fit $\cos x = 1$ & $\sin x = 0$ prima series $\sin \omega$, secunda vero $\cos \omega$ exhibebit.

98. Ponamus nunc quoque $y = \text{tang } x$, vt fit
 $x = \text{tang } (x + \omega)$, . . . erit ob

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x};$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{3 \sin x^2}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x};$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{3 \sin x}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x};$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{15}{\cos^5 x} - \frac{15}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x};$$

vnde sequitur fore :

$$\text{tang}(x + \omega) = \text{tg } x + \frac{\omega}{\cos^2 x} + \frac{\omega^2 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{\omega^3}{\cos^4 x} + \frac{\omega^4 \sin x}{\cos^5 x} \\
- \frac{2 \omega^3}{3 \cos^2 x} - \frac{\omega^4 \sin x}{3 \cos^3 x};$$

cuius formulae ope ex data cuiusvis anguli tangente inveniri possunt tangentes angulorum proximorum. Quia vero superior series est geometrica, ea in vnam summam collecta erit :

$$\text{tang}(x + \omega) = \text{tg } x + \frac{\omega + \omega^2 \text{tg } x}{\cos^2 x - \omega^2} - \frac{2 \omega^3}{3 \cos^2 x} - \frac{\omega^4 \sin x}{3 \cos^3 x} \&c.$$

$$\text{feu } \text{tang}(x + \omega) = \frac{\sin x \cos x + \omega}{\cos^2 x - \omega^2} - \frac{2 \omega^3}{3 \cos^2 x} - \frac{\omega^4 \sin x}{3 \cos^3 x} \&c.$$

quae formula in hunc finem commodius adhibetur.

99. Similes expressiones quoque pro logarithmis finuum, cosinuum & tangentium inveniri possunt. Sit enim $y = \text{logarithmo sinus anguli } x$, quod ita exprimamus

mus $y = l \sin x$, & $z = l \sin(x + \omega)$, ob $\frac{py}{dx} = \frac{n \cos x}{\sin x}$;

erit: $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-n}{\sin x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+n \cos x}{\sin x^3}$ &c. vnde fiet:

$$z = l \sin(x + \omega) = l \sin x + \frac{n \omega \cos x}{\sin x} - \frac{n \omega^2}{2 \sin x^2} + \frac{n \omega^3 \cos x}{3 \sin x^3} \&c.$$

vbi n denotat numerum, per quem logarithmi hyperbolici multiplicari debent, vt prodeant logarithmi propofiti. Sin autem fit

$$y = l \tan x \quad \& \quad z = l \tan(x + \omega)$$

fiet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin x \cos x} = \frac{2n}{\sin 2x}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2n \cos 2x}{(\sin 2x)^2};$$

ideoque

$$l \tan(x + \omega) = l \tan x + \frac{2n\omega}{\sin 2x} - \frac{2n\omega^2 \cos 2x}{(\sin 2x)^2} \&c.$$

quarum formularum ope logarithmi finuum & tangentium interpolari poffunt.

100. Ponamus denotare y arcum cuius finus logarithmus fit $= x$, feu vt fit $y = A . l \sin x$, & z effe arcum, cuius finus logarithmus fit $= x + \omega$, feu $z = A . l \sin(x + \omega)$; erit $x = l \sin y$, &

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n \cos y}{\sin y}, \quad \text{vnde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{n \cos y}; \quad \text{erit:}$$

ddy

$$y = e^x \sin nx; \text{ fitque } z = e^x + \omega \sin n(x + \omega)$$

quia est

$$\frac{dy}{dx} = e^x (\sin nx + n \cos nx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x ((1 - nn) \sin nx + 2n \cos nx)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x ((1 - 3nn) \sin nx + n(3 - nn) \cos nx)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x ((1 - 6nn + n^4) \sin nx + n(4 - 4nn) \cos nx)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x ((1 - 10nn + 5n^4) \sin nx + n(5 - 10nn + n^4) \cos nx)$$

His substitutis & diuisione per e^x instituta erit :

$$\begin{aligned} e^{\omega} \sin n(x + \omega) &= \sin nx + \omega \sin nx + \frac{(1 - nn)}{2} \omega^2 \sin nx \\ &\quad + n\omega \cos nx + \frac{2n\omega^2}{2} \cos nx \\ &\quad + \frac{(1 - 3nn)}{6} \omega^3 \sin nx + \frac{(1 - 6nn + n^4)}{24} \omega^4 \sin nx + \&c. \\ &\quad + \frac{n(3 - nn)}{6} \omega^3 \cos nx + \frac{n(4 - 4nn)}{24} \omega^4 \cos nx + \&c. \end{aligned}$$

102. Hinc plurima egregia corollaria deduci possunt; sufficiat autem nobis haec annotasse.

Si fuerit $x = 0$ erit :

$$\begin{aligned} e^{\omega} \sin n\omega &= n\omega \\ &\quad + \frac{2n\omega^2}{2} + \frac{n(3 - nn)}{6} \omega^3 + \frac{n(4 - 4nn)}{24} \omega^4 + \frac{n(5 - 10n^2 + n^4)}{120} \omega^5 + \&c. \end{aligned}$$

E e e

Si

Si fit $\omega = -x$, ob $\sin n(x + \omega) = 0$; erit:

$$\text{tang } nx =$$

$$nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-nn)}{6}x^3 - \frac{n(4-4nn)}{24}x^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5$$

$$1 - x + \frac{(1-nn)}{2}x^2 - \frac{(1-3nn)}{6}x^3 + \frac{(1-6nn+n^4)}{24}x^4 - \&c.$$

Generaliter vero si fit $n = 1$ habebitur:

$$e^{\omega} \sin(x + \omega) = \sin x (1 + \omega - \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{24}\omega^4 - \frac{1}{120}\omega^5 + \frac{1}{720}\omega^6 - \&c.)$$

$$+ \omega \cos x (1 + \omega + \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}\omega^3 - \frac{1}{24}\omega^4 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{720}\omega^6 + \&c.)$$

Sin autem sit $n = 0$, ob $\sin n(x + \omega) = n(x + \omega)$, & $\sin nx = nx$,
atque $\cos nx = 1$, si vbique per n diuidatur, prodibit:

$$e^{\omega} (x + \omega) = x + \omega x + \frac{1}{2}\omega^2 x + \frac{1}{6}\omega^3 x + \frac{1}{24}\omega^4 x + \&c.$$

$$+ \omega + \omega^2 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{6}\omega^4 + \frac{1}{24}\omega^5 + \&c.$$

cuius seriei ratio est manifesta.



CAPUT V.

INVESTIGATIO SUMMAE SERIERUM
EX TERMINO GENERALI.

103.

Sit Seriei cuiusque terminus generalis $= y$, respondens indici x , ita ut y sit functio quaecunque ipsius x . Sit porro Sy summa seu terminus summatorius seriei, exprimens aggregatum omnium terminorum a primo seu alio termino fixo vsque ad y inclusive. Computabimus autem summas serierum a termino primo, unde si sit $x = 1$, dabit y terminum primum, atque Sy hunc y terminum primum exhibebit: sin autem ponatur $x = 0$, terminus summatorius Sy in nihilum abire debet, propterea quod nulli termini summandi adsunt. Quocirca terminus summatorius Sy eiusmodi erit functio ipsius x , quae evanescat posito $x = 0$.

104. Si terminus generalis y ex pluribus partibus constet, ut sit $y = p + q + r + \&c.$ tum ipsa series considerari poterit tanquam conflata ex pluribus aliis seriebus, quarum termini generales sint $p, q, r, \&c.$ Hinc si singularum istarum serierum summae fuerint cognitae, simul seriei propositae summa poterit assignari; erit enim aggregatum ex summis singularum serierum. Hancobrem si sit $y = p + q + r + \&c.$ erit $Sy = Sp + Sq + Sr + \&c.$ Cum igitur supra exhi-

E e e 2

bue-

buerimus summas serierum, quarum termini generales sint quaecunque potestates ipsius x , habentes exponentes integros affirmatiuos; hinc cuiusque seriei, cuius terminus generalis est $ax^a + bx^b + cx^c + \&c.$ denotantibus $a, b, c, \&c.$ numeros integros affirmatiuos, seu cuius terminus generalis est functio rationalis integra ipsius x , terminus summatorius inueniri poterit.

105. Sit in serie, cuius terminus generalis seu exponenti x respondens est $= y$, terminus hunc praecedens seu exponenti $x-1$ respondens $= v$, quoniam v oritur ex y , si loco x scribatur $x-1$; erit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

Si igitur y fuerit terminus generalis huius seriei

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & . & . & x-1 & x \\ a & + & b & + & c & + & d & + & . & + & v & + & y \end{array}$$

huiusque seriei terminus indici 0 respondens fuerit $= A$, erit v , quatenus est functio ipsius x , terminus generalis huius seriei:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & . & . & . & x \\ A & + & a & + & b & + & c & + & d & + & . & + & v \end{array}$$

unde si Sv denotet summam huius seriei, erit $Sv = Sy - y + A$. Sicque posito $x = 0$, quia fit $Sy = 0$ & $y = A$, quoque Sv euanesceat.

106. Cum igitur sit $v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \&c.$ erit per ante ostensa:

$$Sv =$$

$$Sv = Sy - S \frac{dy}{dx} + S \frac{ddy}{2dx^2} - S \frac{d^3y}{6dx^3} + S \frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

atque ob $Sv = Sy - y + A$, erit :

$$y - A = S \frac{dy}{dx} - S \frac{ddy}{2dx^2} + S \frac{d^3y}{6dx^3} - S \frac{d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque habebitur :

$$S \frac{dy}{dx} = y - A + S \frac{ddy}{2dx^2} - S \frac{d^3y}{6dx^3} + S \frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. ex iis obtinebitur terminus summatorius seriei, cuius terminus generalis est $\frac{dy}{dx}$. Quantitas vero constans A ita debet esse comparata, ut facto $x = 0$ terminus summatorius $S \frac{dy}{dx}$ evanescat; hacque conditione facilius determinatur, quam si diceremus, eam esse terminum indicis 0 respondentem in serie, cuius terminus generalis sit $= y$.

107. Ex hoc fonte summae potestatum numerorum naturalium inuestigari solent. Sit enim $y = x^{n+1}$; quoniam fit $\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n$; $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1.2}x^{n-1}$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^{n-2}$; $\frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}x^{n-3}$ &c.

Ecc 3

erit

erit his valoribus substitutis :

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1.2} Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} Sx^{n-2} + \&c.$$

atque si vtrunque per $n+1$ diuidatur ; erit :

$$Sx^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{n}{2} Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.3} Sx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} Sx^{n-3} + \&c.$$

— Const.

quae constans ita accipi debet, vt posito $x=0$, totus terminus summatorius euanescat. Ope huius ergo formulae ex iam cognitis summis potestatum inferiorum, quarum termini generales sunt x^{n-1} , x^{n-2} , &c. inueniri poterit summa potestatum superiorum termino generali x^n expressarum.

108. Si in hac expressione n denotet numerum integrum affirmatiuum, numerus terminorum erit finitus. Atque adeo hinc summa infinitarum potestatum si $n=0$, absolute cognoscetur; erit enim : $S.x^0 = x$. Hacque cognita ad superiores progredi licebit, posito enim $n=1$; fiet :

$$S.x^1 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} Sx^0 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$$

si porro ponatur $n=2$ prodibit :

$$S.x^2 = \frac{1}{3} x^3 + Sx - \frac{1}{2} Sx^0 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x; \text{ deinde}$$

$$S.x^3 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} Sx^2 - Sx + \frac{1}{2} Sx^0 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2$$

$$S.x^4 = \frac{1}{5} x^5 + \frac{4}{3} Sx^3 - \frac{4}{2} Sx^2 + Sx - \frac{1}{2} Sx^0 \quad \text{siue}$$

$$S.x^4 = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x.$$

Sic.

Sicque porro quarumvis potestatum superiorum summae successivae ex inferioribus colligentur; hoc autem facilius per sequentes modos praestabitur.

109. Quoniam supra inuenimus esse:

$$S \frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{2} S \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6} S \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{1}{24} S \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{1}{120} S \frac{d^5 y}{dx^5} + \&c.$$

$$\text{Si ponamus } \frac{dy}{dx} = z; \text{ fiet } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}; \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}, \&c.$$

tum vero ob $dy = z dx$, erit y quantitas, cuius differentiale est $= z dx$, quod hoc modo indicamus, ut sit $y = \int z dx$. Quanquam autem haec inuentio ipsius y ex dato z a calculo integrali pendet, tamen hic iam ista forma $\int z dx$ vti poterimus, si quidem pro z alias ipsius x functiones non substituamus, nisi eiusmodi, ut functio illa, cuius differentiale est $= z dx$, ex praecedentibus exhiberi queat. His igitur valoribus substitutis erit:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2} S \frac{dz}{dx} - \frac{1}{6} S \frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{24} S \frac{d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

adiiciendo eiusmodi constantem, ut posito $x = 0$ ipsa summa Sz euanescat.

110. Substituendo autem loco y in superiori expressione litteram z , vel quod eodem redit differentiansdo istam aequationem erit:

$$S \frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2} S \frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{6} S \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{24} S \frac{d^4 z}{dx^4} - \&c.$$

fin

fin. autem loco y ponatur $\frac{dz}{dx}$; erit:

$$S \frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2} S \frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{6} S \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{1}{24} S \frac{d^5 z}{dx^5} - \&c.$$

Similique modo si pro y successive ponantur valores $\frac{ddz}{dx^2}$ & $\frac{d^3 z}{dx^3}$; &c. reperietur:

$$S \frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{2} S \frac{d^4 z}{dx^4} - \frac{1}{6} S \frac{d^5 z}{dx^5} + \frac{1}{24} S \frac{d^6 z}{dx^6} - \&c.$$

$$S \frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{2} S \frac{d^5 z}{dx^5} - \frac{1}{6} S \frac{d^6 z}{dx^6} + \frac{1}{24} S \frac{d^7 z}{dx^7} - \&c.$$

ficque porro in infinitum.

III. Si nunc isti valores pro $S \frac{dz}{dx}$; $S \frac{ddz}{dx^2}$; $S \frac{d^3 z}{dx^3}$; &c. successive substituantur in expressione:

$$Sz = fzdxdx + \frac{1}{2} S \frac{dz}{dx} - \frac{1}{6} S \frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{24} S \frac{d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

inuenietur expressio pro Sz ; quae constabit ex his terminis $fzdx$; z ; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3 z}{dx^3}$; &c. quorum coefficients facilius sequenti modo inuestigabuntur.

Ponatur

$$Sz = fzdxdx + az + \frac{\xi dz}{dx} + \frac{\gamma ddz}{dx^2} + \frac{\delta d^3 z}{dx^3} + \frac{\epsilon d^4 z}{dx^4} + \&c.$$

atque pro his terminis sui valores substituantur, quos obtinent ex praecedentibus seriebus, ex quibus est:

$fzdx$

$$\int z dx = Sz - \frac{1}{2}S \frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S \frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S \frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$az = +aS \frac{dz}{dx} - \frac{a}{2}S \frac{ddz}{dx^2} + \frac{a}{6}S \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{a}{24}S \frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\epsilon dz}{dx} = \epsilon S \frac{ddz}{dx^2} - \frac{\epsilon}{2}S \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\epsilon}{6}S \frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S \frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S \frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

qui valores additi, cum producere debeant Sz, coefficientes a , ϵ , γ , δ , &c. ex sequentibus aequationibus definientur :

$$a - \frac{1}{2} = 0$$

$$\epsilon - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\epsilon}{2} + \frac{a}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\epsilon}{6} - \frac{a}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\epsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\epsilon}{24} + \frac{a}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\epsilon}{120} - \frac{a}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

&c.

Fff

112.

112. Ex his ergo aequationibus successive valores omnium litterarum $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ definiri poterunt, reperiatur autem :

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\epsilon}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\epsilon}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

&c.

ficque ulterius progrediendo reperientur continuo termini alterni euanescentes. Litterae ergo ordine tertia, quinta, septima, &c. omnesque impares erunt $= 0$, excepta prima, quo ipso haec valorum series contra legem continuitatis impingere videtur. Quamobrem eo magis necesse est, ut rigide demonstretur, omnes terminos impares praeter primum necessario euanescere.

113. Quoniam singulae litterae secundum legem constantem ex praecedentibus determinantur, eae seriem recurrentem inter se constituent. Ad quam explicandam concipiatur ista series :

$$1 + \alpha u + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

cu-

cuius valor sit $=V$; atque manifestum est hanc seriem recurrentem oriri ex evolutione huius fractionis:

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \dots} \quad \&c.$$

atque si ista fractio alio modo in seriem infinitam secundum potestates ipsius u progredientem resolui queat, necesse est, ut semper eadem series:

$$V = 1 + au + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \dots \quad \&c.$$

resultet: hocque modo alia lex, qua isti iidem valores $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ determinantur, eruetur.

114. Quoniam, si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus unitati aequatur, erit:

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{120}u^5 + \dots \quad \&c.$$

$$\text{erit: } \frac{1 - e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \dots \quad \&c.$$

ideoque $V = \frac{u}{1 - e^{-u}}$. Nunc extinguatur ex serie secundus terminus $au = \frac{1}{2}$, ut sit:

$$V - \frac{1}{2}u = 1 + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \dots \quad \&c.$$

$$\text{erit: } V - \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}u(1 + e^{-u})}{1 - e^{-u}}. \quad \text{Multiplicentur nume-}$$

rator ac denominator per $e^{\frac{1}{2}u}$, eritque

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{u(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u})}{2(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u})},$$

& quantitatibus $e^{\frac{1}{2}u}$ & $e^{-\frac{1}{2}u}$ in series conuersis fiet:

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{u^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \&c.}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \&c.\right)}$$

siue

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{u^6}{2 \cdot 4 \dots 12} + \frac{u^8}{2 \cdot 4 \dots 16} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4 \cdot 6} + \frac{u^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{u^6}{4 \cdot 6 \dots 14} + \frac{u^8}{4 \cdot 6 \dots 18} + \&c.}$$

115. Cum igitur in hac fractione potestates impares prorsus desint, in eius quoque euolutione potestates impares omnino nullae ingredientur; quare cum $V - \frac{1}{2}u$ aequetur isti seriei:

$$1 + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

coefficientes imparium potestatum $\gamma, \varepsilon, \eta, \iota, \&c.$ omnes euanescent. Sicque ratio manifesta est, cur in serie:

$$1 + au + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \&c.$$

termini ordine pares omnes praeter secundum sint $= 0$, neque tamen lex continuitatis vim patiat. Erit ergo

$$V = 1 + \frac{1}{2}u + \epsilon u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + uu^{10} + \&c.$$

litterisque $\epsilon, \delta, \zeta, \theta, u, \&c.$ per euolutionem superioris fractionis determinatis, obtinebimus terminum summatorium Sz seriei, cuius terminus generalis est $= z$, indici x respondens, hoc modo expressum:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\epsilon dz}{dx} + \frac{\delta d^3 z}{dx^3} + \frac{\zeta d^5 z}{dx^5} + \frac{\theta d^7 z}{dx^7} + \&c.$$

116. Quia series $1 + \epsilon u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$ oritur ex evolutione huius fractionis:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c. \\ & 1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \&c. \end{aligned}$$

litterae ϵ , δ , ζ , θ , &c. hanc legem tenebunt, ut sit:

$$\epsilon = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\delta = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\epsilon}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\zeta = \frac{1}{2.4.6.12} - \frac{\delta}{4.6} - \frac{\epsilon}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6...14}$$

$$\theta = \frac{1}{2.4...16} - \frac{\zeta}{4.6} - \frac{\delta}{4.6.8.10} - \frac{\epsilon}{4.6...14} - \frac{1}{4.6...18}$$

Hi autem valores alternative fiunt affirmatiui & negatiui.

117. Si igitur harum litterarum alternae capiantur negatiue, ita ut sit:

$$Sx = \int x dx + \frac{1}{2}x - \frac{\epsilon dx}{dx} + \frac{\delta d^3x}{dx^3} - \frac{\zeta d^5x}{dx^5} + \frac{\theta d^7x}{dx^7} - \&c.$$

litterae ϵ , δ , ζ , θ , &c. definientur ex hac fractione:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \&c. \\ & 1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \&c. \end{aligned}$$

eam euoluendo in seriem :

$$1 + \epsilon u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$$

quocirca erit :

$$\epsilon = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4.6} - \frac{\epsilon}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6...14} - \frac{1}{2.4...12}$$

&c.

nunc autem omnes termini fient negatiui.

118. Ponamus ergo $\epsilon = -A$; $\delta = -B$; $\zeta = -C$; &c. vt fit :

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{A dz}{dx} - \frac{B d^3 z}{dx^3} + \frac{C d^5 z}{dx^5} - \frac{D d^7 z}{dx^7} + \&c.$$

atque ad litteras A, B, C, D, &c. definiendas consideretur haec series :

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \&c.$$

quae oritur ex evolutione huius fractionis :

$$\frac{1}{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \&c.}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...18} + \frac{u^8}{4.6...18} - \&c.}$$

vel consideretur ista series :

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c. = s$$

quae oritur ex evolutione huius fractionis :

$s =$

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6...14} + \&c.}$$

Cum autem sit :

$$\cos \frac{1}{2} u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.$$

$$\sin \frac{1}{2} u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4...14} + \&c.$$

$$\text{sequitur fore : } s = \frac{\cos \frac{1}{2} u}{2 \sin \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u.$$

Quare si cotangens arcus $\frac{1}{2} u$ in seriem conuertatur, cuius termini secundum potestates ipsius u procedant, ex ea cognoscentur valores litterarum A, B, C, D, E, &c.

119. Cum igitur sit $s = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u$; erit $\frac{1}{2} u = A \cot 2s$, & differentiando erit $\frac{1}{2} du = \frac{-2 ds}{1 + 4ss}$ seu $4ds + du + 4ss du = 0$, siue $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$.

Quia autem est : $s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - \&c.$

erit :

$$\frac{4ds}{du} = \frac{4}{uu} - 4A - 3.4 Bu^2 - 5.4 Cu^4 - 7.4 Du^6 - \&c.$$

$$1 =$$

$$4ss = \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \&c. \\ + 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \&c. \\ + 4BBu^6 + \&c.$$

per-

perductis his terminis homogeneis ad cyphram fiet:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

&c.

Ex quibus formulis iam manifesto liquet, singulos hos valores esse affirmatiuos.

120. Quoniam vero denominatores horum valorum fiunt vehementer magni, calculumque non mediocriter impediunt; loco litterarum A, B, C, D, &c.

has

has nouas introducamus:

$$A = \frac{\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{\epsilon}{1.2.3.4.5}$$

$$C = \frac{\gamma}{1.2.3 \dots 7}$$

$$D = \frac{\delta}{1.2.3 \dots 9}$$

$$E = \frac{\epsilon}{1.2.3 \dots 11} \quad \&c.$$

Atque reperietur fore:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon = \frac{2}{3} \alpha^2$$

$$\gamma = 2 \cdot \frac{3}{3} \alpha \epsilon$$

$$\delta = 2 \cdot \frac{4}{3} \alpha \gamma + \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 5} \epsilon^2$$

$$\epsilon = 2 \cdot \frac{5}{3} \alpha \delta + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \dots 5} \epsilon \gamma$$

$$\zeta = 2 \cdot \frac{12}{1.2.3} \alpha \epsilon + 2 \cdot \frac{12.11.10}{1 \dots 5} \epsilon \delta + \frac{12.11.10.9.8}{1 \dots 7} \gamma \gamma$$

$$\eta = 2 \cdot \frac{14}{1.2.3} \alpha \zeta + 2 \cdot \frac{14.13.12}{1 \dots 5} \epsilon \epsilon + 2 \cdot \frac{14.13.12.11.10}{1 \dots 7} \gamma \delta$$

&c.

G g g

121.

121. Commodius autem vtemur his formulis:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\epsilon$$

$$\delta = \frac{8}{3} \cdot \alpha\gamma + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\epsilon\epsilon}{2}$$

$$\epsilon = \frac{10}{3} \cdot \alpha\delta + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \epsilon\gamma$$

$$\zeta = \frac{12}{3} \cdot \alpha\epsilon + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \epsilon\delta + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3} \cdot \alpha\zeta + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \epsilon\epsilon + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \gamma\delta$$

$$\theta = \frac{16}{3} \alpha\eta + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \epsilon\zeta + \frac{16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 12}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 7} \cdot \gamma\epsilon + \frac{16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 10}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{\delta\delta}{2}$$

&c.

Ex hac igitur lege, secundum quam calculus non difficulter instituitur, si inuenti fuerint valores litterarum α , ϵ , γ , δ , &c. tum seriei cuiuscunque, cuius terminus generalis seu indici x conueniens fuerit $= z$, terminus summatorius ita exprimetur, vt fit:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\alpha dz}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx} - \frac{\epsilon d^3 z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^3} + \frac{\gamma d^5 z}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot dx^5} - \frac{\delta d^7 z}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot dx^7} + \frac{\epsilon d^9 z}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11 \cdot dx^9} - \frac{\zeta d^{11} z}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 13 \cdot dx^{11}} + \&c.$$

istae autem litterae α , ϵ , γ , δ , &c. sequentes valores habere inuentae sunt:

siue

$\alpha =$	$\frac{1}{2}$	$1.2 \alpha = 1$
$\epsilon =$	$\frac{1}{6}$	$1.2.3 \epsilon = 1$
$\gamma =$	$\frac{1}{6}$	$1.2.3.4 \gamma = 4$
$\delta =$	$\frac{3}{10}$	$1.2.3.4.5 \delta = 36$
$\varepsilon =$	$\frac{5}{6}$	$1.2.3 \dots 6 \varepsilon = 600$
$\zeta =$	$\frac{691}{210}$	$1.2.3 \dots 7 \zeta = 24.691$
$\eta =$	$\frac{35}{2}$	$1.2.3 \dots 8 \eta = 20160.35$
$\theta =$	$\frac{3617}{30}$	$1.2.3 \dots 9 \theta = 12096.3617$
$\iota =$	$\frac{43867}{42}$	$1.2.3 \dots 10 \iota = 86400.43867$
$\kappa =$	$\frac{1222277}{110}$	$1.2.3 \dots 11 \kappa = 362880.1222277$
$\lambda =$	$\frac{854513}{6}$	$1.2.3 \dots 12 \lambda = 79833600.854513$
$\mu =$	$\frac{1181820455}{546}$	$1.2.3 \dots 13 \mu = 11404800.1181820455$
$\nu =$	$\frac{76977927}{2}$	$1.2.3 \dots 14 \nu = 109109145600.76977927$
$\xi =$	$\frac{23749461029}{30}$	$1.2.3 \dots 15 \xi = 43589145600.23749461029$
$\pi =$	$\frac{3615841276005}{462}$	$1.2.3 \dots 16 \pi = 45287424000.8615841276005$

&c.

122.

122. Numeri isti per vniuersam serierum doctrinam amplissimum habent usum. Primum enim ex his numeris formari possunt ultimi termini in summis potestatum parium, quos non aequae ac reliquos terminos ex summis praecedentium reperiri posse supra annotauimus. In potestatibus enim paribus postremi summarum termini sunt x per certos numeros multiplicati; qui numeri pro potestatibus II; IV; VI; VIII; &c. sunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, &c. signis alternantibus affecti. Oriuntur autem hi numeri si valores litterarum a , ϵ , γ , δ , &c. supra inuenti respectiue diuidantur per numeros impares 3, 5, 7, &c. unde isti numeri, qui ab Inuentore *Iacobo Bernoullio* vocari solent *Bernoulliani* erunt:

$$\frac{a}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\epsilon}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\epsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$$\theta =$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{17} &= \frac{3617}{510} = \mathfrak{h} = 7.092156 \\
 \frac{\epsilon}{19} &= \frac{43867}{798} = \mathfrak{i} = 54.9 \\
 \frac{\kappa}{21} &= \frac{174611}{330} = \mathfrak{k} = \frac{283.617}{330} = 529.1242 \\
 \frac{\lambda}{23} &= \frac{854513}{138} = \mathfrak{l} = \frac{11.131.593}{2.3.23} = \\
 \frac{\mu}{25} &= \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{m} = \\
 \frac{\nu}{27} &= \frac{8553103}{2} = \mathfrak{n} = \frac{13.657931}{6} \\
 \frac{\xi}{29} &= \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{o} \\
 \frac{\pi}{31} &= \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{p}
 \end{aligned}$$

&c.

123. Isti igitur numeri Bernoulliani \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , &c. immediate ex sequentibus aequationibus inueniri poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{2}{7} \mathfrak{A} \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{2}{9} \mathfrak{A} \mathfrak{C} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{19} \mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10.9}{1.2} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{A} \mathfrak{D} + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$$

G g g 3

 $\mathfrak{F} =$

$$\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2} \cdot \frac{2}{13} \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{13} \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{13} \mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14.13}{1.2} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{2}{15} \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

&c.

quarum aequationum lex per se est manifesta, si tantum notetur, vbi quadratum cuiuspiam litterae occurrit, eius coefficientem duplo esse minorem, quam secundum regulam esse debere videatur. Reuera autem termini, qui continent producta ex disparibus litteris, bis occurrere censendi sunt, erit enim verbi gratia:

$$13 \mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2} \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \mathfrak{C}\mathfrak{C} +$$

$$\frac{12.11.10 \dots 5}{1.2.3 \dots 8} \mathfrak{D}\mathfrak{B} + \frac{12.11.10 \dots 11}{1.2.3 \dots 3} \mathfrak{C}\mathfrak{A}$$

124. Deinde vero etiam iidem numeri α , ϵ , γ , δ , &c. ingrediuntur in expressiones summarum serierum fractionum in hac forma generali:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \&c.$$

quoties n est numerus par affirmatiuus, contentarum. Has enim summas in Introductione per potestates femiperipheriae circuli π radio existente $= 1$ expressas dedimus, atque in harum potestatum coefficientibus isti ipsi numeri α , ϵ , γ , δ , &c. ingredi deprehenduntur. Quo item haec conuenientia non casu euenire, sed necessario locum habere intelligatur, has easdem summas fin-

gu-

gulari modo inuestigemus, quo lex summarum illarum
facilius patebit. Quoniam supra inuenimus esse:

$$\frac{\pi}{n} \cot. \frac{m}{n} \pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

binis terminis coniungendis habebimus:

$$\frac{\pi}{n} \cot. \frac{m}{n} \pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{n^2-m^2} + \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} + \frac{2m}{16n^2-m^2} - \&c.$$

vnde colligimus fore:

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn} \cot. \frac{m}{n} \pi$$

Statuamus nunc $n=1$, & pro m ponamus u ; vt fit:

$$\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} + \frac{1}{16-u^2} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u} \cot. \pi u.$$

Resoluantur singulae istae fractiones in series:

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \&c.$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \&c.$$

125. Quod si ergo ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = a$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = b$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = c$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = d$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = e$$

superior series transmutabitur in hanc :

$$a + bu^2 + cu^4 + du^6 + eu^8 + fu^{10} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u} \cot. \pi u.$$

Cum igitur in §. 118. litterae A, B, C, D, &c. ita comparatae sint inuentae, ut posito :

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

fit $s = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u$, erit posito πu loco $\frac{1}{2} u$ seu $2\pi u$ loco u

$$\frac{1}{2} \cot \pi u = \frac{1}{2\pi u} - A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - 2^7 D\pi^7 u^7 - \&c.$$

vnde per $\frac{\pi}{u}$ multiplicando erit :

$$\frac{\pi}{2u} \cot. \pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3 B\pi^4 u^2 - 2^5 C\pi^6 u^4 - \&c.$$

hincque sequitur fore :

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u} \cot. \pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + 2^7 D\pi^8 u^6 + \&c.$$

Quia igitur modo inuenimus esse :

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u} \cot. \pi u = a + bu^2 + cu^4 + du^6 + \&c.$$

neceffe est ut fit :

$$a =$$

$$\begin{aligned}
 a &= 2^1 A \pi^2 = \frac{2^1 a}{1.2.3} \cdot \pi^2 = \frac{2^1 \mathcal{A}}{1.2} \cdot \pi^2 \\
 b &= 2^3 B \pi^4 = \frac{2^3 \mathcal{B}}{1.2.3.4.5} \cdot \pi^4 = \frac{2^3 \mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4 \\
 c &= 2^5 C \pi^6 = \frac{2^5 \gamma}{1.2.3.4.5.6.7} \pi^6 = \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6} \pi^6 \\
 d &= 2^7 D \pi^8 = \frac{2^7 \delta}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \pi^8 = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1.2.3.4.5.6.7.8} \pi^8 \\
 e &= 2^9 E \pi^{10} = \frac{2^9 \epsilon}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} \pi^{10} = \frac{2^9 \mathfrak{E}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} \pi^{10} \\
 f &= 2^{11} F \pi^{12} = \frac{2^{11} \zeta}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13} \pi^{12} = \frac{2^{11} \mathfrak{F}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} \pi^{12} \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

126. Ex hoc ergo tam facili ratiocinio non solum omnes series potestatum reciprocarum, quas §. praeced. exhibuimus, expedite summantur; sed simul quoque perspicitur, quemadmodum istae summae ex cognitis valoribus litterarum $a, \mathcal{B}, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. vel etiam ex numeris Bernoullianis $\mathcal{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. formentur. Quare cum istorum numerorum quindecim §. 122. definiuerimus, ex iis summae omnium potestatum parium vsque ad summam huius seriei inclusiue assignari poterunt:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{1^{30}} + \&c. \text{ erit enim huius} \\
 \text{seriei summa} &= \frac{2^{29} \pi}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15} \pi^{30} = \frac{2^{29} \mathfrak{P}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15} \pi^{30}.
 \end{aligned}$$

H h h

At-

Atque si quis voluerit has summas ulterius determinare, id continuandis numeris α , ξ , γ , &c. vel his \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , &c. facillime praestabitur.

127. Origo ergo horum numerorum α , ξ , γ , δ , &c. vel inde formatorum \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , &c. potissimum debetur evolutioni cotangentis cuiusvis anguli in seriem infinitam. Cum enim sit

$$\frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

erit :

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \&c. = 1 - \frac{u}{2} \cot. \frac{1}{2} u,$$

si igitur loco coefficientium A , B , C , D , &c. valores ipsorum substituantur, reperietur :

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\xi u^4}{1.2...5} + \frac{\gamma u^6}{1.2...7} + \frac{\delta u^8}{1.2...9} + \&c. = 1 - \frac{u}{2} \cot. \frac{1}{2} u$$

atque numeros Bernoullianos adhibendo erit :

$$\frac{\mathcal{A} u^2}{1.2} + \frac{\mathcal{B} u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathcal{C} u^6}{1.2...6} + \frac{\mathcal{D} u^8}{1.2...8} + \&c. = 1 - \frac{u}{2} \cot. \frac{1}{2} u$$

ex quibus seriebus per differentiationem innumerabiles aliae deduci possunt, sicque infinitae series summari, in quas isti numeri notatu tantopere digni ingrediuntur.

128. Sumamus aequationem priorem, quam per u multiplicemus, ut sit :

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\xi u^5}{1.2...5} + \frac{\gamma u^7}{1.2...7} + \frac{\delta u^9}{1.2...9} + \&c. = u - \frac{uu}{2} \cot. \frac{1}{2} u$$

quae

quae differentiata ac per du diuisa dat :

$$\frac{au^2}{1.2} + \frac{6u^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma u^6}{1.2...6} + \frac{\delta u^8}{1.2...8} + \&c. = 1 - \pi \cot \frac{1}{2}u + \frac{uu}{4(\sin \frac{1}{2}u)^2}$$

&, si denuo differentietur erit :

$$\frac{au}{1} + \frac{6u^3}{1.2.3} + \frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5} + \&c. = -\cot \frac{1}{2}u + \frac{u}{(\sin \frac{1}{2}u)^2} - \frac{uu \cot \frac{1}{2}u}{4(\sin \frac{1}{2}u)^3}$$

Sin autem altera aequatio differentietur erit :

$$\frac{Au}{1} + \frac{Bu^3}{1.2.3} + \frac{Cu^5}{1.2...5} + \frac{Du^7}{1.2...7} = -\frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}u + \frac{u}{4(\sin \frac{1}{2}u)^2}$$

Ex his ergo si ponatur $u = \pi$, ob $\cot \frac{1}{2}\pi = 0$, & $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, sequuntur istae summationes :

$$1 = \frac{a\pi^2}{1.2.3} + \frac{6\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3...7} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3...9} + \&c.$$

$$1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{a\pi^2}{1.2} + \frac{6\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3...6} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3...8} + \&c.$$

$$\pi = \frac{a\pi}{1} + \frac{6\pi^3}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^7}{1.2.3...7} + \&c.$$

$$\text{seu } 1 = a + \frac{6\pi^2}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^6}{1.2.3...7} + \&c.$$

a qua si prima subtrahatur remanebit :

$$a = \frac{(a-6)\pi^2}{1.2.3} + \frac{(6-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3...7} + \&c.$$

Tum vero erit :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{A\pi^2}{1.2} + \frac{B\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{C\pi^6}{1.2.3...6} + \frac{D\pi^8}{1.2.3....8} + \&c. \\
 \frac{\pi}{4} &= \frac{A\pi}{1} + \frac{B\pi^3}{1.2.3} + \frac{C\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{D\pi^7}{1.2.3....7} + \&c. \\
 \text{feu } \frac{1}{4} &= \frac{A}{1} + \frac{B\pi^2}{1.2.3} + \frac{C\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{D\pi^6}{1.2.3....7} + \&c.
 \end{aligned}$$

129. Ex tabula valorum numerorum $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ quam supra §. 121. exhibuimus, patet eos primum de-
 crescere tum vero iterum crescere, & quidem in infi-
 nitum. Operae igitur pretium erit inuestigare, in qua-
 nam ratione hi numeri, postquam iam vehementer lon-
 ge fuerint continuati, ulterius progredi pergant. Sit igi-
 tur ϕ numerus quicunque huius seriei numerorum $a, \epsilon,$
 $\gamma, \delta, \&c.$ longissime ab initio remotus, & sit ψ nume-
 rorum sequens. Quoniam per hos numeros summae
 potestatum reciprocarum definiuntur, sit $2n$ exponens po-
 testatis, in cuius summa numerus ϕ ingreditur, erit
 $2n+2$ exponens potestatis numero ψ respondens, at-
 que numerus n iam erit vehementer magnus. Hinc ex
 §. 125. habebitur :

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \&c. &= \frac{2^{2n-1} \phi}{1.2.3...(2n+1)} \pi^{2n} \\
 1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \&c. &= \frac{2^{2n+1} \psi}{1.2.3...(2n+3)} \pi^{2n+2}
 \end{aligned}$$

Quod

Quod si ergo haec per istam diuidatur, erit :

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \&c.}{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \&c.} = \frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)} \frac{\pi^2}{\phi}$$

Quia vero n est numerus vehementer magnus, ob feriem vtramque proxime $= 1$, erit :

$$\frac{\psi}{\phi} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2} = \frac{n}{\pi}$$

Cum igitur n designet, quotus sit numerus ϕ a primo a computatus, se habebit hic numerus ϕ ad suum sequentem ψ vt π^2 ad n^2 , quae ratio, si n fuerit numerus infinitus, veritati penitus fit consentanea. Quoniam est fere $\pi\pi = 10$, si ponatur $n = 100$; erit terminus centesimus circiter millies minor suo sequente. Constituunt ergo numeri $a, b, c, d, \&c.$ pariter ac Bernoulliani $A, B, C, D, \&c.$ seriem maxime diuergentem, quae etiam magis increfcat, quam vlla series geometrica terminis crescentibus procedens.

130. Inuentis ergo his valoribus numerorum $a, b, c, d, \&c.$ seu $A, B, C, D, \&c.$ si proponatur series, cuius terminus generalis x fuerit functio quaecunque ipsius indicis x , terminus summatorius Sx huius seriei sequenti modo exprimetur, vt fit :

$$H h h 3$$

$$S x =$$

$$\begin{aligned}
Sx = & fxdx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \cdot \frac{dx}{1 \cdot 2 dx} + \frac{1}{30} \cdot \frac{d^3x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} \\
& + \frac{1}{42} \cdot \frac{d^5x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5} + \frac{1}{30} \cdot \frac{d^7x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 dx^7} \\
& + \frac{5}{66} \cdot \frac{d^9x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 dx^9} + \frac{691}{2730} \cdot \frac{d^{11}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 dx^{11}} \\
& + \frac{7}{6} \cdot \frac{d^{13}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 dx^{13}} + \frac{3617}{510} \cdot \frac{d^{15}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 dx^{15}} \\
& + \frac{43867}{798} \cdot \frac{d^{17}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 dx^{17}} + \frac{174611}{330} \cdot \frac{d^{19}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 dx^{19}} \\
& + \frac{854513}{138} \cdot \frac{d^{21}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 dx^{21}} + \frac{236364091}{2730} \cdot \frac{d^{23}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 dx^{23}} \\
& + \frac{8553103}{6} \cdot \frac{d^{25}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 dx^{25}} + \frac{23749461029}{870} \cdot \frac{d^{27}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 dx^{27}} \\
& + \frac{8615841276005}{14322} \cdot \frac{d^{29}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 dx^{29}} + \&c.
\end{aligned}$$

Si igitur innotuerit integrale $\int x dx$, seu quantitas illa cuius differentiale fit $= x dx$, terminus summatorius ope continuæ differentiationis inuenietur. Perpetuo autem notandum est ad hanc expressionem semper eiusmodi constantem addi oportere, vt summa fiat $= 0$, si index x ponatur in nihilum abire.

131. Si igitur x fuerit functio rationalis integra ipsius x , quia eius differentialia tandem euanescent, terminus summatorius per expressionem finitam exprimitur; id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EX-

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & x \\ 1 & + & 9 & + & 25 & + & 49 & + & 81 & + & \dots & + & (2x-1)^2 \end{array}$$

Quia hic est $z = (2x-1)^2 = 4xx - 4x + 1$;

$$\text{erit } \int z dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x,$$

ex huius enim differentiatione oritur :

$$4xx dx - 4x dx + dx = z dx.$$

Deinde vero per differentiationem erit :

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0 \quad \&c.$$

Hinc erit terminus summatorius quaesitus : $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

qua constante tolli debent termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$; vnde erit :

$$S(2x-1)^2 = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1).$$

Sic erit posito $x = 4$ summa 4 primorum terminorum

$$1 + 9 + 25 + 49 = \frac{4}{3} \cdot 7 \cdot 9 = 84.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & & & & x \\ 1 & + & 27 & + & 125 & + & 343 & + & \dots & + & (2x-1)^3 \end{array}$$

Quia

Quia est $z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; erit:

$$\int z dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x; \quad \frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = 48; \quad \text{sequentia evanescent.}$$

$$\begin{aligned} \text{Quare erit } S(2x-1)^3 &= 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x \\ &\quad + 4x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{1}{2} \\ &\quad + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

hoc est $S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1)$. Sic erit
posito $x = 4$ $1 + 27 + 125 + 343 = 16.31 = 496$.

132. Ex hac inuenta generali expreffione pro termino fummatório sponte fequitur ille terminus fummatorius, quem superiori parte pro potestatibus numerorum naturalium dedimus, cuiusque demonstrationem ibi tradere non licuerat. Quod si enim ponamus $z = x^n$, erit vtique

$$\int z dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}; \quad \text{differentialia vero ita fe habebunt:}$$

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \dots (n-6)x^{n-7} \quad \&c.$$

Ex

Ex his ergo deducetur sequens terminus summatorius
respondens termino generali x^n ; scilicet

$$\begin{aligned}
 Sx^n &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{2} x^{n-1} \\
 &- \frac{1}{30} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-3} \\
 &+ \frac{1}{42} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{n-5} \\
 &- \frac{1}{30} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8} x^{n-7} \\
 &+ \frac{5}{66} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-8)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10} x^{n-9} \\
 &- \frac{691}{2730} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-10)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 12} x^{n-11} \\
 &+ \frac{7}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-12)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 14} x^{n-13} \\
 &- \frac{3617}{510} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-14)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16} x^{n-15} \\
 &+ \frac{43867}{798} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-16)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 18} x^{n-17} \\
 &- \frac{174611}{330} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-18)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20} x^{n-19} \\
 &+ \frac{854513}{138} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-20)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 22} x^{n-21} \\
 &- \frac{236364091}{2730} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-22)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 24} x^{n-23} \\
 &+ \frac{8553103}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-24)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 26} x^{n-25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 23749461029 \cdot \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-26)}{870 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 28} x^{n-27} \\
 + \frac{8615841276005 \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-28)}{14322 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30} x^{n-29} \&c.
 \end{array}$$

quae expressio non differt ab ea, quam supra dedimus, nisi quod hic numeros Bernoullianos \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , &c. introduximus, cum supra vti essemus numeris α , \mathfrak{E} , γ , δ , &c. interim tamen consensus sponte elucet. Hinc ergo terminos summatorios omnium potestatum vsque ad potestatem trigesimam inclusivae exhibere licuit; quae investigatio, si alia via fuisset suscepta, sine longissimis & taediosissimis calculis absolui non potuisset.

133. Iam supra §. 59. similem fere expressionem pro termino summatorio dedimus ex termino generali definiendo. Ea enim pariter secundum differentialia termini generalis procedebat; ab ista autem in hoc potissimum erat diversa, quod illa non integrale $\int z dx$ requirebat, singula vero termini generalis differentialia per certas ipsius x functiones habebat multiplicata. Eandem igitur expressionem sequenti modo ad naturam serierum magis accommodato denuo eliciamus, ex quo simul lex clarius patebit, secundum quam coefficientes illi differentialium progrediuntur. Sit igitur seriei terminus generalis z , functio quaecunque ipsius indicis x , terminus vero summatorius quaesitus sit s : qui quoniam vti vidimus eiusmodi erit functio ipsius x , ut evanescat posito $x = 0$, erit per ea, quae supra de natura huiusmodi functionum demonstrauiamus:

$$s - \frac{x ds}{1 dx} + \frac{x^2 dds}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3 s}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 s}{1.2.3.4 dx^4} - \&c. = 0.$$

134. Quia s denotat summam omnium terminorum seriei a primo vsque ad vltimum z , perspicuum est si in s loco x ponatur $x-1$, tum priorem summam vltimo termino z mulctari: erit scilicet

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2 dx^2} - \frac{d^3 s}{6 dx^3} + \frac{d^4 s}{24 dx^4} - \&c.$$

$$\text{ideoque } z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2 dx^2} + \frac{d^3 s}{6 dx^3} - \frac{d^4 s}{24 dx^4} + \&c.$$

quae aequatio modum suppeditat ex dato termino summatorio s definiendi terminum generalem, quod quidem per se est facillimum. Ex idonea autem combinatione huius aequationis cum ea, quam §. praeced. inuenimus, valor ipsius s per x & z determinari poterit. Ponamus in hunc finem esse:

$$s - A z + \frac{B dz}{dx} - \frac{C dds}{dx^2} + \frac{D d^3 z}{dx^3} - \frac{E d^4 z}{dx^4} + \&c. = 0$$

vbi $A, B, C, D, \&c.$ denotent coefficientes necessarios siue constantes siue variables: nam cum fit

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2 dx^2} + \frac{d^3 s}{6 dx^3} - \frac{d^4 s}{24 dx^4} + \frac{d^5 s}{120 dx^5} - \&c.$$

si hinc valores pro $z, \frac{dz}{dx}, \frac{ddz}{dx^2}, \frac{d^3 z}{dx^3}, \&c.$ in superiori aequatione substituantur, prodibit:

$$\begin{aligned}
 s &= s \\
 -Az &= -\frac{Ads}{dx} + \frac{Adds}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \&c. \\
 +\frac{Bdz}{dx} &= +\frac{Bdds}{dx^2} - \frac{Bd^3s}{2dx^3} + \frac{Bd^4s}{6dx^4} - \frac{Bd^5s}{24dx^5} + \&c. \\
 -\frac{Cddz}{dx^2} &= -\frac{Cd^3s}{dx^3} + \frac{Cd^4s}{4dx^4} - \frac{Cd^5s}{6dx^5} + \&c. \\
 +\frac{Dd^3z}{dx^3} &= +\frac{Dd^4s}{dx^4} - \frac{Dd^5s}{2dx^5} + \&c. \\
 -\frac{Ed^4z}{dx^4} &= -\frac{Ed^5s}{dx^5} + \&c.
 \end{aligned}$$

&c.

quae igitur series iunctim sumtae aequales erunt nihilo.

135. Cum ergo ante inuenimus esse :

$$0 = s - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2dds}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \frac{x^5d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

si superior aequatio huic aequalis statuatur, prodibunt sequentes litterarum A, B, C, D, &c. denominationes:

$$\begin{aligned}
 A &= x \\
 B &= \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2} \\
 C &= \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6} \\
 D &= \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24} \\
 E &= \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \quad \&c.
 \end{aligned}$$

His

His igitur litterarum A, B, C, D, &c. valoribus inuentis, ex termino generali & terminus summatorius Sz ita determinabitur, vt fit:

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \&c.$$

136. Cum autem fiat:

$$A = x$$

$$B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$C = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$D = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}xx \quad \&c.$$

patet hos coefficients esse eosdem, quos supra §. 59. habuimus, vnde ista termini summatorii expressio eadem est, quam ibi inuenimus; eritque propterea:

$$A = Sx^0 = S1$$

$$B = \frac{1}{2}Sx^1 - \frac{1}{2}x$$

$$C = \frac{1}{6}Sx^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$D = \frac{1}{24}Sx^3 - \frac{1}{12}x^3$$

$$E = \frac{1}{24}Sx^4 - \frac{1}{24}x^4 \quad \&c.$$

Hinc ergo erit:

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \&c.$$

$$+ \frac{x dz}{dx} - \frac{x^2 ddz}{2dx^2} + \frac{x^3 d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4 d^4z}{24dx^4} + \&c.$$

Quodsi autem in termino generali & ponatur $x=0$, prodibit terminus indici $=0$ respondens; qui si ponatur $=a$,

erit: $a = z - \frac{x dz}{dx} + \frac{x^2 ddz}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3z}{6dx^3} + \&c.$ ideoque

$$\frac{x dz}{dx} - \frac{x^2 ddz}{2dx^2} + \frac{x^3 d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4 d^4z}{24dx^4} + \&c. = z - a,$$

quo valore substituto habebitur:

$$Sz = (x+1)z - a - \frac{dz}{dx} Sx + \frac{ddz}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3} Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \&c.$$

Cognitis ergo summis potestatum, hinc pro quouis termino generali ei conueniens terminus summatorius exhiberi potest.

137. Quoniam ergo geminam inuenimus expressionem termini summatorii Sz pro termino generali z , earumque altera formulam integralem $\int z dx$ continet, si istae duae expressiones sibi aequales ponantur, obtinebitur valor ipsius $\int z dx$ per seriem expressus. Cum enim sit:

$$\int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{A dz}{1.2 dx} - \frac{B d^3z}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{C d^5z}{1.2...6 dx^5} - \&c.$$

$$= (x+1)z - a - \frac{dz}{1 dx} Sx + \frac{ddz}{1.2 dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{1.2.3 dx^3} Sx^3 + \&c.$$

erit:

$$\int z dx = (x + \frac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx} (Sx + \frac{1}{2}A) + \frac{ddz}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3} (Sx^3 - \frac{1}{4}B)$$

$$+ \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \frac{d^5z}{120dx^5} (Sx^5 + \frac{1}{8}C) + \frac{d^6z}{720dx^6} Sx^6$$

$$- \frac{d^7z}{5040dx^7} (Sx^7 - \frac{1}{8}D) + \&c.$$

vbi $A, B, C, D, \&c.$ denotant numeros Bernoullianos supra §. 122. exhibitos.

Sit

Sit v.gr. $z = xx$, fiet $dz = 0$; $\frac{dz}{dx} = 2x$; & $\frac{ddz}{2dx^2} = 1$, hinc erit:

$\int xxx dx = (x + \frac{1}{2})xx - 2x(\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + 1(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x)$
 feu $\int xxx dx = \frac{1}{3}x^3$; dat autem $\frac{1}{3}x^3$ differentiatum vtique
 $xxx dx$.

138. Noua ergo hinc patet via ad terminos summatorios serierum potestatum inueniendos; quoniam enim ex coefficientibus ante assumtis A, B, C, D, &c. hi termini summatorii facillime formantur, horum autem coefficientium quilibet ex praecedentibus confatur; si in formulis §. 135. datis loco istarum litterarum valores in §. 136. traditi substituantur, erit:

$$Sx^1 - x = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$$

$$Sx^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(Sx - x)$$

$$Sx^3 - x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3}(Sx^1 - x^1)$$

$$Sx^4 - x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}(Sx - x)$$

&c.

Hinc ergo summae potestatum superiorum ex summis inferiorum formari poterunt.

139. Quod si verò legem, qua coefficientes A, B, C, D, &c. supra §. 135. progredi inuenti sunt, attentius intueamur, eos seriem recurrentem constituere deprehendemus. Si enim euoluamus hanc fractionem:

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \&c.}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \&c.}$$

secundum potestates ipsius u , hancque seriem resultare sumamus:

A +

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \&c.$$

erit vti ante inuenimus $A = x$; $B = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}A$; &c. sicque inuenta hac ferie, obtinebuntur termini summatorii ferierum potestatum. Illa autem fractio, ex cuius euolutione ista series nascitur, transit in hanc formam: $\frac{e^{xu} - 1}{e^u - 1}$, quae si x fuerit numerus integer affirmatiuus, abit in $1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \dots + e^{(x-1)u}$; cum ergo sit:

$$1 = 1$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.1.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2 u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3 u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4 u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ideoque erit:

$$A = x$$

$$B = S(x-1) = Sx - x$$

$$C = \frac{1}{2}S(x-1)^2 = \frac{1}{2}Sx^2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$D = \frac{1}{6}S(x-1)^3 = \frac{1}{6}Sx^3 - \frac{1}{2}x^3 \quad \&c.$$

Vnde nexus horum coefficientium cum summis potestatum, ante iam obseruatus, penitus confirmatur ac demonstratur.

CAPUT VI.

DE SUMMATIONE PROGRESSIONUM
PER SERIES INFINITAS.

140.

Expressio generalis, quam in Capite praecedente pro termino summatorio cuiusque seriei, cuius terminus generalis seu indexi x respondens est $= z$, invenimus:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{Adz}{1.2 dx} + \frac{Bd^2z}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{Cd^3z}{1.2...6 dx^5} - \&c.$$

proprie inferuit seriebus summandis, quarum termini generales sunt functiones quaecunque rationales integrae indicis x , quoniam his casibus ad differentialia tandem evanescencia pervenitur. Sin autem z non fuerit eiusmodi functio ipsius x , tum eius differentialia in infinitum progrediuntur, sicque resultat series infinita summam seriei propositae exprimens, & quidem ad datum usque terminum, cuius index est $= x$. Quocirca progressionis propositae in infinitum continuatae summa prodibit, si ponatur $x = \infty$; hocque pacto alia invenitur series infinita priori aequalis.

141. Sin autem ponatur $x = 0$, tum expressio summam exhibens debet evanescere, vti iam annotauimus; quod nisi fiat, eiusmodi quantitas constans ad summam addi vel inde auferri debet, vt huic conditioni satisfiat.

K k k

Quo

Quo facto si ponatur $x = 1$, summa inuenta praebebit terminum primum seriei: sin $x = 2$, aggregatum primi & secundi; sin $x = 3$, orietur aggregatum trium terminorum initialium seriei; & ita porro. His igitur casibus, quia summa vnus, vel duorum, vel trium, &c. terminorum est cognita, seriei infinitae, qua ista summa exprimitur, valor innotescet; ex hocque fonte innumera- biles series summari poterunt.

142. Quoniam, si eiusmodi constans summae fue- rit adiecta, vt ea euanescat posito $x = 0$, tum summa omnibus reliquis casibus, quicunque numeri pro x sub- stituantur, satisfacit; manifestum est, dummodo summae inuentae eiusmodi quantitas constans adiiciatur, vt vno quodam casu vera summa indicetur, tum omnibus reli- quis casibus veram summam prodire debere. Quare si ponendo $x = 0$, non pateat, cuiusmodi valorem expres- sio summae recipiat, neque igitur constans adiicienda hinc inueniri queat; tum alius quicunque numerus pro x statui poterit, adiiciendaque constante effici vt debita summa indicetur: quod quomodo fieri debeat, ex sequen- tibus magis fiet perspicuum.

142. Consideremus primum hanc progressionem harmonicam:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} = s,$$

cuius terminus generalis cum sit $= \frac{1}{x}$, fiet $s = \frac{1}{x}$, &
ter-

terminus summatorius s ita inuenietur. Primo erit

$$\int x dx = \int \frac{dx}{x} = lx; \text{ deinde differentialia ita se habebunt:}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{ddz}{2dx^2} = \frac{1}{x^3}; \quad \frac{d^3z}{6dx^3} = -\frac{1}{x^4};$$

$$\frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{1}{x^5}; \quad \frac{d^5z}{120dx^5} = -\frac{1}{x^6} \text{ \&c. Hinc itaque erit:}$$

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \text{\&c.}$$

+ Constante.

Constans igitur hic addenda ex casu $x = 0$ non potest definiri. Ponatur ergo $x = 1$; quia tunc fit $s = 1$, erit

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \frac{D}{8} + \text{Const. unde fit}$$

$$\text{ista constans} = \frac{1}{2} + \frac{A}{2} - \frac{B}{4} + \frac{C}{6} - \frac{D}{8} + \text{\&c. erit-}$$

que ideo terminus summatorius quaesitus:

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \text{\&c.}$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{A}{2} - \frac{B}{4} + \frac{C}{6} - \frac{D}{8} + \text{\&c.}$$

143. Quoniam numeri Bernoulliani $A, B, C, D, \text{\&c.}$ constituunt seriem diuergentem, hic valor constantis cognosci nequit. Sin autem loco x substituatur numerus maior, atque summa totidem terminorum actu quaeratur, valor constantis commode inuestigabitur. Ponatur

in hunc finem $x = 10$, decemque primis terminis colligendis reperietur eorum summa $\quad \quad \quad$

$$2,928968253968253968$$

cui aequalis esse debet expressio summae, si in ea ponatur $x = 10$, quae fit:

$$110 + \frac{1}{20} + \frac{1}{200} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{600000} + \frac{1}{80000000} + \&c. \\ + C.$$

sumto ergo pro 110 logarithmo hyperbolico denarii & loco 1, 2, 3, &c. substitutis valoribus supra inuentis, reperietur constans illa:

$$C = 0,5772156649015325$$

qui numerus ergo exprimit summam seriei:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \&c.$$

144. Si pro x numeri non nimis magni substituantur, quia summa seriei facile actu inuenitur, obtinebitur summa seriei huius:

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{6x^6} + \frac{1}{8x^8} - \&c. = s - lx - C.$$

Sin autem x significet numerum valde magnum, quia tunc valor huius expressionis in infinitum excurrentis facile in fractionibus decimalibus assignatur, vicissim summa seriei definitur. Ac primo quidem constat, si series in infinitum continuetur, eius summam futuram esse infinite magnam, facto enim $x = \infty$ fit $1/x$ quoque infinitum.

nitus; et si ∞ ad x rationem infinite parvam teneat. Quo autem commodius summa quotcunque terminorum seriei assignari queat, valores litterarum A, B, C, &c. in fractionibus decimalibus exprimamus:

A	=	0, 166666666666	
B	=	0, 033333333333	
C	=	0, 0238095238095	
D	=	0, 033333333333	
E	=	0, 0757575757575	
F	=	0, 2531135531135	
G	=	1, 166666666666	
H	=	7, 0921568627451	&c.

unde ergo erit:

$\frac{A}{2}$	=	0, 083333333333	
$\frac{B}{4}$	=	0, 008333333333	
$\frac{C}{6}$	=	0, 0039682539682	
$\frac{D}{8}$	=	0, 004166666666	
$\frac{E}{10}$	=	0, 0075757575757	
$\frac{F}{12}$	=	0, 0210927960928	
$\frac{G}{14}$	=	0, 083333333333	
$\frac{H}{16}$	=	0, 4432598039216	&c.

EXEMPLUM I.

Inuenire summam mille terminorum seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$$

Ponatur ergo $x = 1000$, & cum sit

$l10$	$=$	2,3025850929940456840	erit
lx	$=$	6,9077552789821	
Const.	$=$	0,5772156649015	
$\frac{1}{2x}$	$=$	0,0005000000000	
		7,4842709438836	
subt. $\frac{A}{2xx}$	$=$	0,0000000833333	
		7,4849708605503	
add. $\frac{B}{4x^4}$	$=$	0,0000000000000	

Ergo 7,4849708605503 est summa quaefita mille terminorum, qui nequidem septem vnitates cum femisse conficiunt.

EXEMPLUM II.

Inuenire summam millies mille terminorum seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$

Quia est $x = 1000000$, erit $lx = 6.110$, ergo

lx	$=$	13,8155105579642
Const.	$=$	0,5772156649015
$\frac{1}{2x}$	$=$	0,0000005000000
		14,3927262228657 = summae quaesitae.

145. Si ergo pro x statuatur numerus vehementer magnus, summa satis exacte inuenitur ex solo primo termino lx constante C aucto: vnde egregia corollaria deduci possunt. Sic si x fuerit numerus vehementer magnus, ponaturque:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} = s$$

$$\& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x+y} = t$$

quia est proxime $s = lx + C$, & $t = l(x+y) + C$; erit $t - s = l(x+y) - lx = l\frac{x+y}{x}$, ideoque hic logarithmus proxime per seriem harmonicam finito terminorum numero constantem exprimeretur hoc modo:

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+y}$$

Accuratius autem hic logarithmus exhibebitur, si superiores summae s & t exactius capiantur. Sic cum sit

$$s = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12xx}, \quad \&$$

$$t = l(x+y) + C + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12(x+y)^2}; \quad \text{erit}$$

$$t - s = l\frac{x+y}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{12xx} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$

ideoque

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12xx} + \frac{1}{12(x+y)^2}$$

Sin

Sin autem sit numerus tam magnus, ut bini termini ultimi reiici queant, erit proxime:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right).$$

145. Ex hac quoque serie harmonica deriuare poterimus summam huius seriei, in qua tantum numeri impares occurrunt:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2x+1}.$$

Cum enim omnibus terminis capiendis sit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1} =$$

$$A(2x+1) + C + \frac{A}{2(2x+1)} - \frac{B}{2(2x+1)^2} + \frac{C}{4(2x+1)^4} - \frac{D}{6(2x+1)^6} + \&c.$$

terminorum vero ordine parium:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2x}$$

summa sit semissis superioris nempe:

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{4x} - \frac{A}{4x^2} + \frac{B}{8x^4} - \frac{C}{12x^6} + \frac{D}{16x^8} - \&c.$$

erit hac serie ab illa ablata:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x+1} =$$

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x} + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{A}{2(2x+1)^2} + \frac{B}{4(2x+1)^4} - \&c.$$

$$- \frac{1}{4x} + \frac{A}{4x^2} - \frac{B}{8x^4} + \&c.$$

146. Potest vero etiam per eandem expressionem
generalem summa cuiusque seriei harmonicae inueniri;
fit enim:

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \dots + \frac{1}{mx+n} = s,$$

quia est terminus generalis $z = \frac{1}{mx+n}$, erit:

$$\begin{aligned} s dx &= \frac{1}{m} l(mx+n); \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{m}{(mx+n)^2} \\ \frac{ddz}{2dx^2} &= \frac{mm}{(mx+n)^3}; \quad \frac{d^3z}{6dx^3} = -\frac{m^3}{(mx+n)^4} \\ \frac{d^4z}{24dx^4} &= \frac{m^4}{(mx+n)^5}; \quad \frac{d^5z}{120dx^5} = -\frac{m^5}{(mx+n)^6} \&c. \end{aligned}$$

Ex his ergo reperitur:

$$\begin{aligned} s &= D + \frac{1}{m} l(mx+n) + \frac{1}{2(mx+n)} - \frac{Am}{2(mx+n)^2} + \frac{Bm^3}{4(mx+n)^4} \\ &\quad - \frac{Em^5}{6(mx+n)^6} + \frac{Dm^7}{8(mx+n)^8} - \&c. \end{aligned}$$

Posito ergo $x = 0$, fiet constans illa addenda:

$$D = -\frac{1}{m} ln - \frac{1}{2n} + \frac{Am}{2n^2} - \frac{Bm^3}{4n^4} + \frac{Em^5}{6n^6} - \&c.$$

147. Si vero fit $n = 0$, quoniam seriei:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{4m} + \dots + \frac{1}{mx}$$

$$\text{summa est} = \frac{1}{m} C + \frac{1}{m} lx + \frac{1}{2mx} - \frac{A}{2mx^2} + \frac{B}{4mx^4} - \&c.$$

fit verò huius seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{mx}$$

$$\text{summa est } = C + lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{1}{2m^2x^2} + \frac{1}{4m^4x^4} - \&c.$$

si ab hac serie illa m vicibus sumta subtrahatur vt prodeat haec series:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{3m} + \dots + \frac{1}{mx} \\ \frac{m}{m} & \frac{m}{2m} & \frac{m}{3m} & \frac{m}{mx} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{eius summa erit } = lm + \frac{1}{2mx} - \frac{1}{2m^2x^2} + \frac{1}{4m^4x^4} - \&c. \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{4x^4} + \&c. \end{array}$$

atque si statuatur $x = \infty$ summa erit $= lm$. Hinc pro m ponendo numeros 2, 3, 4, &c. erit:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \&c.$$

$$l_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \&c.$$

$$l_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \&c.$$

$$l_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10} + \&c.$$

&c.

148. Relicta autem serie harmonica progrediamur ad seriem quadratorum reciprocam, sitque:

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{xx},$$

in

in qua cum sit terminus generalis $z = \frac{1}{xx}$, erit
 $\int z dx = -\frac{1}{x}$, & differentialia ipsius ■ ita se habebunt

$$\frac{dz}{2dx} = -\frac{1}{x^3}; \quad \frac{ddz}{2.3dx^2} = -\frac{1}{x^4}; \quad \frac{d^3z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5}; \quad \&c.$$

vnde erit summa

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^9} - \frac{1}{x^{11}} + \&c.$$

in qua constans addenda C ex vno casu, quo summa
 constat, est definienda. Ponamus ergo $x = 1$, quia fit
 $s = 1$ debet esse:

$$C = 1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c.$$

quae series autem cum sit maxime diuergens, valorem
 constantis C non ostendit. Quia autem supra demon-
 strauimus summam huius seriei in infinitum continuatae

esse $= \frac{\pi\pi}{6}$; facto $x = \infty$, si ponatur $s = \frac{\pi\pi}{6}$, fiet

$$C = \frac{\pi\pi}{6}, \text{ ob reliquos terminos omnes euanescentes.}$$

Erit ergo

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c. = \frac{\pi\pi}{6}.$$

149. Sin autem summa huius seriei cognita non
 fuisset, valor constantis illius C ex alio quopiam casu,
 quo summa actu est inuenta, determinari deberet. Hunc
 in finem ponamus $x = 10$, atque decem terminis actu
 addendis reperietur:

L 11 2

$s = 1,$

$$\begin{aligned}
 s &= 1, 549767731166540690 && \text{tum est} \\
 \text{add. } \frac{1}{x} &= 0, 1 \\
 \text{subtr. } \frac{1}{2xx} &= 0, 005 \\
 &\quad \underline{1, 644767731166540690} \\
 \text{add. } \frac{\mathcal{A}}{x^3} &= 0, 0001666666666666 \\
 &\quad \underline{1, 644934397833207356} \\
 \text{subtr. } \frac{\mathcal{B}}{x^5} &= 0, 000000333333333333 \\
 &\quad \underline{1, 644934064499874023} \\
 \text{add. } \frac{\mathcal{C}}{x^7} &= 0, 000000002380952381 \\
 &\quad \underline{1, 644934066880826404} \\
 \text{subtr. } \frac{\mathcal{D}}{x^9} &= 0, 000000000033333333 \\
 &\quad \underline{1, 644934066847493071} \\
 \text{add. } \frac{\mathcal{E}}{x^{11}} &= 0, 000000000000757575 \\
 &\quad \underline{1, 644934066848250646} \\
 \text{subtr. } \frac{\mathcal{F}}{x^{13}} &= 0, 000000000000025311 \\
 &\quad \underline{1, 644934066848225335} \\
 \text{add. } \frac{\mathcal{G}}{x^{15}} &= 0, 000000000000001166 \\
 &\quad \underline{71} \\
 \text{subtr. } \frac{\mathcal{H}}{x^{17}} &= \underline{1, 644934066848226430} = C.
 \end{aligned}$$

Hicque numerus simul est valor expressionis $\frac{\pi\pi}{6}$, quemadmodum ex valore ipsius π cognito calculum instituenti patebit. Vnde simul intelligitur, etiamsi series \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , &c. diuergat, tamen hoc modo veram prodire summam.

150. Sit nunc $z = \frac{1}{x^3}$; atque

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{x^3},$$

quia est

$$sz dx = -\frac{1}{2xx}; \quad \frac{dz}{1.2.3 dx} = -\frac{1}{2x^4}; \quad \frac{ddz}{1.2.3.4 dx^2} = -\frac{1}{2x^5}$$

$$\frac{d^3z}{1.2\dots 5 dx^3} = -\frac{1}{2x^6}; \quad \frac{d^5z}{1.2\dots 7 dx^5} = -\frac{1}{2x^8}; \quad \&c.$$

erit

$$s = C - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3A}{2x^4} + \frac{5B}{2x^6} - \frac{7C}{2x^8} + \&c.$$

hincque posito $x = 1$, ob $s = 1$, fiet:

$$C = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}A - \frac{5}{2}B + \frac{7}{2}C - \frac{9}{2}D + \&c.$$

atque iste valor ipsius C simul ostendet summam seriei propositae in infinitum continuatae. Quoniam vero summae potestatum imparium non aequae ac parium constant, iste ipsius C valor ex cognita summa aliquot terminorum definiti debet. Sit ergo $x = 10$, erit:

$$C = s + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3A}{2x^4} - \frac{5B}{2x^6} + \frac{7C}{2x^8} - \&c.$$

Est vero ad computum facilius instituendum :

$$\frac{3 \text{ A}}{2} = 0,250000000000$$

$$\frac{5 \text{ B}}{2} = 0,083333333333$$

$$\frac{7 \text{ C}}{2} = 0,083333333333$$

$$\frac{9 \text{ D}}{2} = 0,150000000000$$

$$\frac{11 \text{ E}}{2} = 0,416666666666$$

$$\frac{13 \text{ F}}{2} = 1,6452380952380$$

$$\frac{15 \text{ G}}{2} = 8,750000000000$$

$$\frac{17 \text{ H}}{2} = 60,283333333333 \quad \&c.$$

Hinc ergo fient termini ad s addendi :

$$\frac{1}{2xx} = 0,0050000000000000$$

$$\frac{3 \text{ A}}{2x^4} = 0,0000250000000000$$

$$\frac{7 \text{ C}}{2x^8} = 0,0000000083333333$$

$$\frac{11 \text{ E}}{2x^{12}} = 0,000000000000416666$$

$$\frac{15 \text{ G}}{2x^{16}} = 0,00000000000000875$$

$$0,005025000833750875$$

ter-

termini autem subtrahendi sunt :

$$\frac{1}{2x^3} = 0,000500000000000000$$

$$\frac{5B}{2x^6} = 0,000000083333333333$$

$$\frac{9D}{2x^{10}} = 0,000000000015000000$$

$$\frac{13F}{2x^{14}} = 0,000000000000016452$$

$$\frac{17H}{2x^{18}} = 0,000000000000000060$$

$$0,000500083348349845$$

$$\text{ab : } 0,005025000833750875$$

$$0,004524917485401030$$

$$s = 1,197531985674193251$$

$$C = 1,202056903159594281.$$

151. Si hoc modo ulterius progrediamur, inueniemus summas omnium serierum potestatum reciprocarum in fractionibus decimalibus expressas :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = 1,6449340668482264 = \frac{2^2 \mathcal{A}}{1.2} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. = 1,2020569031595942$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = 1,0823232337111381 = \frac{2^3 \mathcal{B}}{1.2.3.4} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c. = 1,0369277551068632$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = 1,0173430619844491 = \frac{2^5 \mathcal{C}}{1.2 \dots 6} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \&c. = 1,0083492773866018$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = 1,0040773561979443 = \frac{2^7 \mathcal{D}}{1.2 \dots 8} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \&c. = 1,0020083928260822$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = 1,0009945751278180 = \frac{2^9 \mathcal{E}}{1.2 \dots 10} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{4^{11}} + \&c. = 1,0004941886041094$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \&c. = 1,0002460865533080 = \frac{2^{11} \mathcal{F}}{1.2 \dots 12} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{4^{13}} + \&c. = 1,0001227233475857$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \&c. = 1,0000612481350587 = \frac{2^{13} \mathcal{G}}{1.2 \dots 14} \pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \frac{1}{4^{15}} + \&c. = 1,0000305882363070$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \&c. = 1,0000152822594086 = \frac{2^{15} \mathcal{H}}{1.2 \dots 16} \pi^{16}$$

&c.

152.

152. Ex his ergo vicissim summae illarum serierum infinitarum numeris Bernoullianis constantium exhiberi poterunt. Erit enim :

$$\begin{aligned}
 1 + 0 - \frac{1}{2} + \frac{A}{2} - \frac{B}{4} + \frac{C}{6} - \frac{D}{8} + \&c. &= 0,57721 \&c. \\
 1 + 1 - \frac{1}{2} + A - B + C - D + \&c. &= \frac{1^2 A}{1 \cdot 2} \pi^2 \\
 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3A}{2} - \frac{5B}{2} + \frac{7C}{2} - \frac{9D}{2} + \&c. &= 1,2020 \&c. \\
 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 4 A}{2 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 6 B}{2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 8 C}{2 \cdot 3} - \frac{9 \cdot 10 D}{2 \cdot 3} + \&c. &= \frac{2^3 B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pi^4 \\
 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 A}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 B}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 C}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 D}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. &= 1,0369 \&c. \\
 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 B}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 C}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c. &= \frac{2^5 C}{1 \cdot 2 \dots 6} \pi^6 \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

Harum ergo serierum alternae ope quadraturae circuli summari possunt ; a quamam vero quantitate transcendente reliquae pendeant, adhuc non constat : neque enim ad potestates ipsius π exponentes impares habentes revocari possunt, ita ut coefficientes essent numeri rationales. Quo autem saltem proxime appareat, quales futuri sint coefficientes potestatum ipsius π pro exponentibus imparibus, tabellam sequentem adiunximus :

M m m

1 +

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c. \text{ in infin.} &= \frac{\pi}{0,0000} = \infty \\
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. &= \frac{\pi^2}{6,0000} \text{ vere} \\
1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. &= \frac{\pi^3}{25,79436} \text{ prox.} \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. &= \frac{\pi^4}{90,00000} \text{ vere} \\
1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c. &= \frac{\pi^5}{295,1215} \text{ prox.} \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. &= \frac{\pi^6}{945,000} \text{ vere} \\
1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \&c. &= \frac{\pi^7}{2995,286} \text{ prox.} \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. &= \frac{\pi^8}{9450,000} \text{ vere} \\
1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \&c. &= \frac{\pi^9}{29749,35} \text{ prox.} \\
&\&c.
\end{aligned}$$

153. Ex hoc fonte series numerorum Bernoullianorum

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G}, & \mathfrak{H}, & \mathfrak{I}, & \&c. \end{matrix}$
 quantumvis irregularis videatur interpolari, seu termini
 in medio binorum quorumcunque constituti assignari po-
 terunt: si enim terminus medium interiacens inter primum
 \mathfrak{A} & secundum \mathfrak{B} , seu indici $1\frac{1}{2}$ respondens fuerit $=p$;
 erit utique:

$1 +$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \&c. = \frac{2^2 p}{1.2.3} \pi^3$$

$$\text{ideoque } p = \frac{3}{2\pi^3} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \&c. \right) = 0,05815227$$

Simili modo si terminus inter \mathfrak{B} & \mathfrak{C} medium interiacens seu indicem habens $2\frac{1}{2}$ ponatur $= q$, quia erit:

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \&c. = \frac{2^4 q}{1.2.3.4.5} \pi^5$$

$$\text{fiet } q = \frac{15}{2\pi^5} \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \&c. \right) = 0,02541327$$

Si ergo istarum serierum, in quibus exponentes potestatum sunt numeri impares, summae exhiberi possent, tum quoque series numerorum Bernoullianorum interpolari posset.

154. Ponamus nunc $z = \frac{1}{nn+xx}$, & quaeratur summa huius seriei:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \dots + \frac{1}{nn+xx}$$

$$\text{Quia est } \int z dx = \int \frac{dx}{nn+xx}; \text{ erit } \int z dx = \frac{1}{n} A \operatorname{tang} \frac{x}{n}.$$

$$\text{Ponatur } A \cot \frac{x}{n} = u, \text{ erit } \int z dx = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} - u \right), \text{ \&}$$

$$\frac{x}{n} = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}, \text{ \& } \frac{nn+xx}{nn} = \frac{1}{\sin^2 u}, \text{ \& } z = \frac{\sin^2 u}{nn},$$

$$\text{\& } \frac{dx}{n} = -\frac{du}{\sin^2 u}, \text{ vnde fit } du = -\frac{dx \sin^2 u}{n}.$$

M m m 2

Hinc

Hinc differentialia ipsius z inuenientur hoc modo:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{2 du \sin u \cdot \cos u}{nn} = \frac{dx \sin u^2 \cdot \sin 2u}{n^3} \\ &\& \frac{dz}{dx} = \frac{\sin u^2 \cdot \sin 2u}{n^3} \\ \frac{ddz}{2 dx} &= \frac{du (\sin u \cos u \sin 2u + \sin u^2 \cdot \cos 2u)}{n^3} = \frac{dx \sin u^3 \cdot \sin 3u}{n^4} \\ &\& \frac{ddz}{2 dx^2} = \frac{\sin u^3 \cdot \sin 3u}{n^4} \end{aligned}$$

Simili modo erit, vti iam supra pro eodem casu inuenimus:

$$\frac{d^3 z}{2 \cdot 3 dx^3} = \frac{\sin u^4 \cdot \sin 4u}{n^5}; \quad \frac{d^4 z}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} = \frac{\sin u^5 \cdot \sin 5u}{n^6} \&c.$$

ex quibus formabitur summa quaesita:

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\sin u \cdot \sin u}{2nn} - \frac{\mathcal{A} \sin u^2 \cdot \sin 2u}{2 \cdot n^3} + \frac{\mathcal{B} \sin u^4 \cdot \sin 4u}{4 \cdot n^5} \\ &\quad - \frac{\mathcal{C} \sin u^6 \cdot \sin 6u}{6 \cdot n^7} + \frac{\mathcal{D} \sin u^8 \cdot \sin 8u}{8 \cdot n^9} - \&c. \\ &\quad + \text{Const.} \end{aligned}$$

Si hic ad constantem determinandam ponatur $x = 0$, quo fiat $s = 0$, erit $\cot u = 0$, ideoque u angulus 90° , ac propterea $\sin u = 1$, $\sin 2u = 0$, $\sin 4u = 0$, $\sin 6u = 0$, &c. viderur ergo fore $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, hinc

$C = -\frac{1}{2nn}$: at vero notandum est, etiamsi reliqui termini euanescent, tamen quia coefficientes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , &c. tan-

tandem in infinitum excrescunt, eorum summam posse esse finitam.

155. Ad hanc ergo constantem rite determinandam ponamus esse $x = \infty$, summam enim huius seriei in infinitum excurrentis supra iam in introductione definiuimus, ostendimusque esse eam $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} +$

$\frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$. Posito autem $x = \infty$, fiet $u = 0$, ideoque $\sin u = 0$, simulque sinus omnium arcuum multiplo-
rum euanescant. Cum autem in hac serie potestates ipsius $\sin u$ crescant, diuergentia seriei impedire nequit, quominus valor seriei hoc casu euanescat. Fiet ergo $s = \frac{\pi}{2n} + C$; vnde erit

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}, \quad \&$$

$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$. Quare summa seriei quaesita

$$\text{erit} \quad s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\sin u^2}{2nn} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin u^2 \cdot \sin 2u}{n^3} +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin u^4 \cdot \sin 4u}{n^5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin u^6 \cdot \sin 6u}{n^7} + \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Vbi notandum est, si n fuerit numerus mediocriter magnus, vltimum terminum $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$ tantopere fieri exiguum, vt negligi queat.

156. Ponamus esse $x = n$, ita ut denotet :

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \dots + \frac{1}{nn+nn}.$$

Tum vero erit $\cot u = 1$, & $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Quamob-

rem habebitur $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 4u = 0$;

$\sin 6u = -1$; $\sin 8u = 0$; $\sin 10u = 1$; &c.

Hancobrem erit :

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} - \frac{1}{2 \cdot 2n^3} + \frac{1}{6 \cdot 8n^5} - \frac{1}{10 \cdot 2^5 n^7} \\ + \frac{1}{14 \cdot 2^7 n^9} - \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)},$$

in qua expressione tantum numeri alterni ex Bernoullianis occurrunt. Si igitur valor ipsius s per computum actu institutum iam fuerit inuentus, hinc quantitas π definiri poterit, erit enim :

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot n^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2 n^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^4 n^6} \\ - \frac{1}{7 \cdot 2^6 n^8} + \&c. - \frac{\pi}{e^{2n\pi} - 1}.$$

Et si enim in termino ultimo inest π , tamen quia is tantopere est parvus, sufficit valorem ipsius π proxime nosse.

EXEMPLUM: Sit $n = 5$; erit :

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

qui

qui termini actu additi dabunt:

$$s = 0,146746305690549494$$

vnde erunt termini illi:

$$4ns = 2,93492611381098988$$

$$\frac{1}{n} = 0,2$$

$$\frac{21}{nn} = \frac{0,006666666666666666}{3,14159278047765654}$$

$$\frac{\textcircled{C}}{3.2^2.n^6} = \frac{0,00000012698412698}{3,14159265349352956}$$

$$\frac{\textcircled{C}}{5.2^4.n^{10}} = \frac{0,00000000009696969}{3,14159265359049925}$$

$$\frac{\textcircled{C}}{7.2^6.n^{14}} = \frac{0,00000000000042666}{3,14159265359007259}$$

$$\frac{\textcircled{C}}{9.2^8.n^{18}} = \frac{625}{3,14159265359007884}$$

Hic valor iam tam prope ad veritatem accedit, vt mirandum sit tam leui calculo eousque perueniri posse. Est vero haec expressio aliquantillum iusto maior, subtrahi enim adhuc inde debet $\frac{4\pi}{e^{2\pi\pi}-1}$, cuius valor, dummodo π prope sit cognitum, exhiberi potest; quod per logarithmos ita expedietur.

$$\text{Quia est } \pi le = 1,3643763538$$

$$\text{erit } le^{2\pi\pi} = 10\pi le = 13,6437635.$$

Cum

Cum iam sit $\frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1} = \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} + \frac{4\pi}{e^{4n\pi}} + \&c.$ facile intelligitur ad nostrum calculum sufficere primum terminorum sumfisse. Augeamus ergo characteristicam numero 17, quia habemus totidem figuras decimales, erit:

$$l\pi = 17,4971498$$

$$l4 = 0,6020600$$

$$18,0992098$$

$$\text{subtr. } le^{2n\pi} = 13,6437635$$

$$4,4554463$$

$$\text{Ergo } \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} = 28539 \quad \text{subtrahatur}$$

$$\text{ab } 3,14159265359007884 \quad \text{erit}$$

$$\pi = 3,14159265358979345$$

quae expressio in figura demum penultima a veritate recedit; quod mirandum non est, cum adhuc terminum

$\frac{2}{11.2^{10}.n^{22}}$, qui dat 22, subtrahere debuissimus, sicque ne vltima quidem figura aberrasset. Ceterum intelligitur, si pro n maiorem numerum vti 10 assumissemus, tum facili negotio peripheriam π ad 25 pluresque figuras inueniri potuisse.

157. Ponamus nunc quoque pro x functiones transcendentes ipsius x , sitque $x = lx$, sumendo logarithmos hyperbolicos, quoniam vulgares facile eo reuocantur;
sit-

fitque: $s = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_x$.

Quia igitur est $z = lx$, erit $\int z dx = xlx - x$,
huius enim differentiale dat $dx lx$. Deinde est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{ddz}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^3z}{1.2 dx^3} = \frac{1}{x^3}; \quad \frac{d^5z}{1.2.3.4 dx^5} = \frac{1}{x^5};$$

&c.

Hinc itaque concluditur fore:

$$s = xlx - x + \frac{1}{2}lx + \frac{A}{1.2x} - \frac{B}{3.4x^3} + \frac{C}{5.6x^5} - \frac{D}{7.8x^7} + \&c.$$

+ Const.

Haec autem constans ponendo $x = 1$, quia fit $s = l_1 = 0$
ita definietur, ut sit:

$$C = 1 - \frac{A}{1.2} + \frac{B}{3.4} - \frac{C}{5.6} + \frac{D}{7.8} - \&c.$$

quae series ob nimiam diuergentiam est inepta ad valo-
lorem ipsius C saltem proxime eruendum.

158. Non solum autem proximum sed etiam ipsum
verum valorem ipsius C inueniemus, si consideremus
expressionem Wallisianam pro valore ipsius π inuentam,
atque in introductione demonstratam: quae erat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12. \&c.}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11. \&c.}$$

hinc enim logarithmis sumendis erit:

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + 2l10 + \&c.$$

$$- l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - 2l11 - \&c.$$

N n n

Po-

Ponamus ergo in serie assumpta $x = \infty$, & cum sit:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_x &= C + (x + \frac{1}{2}) l_x - x \\ \text{erit } l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_{2x} &= C + (2x + \frac{1}{2}) l_{2x} - 2x \\ \& \quad l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + \dots + l_{2x} &= C + (x + \frac{1}{2}) l_x + x/2 - x \\ \text{hinc } l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + \dots + l_{(2x-1)} &= x l_x + (x + \frac{1}{2}) l_{2x} - x \end{aligned}$$

Cum igitur sit:

$$\begin{aligned} l_{\frac{\pi}{2}} &= 2l_2 + 2l_4 + 2l_6 + \dots + 2l_{2x} - l_{2x} \\ &= 2l_1 + 2l_3 + 2l_5 + \dots + 2l_{(2x-1)} \\ \text{posito } x &= \infty, \text{ erit:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{\frac{\pi}{2}} &= 2C + (2x+1) l_x + 2x l_2 - 2x - l_2 - l_x \\ &= 2x l_x - (2x+1) l_2 + 2x, \end{aligned}$$

$$\text{ideoque } l_{\frac{\pi}{2}} = 2C - 2l_2, \text{ ergo } 2C = l_{2\pi}, \& \ C = \frac{1}{2} l_{2\pi},$$

vnde in fractionibus decimalibus reperitur:

$$C = 0,9189385332046727417803297$$

atque simul sequens series summatur:

$$1 - \frac{A}{1.2} + \frac{B}{3.4} - \frac{C}{5.6} + \frac{D}{7.8} - \frac{E}{9.10} + \&c. = \frac{1}{2} l_{2\pi}.$$

159. Cognita nunc ista constante $C = \frac{1}{2} l_{2\pi}$, summa quotcunque logarithmorum ex hac serie $l_1 + l_2 + l_3 + \&c.$ exhiberi potest. Si enim ponatur:

$$\begin{aligned} s &= l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_x, \text{ erit} \\ s &= \frac{1}{2} l_{2\pi} + (x + \frac{1}{2}) l_x - x + \frac{A}{1.2x} - \frac{B}{3.4x^3} + \frac{C}{5.6x^5} - \frac{D}{7.8x^7} + \&c. \end{aligned}$$

liqui-

si quidem logarithmi propositi fuerit hyperbolici; sin. au-
tem proponantur logarithmi vulgares, tum in terminis

$\frac{1}{2}l_2\pi + (x + \frac{1}{2})lx$ pro $l_2\pi$ & lx sumi debebunt logarithmi
vulgares, reliqui autem seriei termini $-x + \frac{A}{1.2x} - \frac{B}{3.4x^3} + \&c.$

multiplicari debent per 0,434294481903251827 = π .

Erit igitur hoc casu pro logarithmis vulgaribus:

$$l\pi = 0,497149872694133854351268$$

$$l_2 = 0,301029995663981195213738$$

$$l_2\pi = 0,798179868358115049565006$$

$$\frac{1}{2}l_2\pi = 0,399089934179057524782503$$

EXEMPLUM.

Quaeratur aggregatum mille logarithmorum tabularium

$$s = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{1000}.$$

$$\text{Erit ergo } x = 1000, \text{ \& } lx = 3,000000000000$$

$$\text{vnde fit } xlx = 3000,000000000000$$

$$\frac{1}{2}lx = 1,50000000000000$$

$$\frac{1}{2}l_2\pi = 0,3990899341790$$

$$3001,8990899341790$$

$$\text{subtr. } nx = 434,2944819032518$$

$$2567,6046080309272$$

$$\text{Deinde est } \frac{nA}{1.2x} = 0,0000361912068$$

$$\text{subtr. } \frac{nB}{3.4x^3} = 0,0000000000012$$

$$0,0000361912056$$

$$\text{addatur } 2567,6046080309272$$

$$\text{summa quaesita } s = 2567,6046442221328.$$

N n n 2

Cum

Cum igitur s sit logarithmus producti numerorum :

1. 2. 3. 4. 5. 6. 1000

patet hoc productum, si actu multiplicetur, constare ex 2568 figuris, atque notas a leua initiales fore 4023872 quas insuper 2561 figurae sequentur.

160. Ope ergo huius logarithmorum summationis producta ex quocunque factoribus, qui secundum numeros naturales procedunt, proxime assignari poterunt. Huc potissimum referri potest problema, quo quaeritur vncia media seu maxima in potestate binomii quacunque $(a+b)^m$; vbiquidem notandum est, si m sit numerus impar, binas dari medias inter se aequales, quae iunctim sumtae praebeant vnciam mediam in potestate sequente pari. Quare cum vncia maxima in quaque potestate pari sit duplo maior quam vncia media in potestate praecedente impari, sufficiet pro potestatibus paribus vnciam mediam maximam determinasse. Sit igitur $m = 2n$, & vncia media ita exprimetur ut sit :

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (n+1)}{1. 2. 3. 4. \dots n}$$

Vocetur ista vncia media quae quaeritur $= u$, atque ea hoc modo repraesentari poterit, ut sit :

$$u = \frac{1. 2. 3. 4. 5. \dots 2n}{(1. 2. 3. 4. \dots n)^2}$$

sumtisque logarithmis erit :

$$lu = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \dots + l2n \\ - 2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \dots - 2ln.$$

161. Iam vero sumendis his logarithmis hyperbolicis erit :

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_{2n} = \\ = \frac{1}{2} l_2 \pi + (2n + \frac{1}{2}) l_n + (2n + \frac{1}{2}) l_2 - 2n \\ + \frac{A}{1.2.2n} - \frac{B}{3.4.2^3 n^3} + \frac{C}{5.6.2^5 n^5} - \&c.$$

$$\& 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + 2l_4 + \dots + 2l_n = \\ l_2 \pi + (2n + 1) l_n - 2n + \frac{2A}{1.2n} - \frac{2B}{3.4n^3} + \frac{2C}{5.6n^5} - \&c.$$

qua expressione ab illa sublata relinquetur :

$$lu = -\frac{1}{2} l_2 \pi - \frac{1}{2} l_n + 2nl_2 + \frac{A}{1.2.2n} - \frac{B}{3.4.2^3 n^3} + \frac{C}{5.6.2^5 n^5} - \&c. \\ - \frac{2A}{1.2n} + \frac{2B}{3.4n^3} - \frac{2C}{5.6n^5} + \&c.$$

his vero binis terminis colligendis, erit :

$$lu = l \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3A}{1.2.2n} + \frac{15B}{3.4.2^3 n^3} - \frac{63C}{5.6.2^5 n^5} + \frac{255D}{7.8.2^7 n^7} - \&c.$$

$$\text{Sit } \frac{3A}{1.2.2^2 n^2} - \frac{15B}{3.4.2^4 n^4} + \frac{63C}{5.6.2^6 n^6} - \frac{255D}{7.8.2^8 n^8} + \&c.$$

$$= l \left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \&c. \right); \text{ erit}$$

$$lu = l \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl \left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \&c. \right);$$

$$\text{ideoque } u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \&c. \right)^{2n} \sqrt{n\pi}}.$$

Erit vero posito $2n = m$

$$\begin{aligned}
 & 1 \left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \&c. \right) = \\
 & \frac{A}{m^3} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^5} + \frac{D}{m^6} + \frac{E}{m^{10}} + \&c. \\
 & - \frac{A^2}{2m^4} - \frac{AB}{m^5} - \frac{AC}{m^6} - \frac{AD}{m^{10}} - \&c. \\
 & - \frac{BB}{2m^8} - \frac{BC}{m^{10}} - \&c. \\
 & + \frac{A^3}{3m^6} + \frac{A^2 B}{m^8} + \frac{A^2 C}{m^{10}} + \&c. \\
 & + \frac{AB^2}{m^{10}} + \&c. \\
 & - \frac{A^4}{4m^8} - \frac{A^3 B}{m^{10}} - \&c. \\
 & + \frac{A^5}{5m^{10}} + \&c.
 \end{aligned}$$

quae expressio cum aequalis esse debeat huic :

$$\frac{3 \mathfrak{A}}{1.2 m^2} - \frac{15 \mathfrak{B}}{3.4 m^4} + \frac{63 \mathfrak{C}}{5.6 m^6} - \frac{255 \mathfrak{D}}{7.8 m^8} + \&c.$$

fiet :

$$A = \frac{3 \mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B = \frac{A^2}{2} - \frac{15 \mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C = AB - \frac{1}{3} A^3 + \frac{63 \mathfrak{C}}{5.6}$$

$$D =$$

$$D = AC + \frac{1}{2}B^2 - A^2B + \frac{1}{4}A^4 - \frac{255}{7 \cdot 8}D$$

$$E = AD + BC - A^2C - AB^3 + A^3B - \frac{1}{5}A^5 + \frac{1023}{9 \cdot 10}E$$

&c.

162. Cum iam sit $A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{30}$; $C = \frac{1}{42}$;

$D = \frac{1}{30}$; $E = \frac{5}{66}$; erit:

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{96}$$

$$C = \frac{27}{640}$$

$$D = -\frac{90031}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \quad \&c.$$

Hinc efficitur:

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4 n^2} - \frac{1}{2^9 \cdot 3 n^4} + \frac{27}{2^{15} \cdot 5 n^6} - \frac{90031}{2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 n^8} + \&c.\right)^{2n} V n \pi}$$

$$\text{feu } u = \frac{2^{2n} \left(1 - \frac{1}{2^4 n^2} + \frac{7}{2^9 \cdot 3 n^4} - \frac{121}{2^{13} \cdot 3 \cdot 5 n^6} + \frac{104969}{2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 n^8} - \&c.\right)^{2n}}{V n \pi}$$

vel si ista seriei eleuatio actu instituatur, erit proxime:

$$u = \frac{2^{2n}}{V n \pi \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16 \cdot 128n^4} + \&c.\right)}$$

hinc

hinc terminus medius in $(1+\frac{1}{n})^{2n}$, erit ad summam omnium terminorum 2^{2n} .

vti 1 ad $\sqrt[n]{n\pi} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{1}{128n^3} + \frac{5}{16.128n^4} - \&c. \right)$

vel posito breuitatis gratia $4n = v$, erit ista ratio:

vt 1 ad $\sqrt[n]{n\pi} \left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{2v^3} + \frac{5}{8v^4} + \frac{23}{8v^5} + \frac{53}{16v^6} - \&c. \right)$

EXEMPLUM I.

Quaeratur uncia media in binomio $(a+b)^{10}$ euoluto,

quam constat esse $= \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$.

Adhibendo vltimam formulam pro n inuentam erit $n = 5$

$$\frac{1}{4n} = 0,0500000$$

$$\frac{1}{32n^2} = \frac{0,0012500}{0,0512500}$$

$$\text{subtr. } \frac{1}{128n^3} = \frac{625}{0,0511875}$$

$$\text{subtr. } \frac{5}{16.128n^4} = \frac{39}{}$$

$$\text{Ergo } 1 + \frac{1}{4n} + \&c. = 1,0511836$$

$$\text{Huius log.} = 0,0216784$$

$$\ln = 0,6989700$$

$$\ln = 0,4971498$$

$$\hline 1,2177982$$

$\sqrt[n]{n}$

$$lVn\pi(1+\&c.) = 0,6088991$$

$$a \quad l2^{2n} = 3,0102999$$

$$lu = 2,4014008.$$

$$\text{vnde fit } u = 252.$$

EXEMPLUM II.

*Inuestigetur ratio, quam in potestate centesima binomii
1+1 terminus medius ad summam omnium 2¹⁰⁰ tenet.*

Vtatur ad hoc formula primum inuenta :

$$lu = l \frac{2^{2n}}{Vn\pi} - \frac{3A}{1.2.2n} + \frac{15B}{3.4.2^3n^3} - \frac{63C}{5.6.2^5n^5} + \&c.$$

in qua posito $2n = m$ vt habeatur ista potestas $(1+1)^m$
& loco A, B, C, D, substitutis valoribus; fiet :

$$lu = l \frac{2^m}{V\frac{1}{2}m\pi} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \&c.$$

qui logarithmi cum sint hyperbolici, multiplicentur ii per

$$k = 0,434294481903251,$$

vt transmutentur in tabulares, eritque

$$lu = l \frac{2^m}{V\frac{1}{2}m\pi} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \&c.$$

vnde cum vncia media fit u , erit $2^m:u$ ratio quaesita, ideoque

$$l \frac{2^m}{u} = lV\frac{1}{2}m\pi - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \frac{691k}{88m^{11}} + \&c.$$

Quare cum fit ob exponentem $m = 100$

$$\frac{k}{m} = 0,0043429448 : \frac{k}{m^3} = 0,0000004343 ;$$

$$\frac{k}{m^5} = 0,0000000000 :$$

erit :

$$\frac{k}{4m} = 0,0010857362$$

$$\frac{k}{24m^3} = \frac{0,0000000181}{0,0010857181}$$

$$\text{Tum est } l\pi = 0,4971498726$$

$$l\frac{1}{2}m = 1,6989700043$$

$$l\frac{1}{2}m\pi = 2,1961198769$$

$$lV\frac{1}{2}m\pi = 1,0980599384$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \&c. = \frac{0,0010857181}{1,0991456565} = l\frac{2^{100}}{m}$$

Erit ergo $\frac{2^{100}}{u} = 12,56451$, atque adeo in potestate $(1+1)^{100}$ euoluta terminus medius se habebit ad summam omnium 2^{100} vti 1 ad 12, 56451.

163. Denotet nunc terminus generalis \approx functionem exponentialem a^x , ita vt summari debeat haec series geometrica :

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^x$$

quae

quae cum sit geometrica, eius summa iam constat, erit enim $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$. Modo autem hic exposito hanc sum-

nam inuestigemus. Quia est $z = a^x$, erit $\int z dx = \frac{a^x}{la}$, huius enim differentiale est $a^x dx$, tum vero erit:

$$\frac{dz}{dx} = a^x la; \quad \frac{d dz}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3 z}{dx^3} = a^x (la)^3; \quad \&c.$$

vnde sequitur fore:

$$s = a^x \left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} la - \frac{1}{1.2.3.4} (la)^3 + \frac{1}{1.2.3...6} (la)^5 - \&c. \right) + C.$$

Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, & ob $s = 0$,

$$\text{erit } C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1.2} la + \frac{1}{1.2.3.4} (la)^3 - \&c.$$

ideoque fiet:

$$s = (a^x - 1) \left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} la - \frac{1}{1.2.3.4} (la)^3 + \frac{1}{1.2.3...6} (la)^5 - \&c. \right)$$

Cum igitur summa sit $\frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$, erit:

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} la - \frac{1}{1.2.3.4} (la)^3 + \frac{1}{1.2...6} (la)^5 - \&c.$$

vbi la denotat logarithmum hyperbolicum ipsius a : hinc

$$\text{fit } \frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{1}{1.2} (la)^2 - \frac{1}{1.2.3.4} (la)^4 + \frac{1}{1.2...6} (la)^6 - \&c.$$

ficque istius seriei summa exhiberi poterit.

164. Sit terminus generalis $z = \sin ax$, &
 $s = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin ax$
 quae series cum sit recurrens quoque summari potest;
 erit enim

$$s = \frac{\sin a + \sin ax - \sin(ax+a)}{1 - 2 \cos a + 1} = \frac{\sin a + (1 - \cos a) \sin ax - \sin a \cos ax}{2(1 - \cos a)}$$

Erit vero $\int z dx = \int dx \sin ax = -\frac{1}{a} \cos ax$, & $\frac{dz}{dx} = a \cos ax$;

$$\frac{ddz}{dx^2} = -aa \sin ax; \quad \frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \cos ax; \quad \frac{d^5 z}{dx^5} = a^5 \cos ax \text{ \&c.}$$

$$s = C - \frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{2} \sin ax + \frac{1}{1.2} aa \cos ax + \frac{1}{1.2.3.4} B a^3 \cos ax \\ + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} C a^5 \cos ax + \frac{1}{1.2 \dots 8} D a^7 \cos ax + \text{\&c.}$$

Ponatur $x = 0$ ut fiat $s = 0$; eritque:

$$C = \frac{1}{a} - \frac{1}{1.2} aa + \frac{1}{1.2.3.4} B a^3 - \frac{1}{1.2 \dots 6} C a^5 + \text{\&c.} \quad \text{ergo}$$

$$s = \frac{1}{2} \sin ax + (1 - \cos ax) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1.2} aa + \frac{1}{1.2.3.4} B a^3 - \frac{1}{1.2 \dots 6} C a^5 + \text{\&c.} \right)$$

At cum sit $s = \frac{1}{2} \sin ax + \frac{(1 - \cos ax) \sin a}{2(1 - \cos a)}$ fiet:

$$\frac{\sin a}{2(1 - \cos a)} = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a = \frac{1}{a} - \frac{1}{1.2} aa + \frac{1}{1.2.3.4} B a^3 - \frac{1}{1.2 \dots 6} C a^5 + \text{\&c.}$$

quam eandem seriem iam supra §. 127. habuimus.

165. Sit nunc $z = \cos ax$, ac series summanda:
 $s = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos ax$
 cu-

cuius seriei, quia est recurrens, erit summa:

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax+a)}{1 - 2 \cos a + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos ax + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a \cdot \sin ax.$$

At vero ad summam nostra methodo exprimendam, erit:

$$fz dx = f dx \cos ax = \frac{1}{a} \sin ax, \quad \& \quad \frac{dz}{dx} = -a \sin ax;$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \sin ax; \quad \frac{d^5 z}{dx^5} = -a^5 \sin ax; \quad \&c. \quad \text{Ergo}$$

$$s = C + \frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{2} \cos ax - \frac{A a \sin ax}{1 \cdot 2} - \frac{B a^3 \sin ax}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

Sit $x = 0$, erit $s = 0$, & $C = -\frac{1}{2}$, hincque erit:

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos ax + \frac{1}{a} \sin ax - \frac{A a \sin ax}{1 \cdot 2} - \frac{B a^3 \sin ax}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

Quare cum sit $s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos ax + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a \cdot \sin ax$,
erit uti iam modo inuenimus:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a = \frac{1}{a} - \frac{A a}{1 \cdot 2} - \frac{B a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{C a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \&c.$$

166. Quoniam supra inuenimus, si a denotet arcum quemcunque, esse

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a + \frac{1}{4} \sin 4a + \&c.$$

consideremus hanc feriem, fitque $z = \frac{1}{x} \sin ax$, ut sit

$$s = \sin a + \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a + \dots + \frac{1}{x} \sin ax.$$

Hoc autem casu fit $fz dx = f \frac{dx}{x} \sin ax$, quod integrale exhiberi nequit.

$$\text{Erit vero } \frac{dz}{dx} = \frac{a}{x} \cos ax - \frac{1}{xx} \sin ax;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x} \sin ax - \frac{2a}{xx} \cos ax + \frac{2}{x^3} \sin ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x} \cos ax + \frac{3a^2}{x^2} \sin ax + \frac{6a}{x^3} \cos ax - \frac{6}{x^4} \sin ax;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x} \sin ax + \frac{4a^3}{xx} \cos ax - \frac{12a^2}{x^3} \sin ax - \frac{24a}{x^4} \cos ax + \frac{24}{x^5} \sin ax.$$

Quia igitur neque formulam integram $\int z dx$ exhibere, neque haec differentialia satis commode exprimere licet, summam huius seriei per hanc methodum definire non possumus, ita ut quicquam inde concludi possit. Idem incommodum in multis aliis seriebus occurrit, quoties terminus generalis non satis est simplex, ut eius differentialia ad commodam legem exprimi queant. Quamobrem in sequenti Capite alias expressiones generales pro summis serierum, quarum termini generales vel nimis sunt compositi vel prorsus dari nequeunt, eliciemus; quae feliciori successu in usum vocari poterunt. Imprimis autem insufficientia methodi hic traditae elucet, si signa terminorum seriei propositae alternentur, tum enim quantumvis termini generales sint simplices, tamen termini summatorii hac methodo exhiberi commode nequeunt.

CAPUT VII.

METHODUS SUMMANDI SUPERIOR
VLTERIUS PROMOTA.

167.

Vt defectum methodi summandi ante traditae suppleamus, in hoc Capite eiusmodi series considerabimus, quarum termini generales magis sint complexi. Cum igitur expressio ante inuenta in progressionibus geometricis, etsi aliis methodis facillime summari possunt, veram summam finita formula contentam non praebeat, hic primum eiusmodi series contemplabimur, quarum termini sint producta ex terminis seriei geometricae & alius cuiuscunque. Sit igitur proposita haec series:

$$s = ap + b^2p^2 + cp^3 + dp^4 + \dots + yp^x$$

quae est composita ex geometrica $p, p^2, p^3, \&c.$ & alia quacunque serie $a + b + c + d + \&c.$ cuius terminus generalis seu indicati x respondens sit $= y$, atque expressionem generalem inuestigemus pro valore eius summae $s = S.y p^x$.

168. Instituiamus ratiocinium eodem modo, quo supra vfi sumus, sitque v terminus antecedens ipsi y in serie $a + b + c + d + \&c.$ atque A praecedens ipsi a seu is qui indicati 0 respondet, eritque $v p^{x-1}$ terminus generalis huius seriei:

1 A

$A + ap + bp^2 + cp^3 + \dots + vp^{x-1}$
 cuius summa, si indicetur per $S.vp^{x-1}$ erit:

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p} S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A.$$

Cum autem sit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

erit:

$$S.yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p} S.yp^x - \frac{1}{p} S \frac{dy}{dx} p^x + \frac{1}{2p} S \frac{d^2y}{dx^2} p^x \\ - \frac{1}{6p} S \frac{d^3y}{dx^3} p^x + \frac{1}{24p} S \frac{d^4y}{dx^4} p^x - \&c.$$

Ex qua fit:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1} \left(yp^{x+1} - Ap - S \frac{dy}{dx} p^x + S \frac{d^2y}{dx^2} p^x - S \frac{d^3y}{dx^3} p^x + \&c. \right)$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{dy}{dx} p^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3} p^x$; &c. ex iis definiri poterit terminus summatorius Syp^x .

169. Hinc iam summae inueniri poterunt serierum, quarum termini generales in hac forma $x^n p^x$ continentur. Sit enim $y = x^n$, erit $A = 0$, nisi sit $n = 0$, quo casu foret $A = 1$, & quia est:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3};$$

&c.

erit:

erit :

$$S. x^n p^x = \frac{1}{p-1} \left(x^n p^{x+1} - A p - n S. x^{n-1} p^x + \frac{n(n-1)}{1.2} S. x^{n-2} p^x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} S. x^{n-3} p^x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} S. x^{n-4} p^x - \&c. \right)$$

Ex hac forma nunc successive pro n substituendo numeros 0, 1, 2, 3, &c. obtinebuntur sequentes summationes; ac primo quidem si $n = 0$, fit $A = 1$, in reliquis autem casibus erit $A = 0$:

$$S. x^0 p^x = S. p^x = \frac{1}{p-1} (p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1} - p}{p-1} = \frac{p(p^x - 1)}{p-1}.$$

quae est summa progressionis geometricae cognita:

$$S. x p^x = \frac{1}{p-1} (x p^{x+1} - S. p^x) = \frac{x p^{x+1}}{p-1} - \frac{(p^{x+1} - p)}{(p-1)^2}$$

$$\text{feu } S. x p^x = \frac{x p^x}{p-1} - \frac{p(p^x - 1)}{(p-1)^2},$$

$$S. x^2 p^x = \frac{1}{p-1} (x^2 p^{x+1} - 2 S. x p^x + S. p^x) \quad \text{feu}$$

$$S. x^2 p^x = \frac{x^2 p^{x+1}}{p-1} - \frac{2 x p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x - 1)}{(p-1)^3}.$$

Porro est

$$S. x^3 p^x = \frac{1}{p-1} (x^3 p^{x+1} - S. x^2 p^x + 3 S. x p^x - S. p^x)$$

feu

$$S. x^3 p^x = \frac{x^3 p^{x+1}}{p-1} - \frac{3 x^2 p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)x p^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x - 1)}{(p-1)^4}$$

P p p

fic.

ficque ulterius progrediendo superiorum potestatum $x^4 p^x$; $x^5 p^x$; $x^6 p^x$; &c. summae definiri poterunt, hoc vero commodius praestabitur ope expressionis generalis, quam nunc inuestigabimus.

170. Quoniam inuenimus esse :

$$S. y p^x = \frac{1}{p-1} \left(y p^{x+1} - A p - S. \frac{dy}{dx} p^x + S. \frac{d^2 y}{dx^2} p^x - S. \frac{d^3 y}{dx^3} p^x + \&c. \right)$$

vbi A est eiusmodi constans, vt summa fiat $= 0$, si ponatur $x = 0$: namque hoc casu fit $y = A$, & $y p^{x+1} = A p$; hanc constantem omittere poterimus, dummodo perpetuo meminerimus ad summam quamque semper eiusmodi constantem adiacere oportere, vt facto $x = 0$, euanescat, seu vt alii cuiuspiam casui satisfiat. Statuamus ergo loco y , eritque

$$S. p^x z = \frac{p^{x+1} z}{p-1} - \frac{1}{p-1} S. p^x \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)} S. p^x \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{6(p-1)} S. p^x \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)} S. p^x \frac{d^4 z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)} S. p^x \frac{d^5 z}{dx^5} + \&c.$$

Deinde statuamus successiue $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3 z}{dx^3}$; &c. in locum y eritque :

$$S. \frac{p^x dz}{dx} = \frac{p^{x+1}}{p-1} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1} S. p^x \frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)} S. p^x \frac{d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

S.

$$S. \frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1} ddz}{p-1 dx^2} + \frac{1}{p-1} S. \frac{p^x d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)} S. \frac{p^x d^4 z}{dx^4} - &c.$$

$$S. \frac{p^x d^3 z}{dx^3} = \frac{p^{x+1} d^3 z}{p-1 dx^3} + \frac{1}{p-1} S. \frac{p^x d^4 z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)} S. \frac{p^x d^5 z}{dx^5} - &c.$$

&c.

Si igitur hi valores successiue substituantur, $S. p^x z$ huiusmodi forma exprimetur :

$$S. p^x z = \frac{p^{x+1} z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1} dz}{(p-1) dx} + \frac{\epsilon p^{x+1} ddz}{(p-1) dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1} d^3 z}{(p-1) dx^3} \\ + \frac{\delta p^{x+1} d^4 z}{(p-1) dx^4} - \frac{\epsilon p^{x+1} d^5 z}{(p-1) dx^5} + &c.$$

171. Ad valores litterarum $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, &c.$ definiendos, substituantur pro quouis termino series ante inuentae nempe :

$$\frac{p^{x+1} z}{p-1} = S. p^x z + \frac{1}{p-1} S. \frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)} S. \frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)} S. \frac{p^x d^3 z}{dx^3} - &c.$$

$$\frac{p^{x+1} dz}{(p-1) dx} = S. \frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1} S. \frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)} S. \frac{p^x d^3 dz}{dx^3} + &c.$$

$$\frac{p^{x+1} ddz}{(p-1) dx^2} = S. \frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{(p-1)} S. \frac{p^x d^3 z}{dx^3} - &c.$$

$$\frac{p^{x+1} d^3 z}{(p-1) dx^3} = S. \frac{p^x d^3 z}{dx^3} + &c.$$

Habebimus ergo : $S.p^x z =$

$$S.p^x z + \frac{1}{p-1} S \frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)} S \frac{p^x d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)} S \frac{p^x d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{24(p-1)} S \frac{p^x d^4 z}{dx^4} + \&c.$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \alpha & \quad - \frac{\alpha}{p-1} \quad + \frac{\alpha}{2(p-1)} \quad - \frac{\alpha}{6(p-1)} \\ & \quad + \frac{\epsilon}{p-1} \quad - \frac{\epsilon}{2(p-1)} \\ & \quad - \frac{\gamma}{p-1} \quad + \frac{\gamma}{p-1} \\ & \quad + \frac{\delta}{p-1} \end{aligned}$$

vnde coefficientium $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ valores sequentes obtinebuntur :

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1} \left(\epsilon + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1} \left(\gamma + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} \right)$$

$$\epsilon = \frac{1}{p-1} \left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} \right) \&c.$$

172. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{p-1} = q$, erit :

$$\alpha = q$$

$$\epsilon = \alpha q + \frac{1}{2} q = qq + \frac{1}{2} q$$

$$\gamma = \epsilon q + \frac{1}{2} \alpha q + \frac{1}{6} q = q^3 + qq + \frac{1}{6} q$$

$$\delta = \gamma q + \frac{1}{2} \epsilon q + \frac{1}{6} \alpha q + \frac{1}{24} q = q^4 + \frac{3}{2} q^3 + \frac{7}{12} q^2 + \frac{1}{24} q$$

$$\epsilon = \delta q + \frac{1}{2} \gamma q + \frac{1}{6} \epsilon q + \frac{1}{24} \alpha q + \frac{1}{120} q \quad \text{feu}$$

$$\text{feu } s = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{2}q^3 + \frac{7}{2}q^2 + \frac{11}{2}q \quad \&$$

$$\zeta = q^6 + \frac{5}{2}q^5 + \frac{13}{2}q^4 + \frac{3}{2}q^3 + \frac{31}{2}q^2 + \frac{17}{2}q \quad \&c.$$

feu hoc modo exprimantur :

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\epsilon = \frac{2qq + q}{1.2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1.2.3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1.2.3.4}$$

$$\epsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1.2.3.4.5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1.2.3.4.5.6.7} \quad \&c.$$

vbi quilibet coefficientis 16800 oritur, si summa binorum superiorum 1560 + 1800 per exponentem ipsius q , qui hic est 5, multiplicetur.

173. Restituamus autem loco q valorem $\frac{1}{p-1}$,

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\epsilon = \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}$$

P p p 3

$\delta =$

$$\delta = \frac{p^3 + 11p^2 + 11p + 1}{1.2.3.4(p-1)^4}$$

$$\epsilon = \frac{p^4 + 26p^3 + 66p^2 + 26p + 1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$$

&c.

Lex harum quantitatum ita se habet, ut si ponatur terminus quicunque:

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \&c.}{1.2.3 \dots (n-1)(p-1)^{n-1}}$$

futurum fit:

$$A = 2^{n-1} - n$$

$$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

&c.

unde isti coefficientes α , ϵ , γ , δ , &c. quousque libuerit, continuari possunt.

174. Quod si vero legem, qua hi coefficientes inter se cohaerent, consideremus, facile patet, eos seriem re-

recurrentem constituere, atque prodire si haec fractio euoluatur :

$$1 - \frac{u}{p-1} - \frac{u^2}{2(p-1)} - \frac{u^3}{6(p-1)} - \frac{u^4}{24(p-1)} - \&c.$$

prodibit enim haec series :

$$1 + \alpha u + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

Ponatur illa fractio $= V$, & cum sit :

$$V = \frac{p-1}{p-1-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-\frac{u^4}{24}-\&c.}$$

erit $V = \frac{p-1}{p-e^u}$; vbi e est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$.

Atque si valor ipsius V per seriem exprimatur secundum potestates ipsius u , orietur :

$$V = 1 + \alpha u + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

cuius coefficientes $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ erunt ii ipsi, quorum in praesenti negotio opus habemus. Iis igitur inventis erit :

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\epsilon d^2 z}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \&c. \right) + \text{Const.}$$

quae ergo expressio est terminus summatorius seriei huius :

$$ap + bp^2 + cp^3 + \dots + p^x z$$

cuius terminus generalis est $= p^x z$.

175. Quoniam inuenimus esse $V = \frac{p-1}{p-e^u}$, erit
 $e^u = \frac{pV - p + 1}{V}$, & logarithmis sumendis fiet
 $u = \log(pV - p + 1) - \log V$, hincq; differentiando $du = \frac{(p-1)dV}{pV^2 - (p-1)V}$
 quocirca erit $pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}$. Quoniam
 ergo est $V = 1 + \alpha u + \xi u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$
 erit :

$$pV^2 = p + 2\alpha pu + 2\xi pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \&c.
 + \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\xi pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \&c.
 + \xi\xi pu^4 + 2\xi\gamma pu^5 + \&c.$$

$$(p-1)V = (p-1) + \alpha(p-1)u + \xi(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3
 + \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \&c.$$

$$\frac{(p-1)dV}{du} = (p-1)\alpha + 2(p-1)\xi u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3
 + 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \&c.$$

quibus expreffionibus inter fe coaequatis reperietur :

$$\begin{aligned} (p-1)\alpha &= 1 \\ 2(p-1)\xi &= \alpha(p+1) \\ 3(p-1)\gamma &= \xi(p+1) + \alpha^2 p \\ 4(p-1)\delta &= \gamma(p+1) + 2\alpha\xi p \\ 5(p-1)\varepsilon &= \delta(p+1) + 2\alpha\gamma p + \xi\xi p \\ 6(p-1)\zeta &= \varepsilon(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\xi\gamma p \\ 7(p-1)\eta &= \zeta(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\xi\delta p + \gamma\gamma p \\ &\&c. \end{aligned} \quad \text{ex}$$

ex quibus formulis, si pro p datus numerus assumatur, valores coefficientium α , β , γ , δ , &c. facilius determinari possunt, quam ex lege primum inuenta.

176. Antequam ad casus speciales ratione valoris ipsius p descendamus, ponamus esse $z = x^n$, ita ut haec series summari debeat:

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \dots + x^n p^n$$

eritque per expressionem ante inuentam:

$$s = p^x \left(\frac{p}{p-1} \cdot x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \frac{(p^3 + 4p^2 + p)}{(p-1)^4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \&c. \right)$$

$\pm C$, quae reddat $s = 0$ si ponatur $x = 0$.

Hinc ponendo pro n successive numeros 0, 1, 2, 3, 4, &c. erit:

$$S.x^0 p^x = p^x \cdot \frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}$$

$$S.x^1 p^x = p^x \left(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2} \right) + \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2 p^x = p^x \left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3} \right) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3 p^x = p^x \left(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4} \right) + \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$$

Qq q

S.v

$$S.x^4 p^x = p^x \left(\frac{px^4}{p-1} + \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} + \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4} + \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5} \right) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$S.x^5 p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3} - \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^4} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5} - \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

$$S.x^6 p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3} - \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5} - \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6} + \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

&c.

177. Hinc intelligitur, quoties x fuerit functio rationalis integra ipsius x , toties seriei, cuius terminus generalis est $p^x x$, summam exhiberi posse; propterea quod differentialia ipsius x fumendo, tandem ad evanescencia perueniatur. Ita si proponatur haec series:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \dots + \frac{(xx+x)}{2} p^x,$$

qb

ob $z = \frac{xx+x}{2}$, & $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; atque $\frac{ddz}{dx^2} = 1$;

erit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x - \frac{(2x+1)}{2(p-1)} + \frac{(p+1)}{2(p-1)^2} \right) - \frac{p}{p-1} \left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)} \right)$$

feu $s = p^{x+1} \left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3} \right) - \frac{p}{(p-1)^3}$.

Sin autem z fuerit functio non rationalis integra, tum ista termini summatorii expressio in infinitum excurrat.

Ita si fit $z = \frac{1}{x}$, vt summanda sit haec series:

$$s = p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{4}p^4 + \dots + \frac{1}{x}p^x;$$

ob

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx}; \quad \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3}; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4}; \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5}; \quad \&c.$$

prodibit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \&c. \right) + C.$$

Hoc ergo casu constans C non ex casu $x=0$ definiri potest: ad eam igitur definiendam ponatur $x=1$, & quia fit $s=p$, erit:

$$C = p - \frac{pp}{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \&c. \right)$$

178. Ex his perspicuum est, nisi p determinatum numerum significet, parum utilitatis hinc ad summas ferierum proxime exhibendas redundare. Primum autem patet pro p non posse scribi 1, propterea, quod omnes coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ fierent infinite magni. Quare cum series, quam nunc tractamus, abeat in eam quam ante iam sumus contemplari, si ponatur $p = 1$, mirum est, quod ille casus tanquam facillimus ex hoc erui nequeat. Tum vero quoque notabile est, quod casu $p = 1$ summatio requirat integrale $\int x dx$, cum tamen generaliter summa sine ullo integrali exhiberi queat. Sic igitur fit, ut dum omnes coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ in infinitum excreſcunt, simul formula illa integralis invehatur. Hicque adeo casus, quo $p = 1$, est solus, ad quem generalis expressio hic inuenta applicari nequeat. Neque vero hoc casu generalis forma a vero recedere censenda est; nam etsi singuli termini sunt infiniti, tamen reuera omnia infinita se destruunt, restatque quantitas finita summae aequalis, & congruens cum ea, quae per priorem methodum inuenitur, quod infra fusius sumus declaraturi.

179. Sit igitur $p = -1$, atque signa in serie summanda alternatim se excipient:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & & & & x & \\ -a & +b & -c & +d & . & . & . & . & \pm z & \end{array}$$

vbi z erit affirmatiuum si x fuerit numerus par, negatiuum autem, si x sit numerus impar. Posito ergo

$-a + b - c + d - e + f - g + h - i + j - k + l - m + n - o + p - q + r - s + t - u + v - w + x - y + z = s$, erit

$$s = \frac{+1}{2} \left(z - \frac{a dz}{dx} + \frac{6 d d z}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \&c. \right) + C.$$

vbi signorum ambiguum superius valet, si x sit numerus par, contra vero si x sit numerus impar. Mutandis ergo signis erit:

$$a - b + c - d + e - f + g - h + i - j + k - l + m - n + o - p + q - r + s - t + u - v + w - x + y - z = s$$

$$+ \frac{1}{2} \left(z - \frac{a dz}{dx} + \frac{6 d d z}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \&c. \right) + C.$$

vbi signorum ambiguitas eandem sequitur legem.

180. Hoc casu coefficientes $a, 6, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \&c.$ inueniri possunt ex valoribus ante traditis ponendo vbi que $p = -1$. Facilius autem eruentur ex formulis generalibus §. 175. datis, ex quibus simul perspicietur alternos istos coefficientes euanescere. Facto enim $p = -1$ istae formulae abibunt in

$$\begin{aligned} -a &= 1 \\ -46 &= 0 \\ -6\gamma &= 0 - a^2 \\ -8\delta &= 0 - 2a6 \\ -10\epsilon &= 0 - 2a\gamma - 66 \\ -12\zeta &= 0 - 2a\delta - 26\gamma \\ &\&c. \end{aligned}$$

Qq q 3

vnde

vnde cum fit $\epsilon = 0$, erit quoque $\delta = 0$, porroque $\zeta = 0$, $\theta = 0$, &c. & reliquae litterae ita determinabuntur, vt fit:

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = -\frac{\alpha^2}{6}$$

$$\epsilon = -\frac{2\alpha\gamma}{10}$$

$$\eta = -\frac{2\alpha\epsilon + \gamma\gamma}{14}$$

$$\theta = -\frac{2\alpha\eta + 2\gamma\epsilon}{18} \quad \&c.$$

181. Quo iste calculus commodius absolui possit introducamus nouas litteras fitque:

$$\alpha = -\frac{A}{1.2}$$

$$\gamma = -\frac{B}{1.2.3.4}$$

$$\epsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = -\frac{D}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$

$$\theta = -\frac{E}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} \quad \&c.$$

Eritque summa ante exhibita:

$$= \frac{1}{2} \left(z + \frac{A dz}{1.2 dx} - \frac{B d^3 z}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{C d^5 z}{1.2.3.4.5.6 dx^5} - \frac{D d^7 z}{1.2.3.4.5.6.7.8 dx^7} + \&c. \right) \\ + C. \quad \text{Co.}$$

Coefficientes vero ex sequentibus formulis definientur :

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \\
 {}_3B &= \frac{4.3}{1.2} \frac{AA}{2} \\
 {}_5C &= \frac{6.5}{1.2} AB \\
 {}_7D &= \frac{8.7}{1.2} AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \frac{BB}{2} \\
 {}_9E &= \frac{10.9}{1.2} AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} BC \\
 {}_{11}F &= \frac{12.11}{1.2} AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} \frac{CC}{2} \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

quae hoc modo facilius atque ad calculum accommodatius repraesentari possunt :

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \\
 B &= 2. \frac{AA}{2} \\
 C &= 3. AB \\
 D &= 4. AC + 4. \frac{6.5}{3.4} \frac{BB}{2} \\
 E &= 5. AD + 5. \frac{8.7}{3.4} BC \\
 F &= 6. AE + 6. \frac{10.9}{3.4} BD + 6. \frac{10.9.8.7}{3.4.5.6} \frac{CC}{2} \\
 G &= 7. AF + 7. \frac{12.11}{3.4} BE + 7. \frac{12.11.10.9}{3.4.5.6} CD \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

Hinc

Hinc igitur calculo instituto reperietur :

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \\
 B &= 1 \\
 C &= 3 \\
 D &= 17 \\
 E &= 155 = 5 \cdot 31 \\
 F &= 2073 = 691 \cdot 3 \\
 G &= 38227 = 7 \cdot 5461 = 7 \cdot \frac{127 \cdot 129}{3} \\
 H &= 929569 = 3617 \cdot 257 \\
 I &= 28820619 = 43867 \cdot 9 \cdot 73 \quad \&c.
 \end{aligned}$$

182. Si hos numeros attentius perpendamus, ex factoribus 691, 3617, 43867, facile concludere licet, hos numeros cum supra exhibitis Bernoullianis nexum habere, indeque determinari posse. Hanc igitur relationem inuestiganti mox patebit hos numeros ex Bernoullianis A, B, C, D, E, &c. sequenti modo formari posse:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot 1 \cdot 3 \quad \mathfrak{A} = 2(2^2 - 1) \mathfrak{A} \\
 B &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \mathfrak{B} = 2(2^4 - 1) \mathfrak{B} \\
 C &= 2 \cdot 7 \cdot 9 \quad \mathfrak{C} = 2(2^6 - 1) \mathfrak{C} \\
 D &= 2 \cdot 15 \cdot 17 \quad \mathfrak{D} = 2(2^8 - 1) \mathfrak{D} \\
 E &= 2 \cdot 31 \cdot 33 \quad \mathfrak{E} = 2(2^{10} - 1) \mathfrak{E} \\
 F &= 2 \cdot 63 \cdot 65 \quad \mathfrak{F} = 2(2^{12} - 1) \mathfrak{F} \\
 G &= 2 \cdot 127 \cdot 129 \quad \mathfrak{G} = 2(2^{14} - 1) \mathfrak{G} \\
 H &= 2 \cdot 255 \cdot 257 \quad \mathfrak{H} = 2(2^{16} - 1) \mathfrak{H} \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

Cum

Cum igitur numeri Bernoulliani sint fracti, coefficientes vero nostri integri, patet hos factores semper tollere fractiones; eruntque ergo:

$$A = 1$$

$$B = 1$$

$$C = 3$$

$$D = 17$$

$$E = 5.31 = 155$$

$$F = 3.691 = 2073$$

$$G = 7.43.127 = 38227$$

$$H = 257.3617 = 929569$$

$$I = 9.73.43867 = 28820619$$

$$K = 5.31.41.174611 = 1109652905$$

$$L = 89.683.854513 = 51943281731$$

$$M = 3.4097.236364091 = 2905151042481$$

$$N = 2731.8191.8553103 = 191329672483963$$

&c.

Ex his ergo numeris integris vicissim numeri Bernoulliani inueniri poterunt.

183. Adhibendo igitur numeros Bernoullianos seriei propositae: 1 2 3 4 5 ... x

$a - b + c - d + e - \dots + z$, summa erit:

$$= \left(\frac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)A dz}{1.2 dx} + \frac{(2^4-1)B d^3 z}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{(2^6-1)C d^5 z}{1.2 \dots 6 dx^5} + \frac{(2^8-1)D d^7 z}{1.2 \dots 8 dx^7} + \&c. \right)$$

+ Const.

R r r

Hinc

Hinc autem perspicitur istos numeros non casu in hanc expressionem ingredi; quemadmodum enim series proposita oritur, si ab ista:

$$a + b + c + d + \dots + s,$$

vbi omnes termini signum habent + subtrahatur summa alternorum $b + d + f + \dots$ bis sumta; ita quoque expressio inuenta in duas resolui potest partes, quarum altera est summa omnium terminorum signo + affectorum, quae erit:

$$\int x dx + \frac{1}{2}x + \frac{A dz}{1.2 dx} - \frac{B d^3 x}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{C d^5 x}{1.2...6 dx^5} - \&c.$$

Summa vero alternorum pari modo inuenietur, quo supra vti sumus. Cum enim vltimus terminus sit x indici x respondens, antecedens indici $x-2$ respondens erit:

$$- \frac{2 dz}{dx} + \frac{2^2 d^2 x}{1.2 dx^2} - \frac{2^3 d^3 x}{1.2.3 dx^3} + \frac{2^4 d^4 x}{1.2.3.4 dx^4} - \&c.$$

quae forma ex illa, qua ante terminus antecedens exprimebatur; oritur, si loco x scribatur $\frac{x}{2}$. Habebitur ergo summa alternorum, si in summa omnium vbique loco x scribatur $\frac{x}{2}$, quae propterea erit:

$$\frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2}x + \frac{2 A dz}{1.2 dx} - \frac{2^3 B d^3 x}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{2^5 C d^5 x}{1.2...6 dx^5} - \&c.$$

cuius duplum si a summa praecedente subtrahatur, existente x numero pari, vel si praecedens summa a duplo huius si x est numerus impar subtrahatur, residuum ostendet summam seriei:

a—

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + x$$

quae ergo erit:

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{(2^2-1)A dx}{1.2 dx} - \frac{(2^4-1)B d^3 x}{1.2.3.4 dx^3} + \&c. \right) + C.$$

quae est eadem expressio, quam modo inueneramus.

184. Sumatur pro x potestas ipsius x , nempe x^n , ut reperiatur summa seriei:

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots + x^n.$$

$$\text{Ob. } \frac{dx}{1 dx} = \frac{n}{1} x^{n-1}; \quad \frac{d^3 x}{1.2.3 dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}; \&c.$$

erit adhibendis coefficientibus $A, B, C, D, \&c.$ summa quaesita:

$$= \frac{1}{2} \left(x^n + \frac{A}{2} n x^{n-1} - \frac{B}{4} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} + \frac{C}{6} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} x^{n-5} \right. \\ \left. - \frac{D}{8} \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{1.2 \dots 7} x^{n-7} + \&c. \right) + \text{Const.}$$

vbi signum superius valet si sit x numerus par, inferius vero si impar. Constans autem ita definiri debet, ut summa euanescat, si $x = 0$, quo casu signum superius valet. Pro n ergo successive numeros $0, 1, 2, 3, \&c.$ substituendo sequentes prodibunt summationes:

$$\text{I. } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}$$

scilicet si numerus terminorum fuerit par, summa erit $= 0$, sin impar erit $= +1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \dots \pm x = \mp \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
 scilicet si numerus terminorum sit par, summa erit $= -\frac{1}{2}x$
 & pro numero terminorum impari $= +\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots \pm x^2 = \mp \frac{1}{2}(x^2 + x)$
 scilicet pro pari numero $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
 & pro impari numero $= +\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots \pm x^3 = \mp \frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
 scilicet pro pari $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
 & pro impari $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$.

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots \pm x^4 = \mp \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
 scilicet pro numero pari $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
 & pro numero impari $= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$
 &c.

185. Apparet ergo in potestatibus paribus prae-
 ter $n=0$, constantem adiiciendam evanescere, hisque
 casibus summam terminorum numero siue parium siue
 imparium tantum ratione signi discrepare. Quod si ergo
 x fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par
 neque impar, haec consideratio cessare debet, ac prop-
 terea in summa termini ambigui sunt reiiciendi: unde
 sequitur huiusmodi serierum in infinitum continuatarum
 summam exprimi per solam quantitatem constantem ad-
 iiciendam.

Hanc-

Hancobrem erit:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \&c. \text{ in infinitum} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \&c. = \frac{A}{4} = + \frac{(2^2 - 1)A}{2}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \&c. = -\frac{B}{8} = - \frac{(2^4 - 1)B}{4}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \&c. = \frac{C}{12} = + \frac{(2^6 - 1)C}{6}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \&c. = -\frac{D}{16} = - \frac{(2^8 - 1)D}{8}$$

&c.

Quae eadem summae per methodum supra traditam series, in quibus signa $+$ & $-$ alternantur, summandi inveniuntur.

186. Si pro n statuantur numeri negativi, expressio summae in infinitum excurrat. Sit $n = -1$, erit summa seriei:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{x} = + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \&c. \right) + \text{Const.}$$

Hic autem quia constans non ex casu $x = 0$ definiri potest, ex alio casu erit definienda. Ponatur $x = 1$,

R r r 3

at-

atque ob summam $= 1$ & signum inferius erit :

$$\text{Const.} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \&c. \right) \text{ seu}$$

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \&c.$$

Vel ponatur $x = 2$, ob summam $= \frac{1}{2}$, & signum superius reperietur :

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2 \cdot 2^2} + \frac{B}{4 \cdot 2^4} - \frac{C}{6 \cdot 2^6} + \&c. \right)$$

$$\text{seu Const.} = \frac{3}{4} - \frac{A}{4 \cdot 2^2} + \frac{B}{8 \cdot 2^4} - \frac{C}{12 \cdot 2^6} + \frac{D}{16 \cdot 2^8} - \&c.$$

fin autem ponatur $x = 4$, erit :

$$\text{Const.} = \frac{17}{24} - \frac{A}{4 \cdot 4^2} + \frac{B}{8 \cdot 4^4} - \frac{C}{12 \cdot 4^6} + \frac{D}{16 \cdot 4^8} - \&c.$$

Vtunque autem constans definiatur, idem prodibit valor, qui simul summam seriei in infinitum continuatae, quae est $= 1/2$, indicabit.

187. Ceterum ex his novis numeris A, B, C, D, E, &c. summae serierum potestatum reciprocarum parium, in quibus tantum numeri impares occurrunt, commode summari poterunt. Si enim ponatur :

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \&c. = s \text{ erit}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \&c. = \frac{s}{2^{2n}},$$

quae ab illa subtracta relinquet :

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)s}{2^{2n}}.$$

Cum

Cum igitur valores ipsius s pro singulis numeris n iam supra exhibuerimus: (125), erit:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. &= \frac{A}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. &= \frac{B}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} \\ 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. &= \frac{C}{1.2.3 \dots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4} \\ 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \&c. &= \frac{D}{1.2.3 \dots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4} \\ 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \&c. &= \frac{E}{1.2.3 \dots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Sin autem omnes numeri ingrediantur, signaque alternentur quia erit:

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n} - 1)s - s}{2^{2n}}$$

habebitur:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. &= \frac{(A-2\mathcal{A})}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathcal{A}}{1.2} \cdot \pi^2 \\ 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. &= \frac{(B-2\mathcal{B})}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathcal{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4 \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c. &= \frac{(C-2\mathcal{C})}{1.2 \dots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathcal{C}}{1.2 \dots 6} \cdot \pi^6 \\ 1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \&c. &= \frac{(D-2\mathcal{D})}{1.2 \dots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathcal{D}}{1.2 \dots 8} \cdot \pi^8 \\ 1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \&c. &= \frac{(E-2\mathcal{E})}{1.2 \dots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathcal{E}}{1.2 \dots 10} \cdot \pi^{10} \\ &\&c. \end{aligned}$$

188. Quemadmodum haecenus seriem sumus contemplati, cuius termini erant producta ex terminis progressionis geometricae $p, p^2, p^3, \&c.$ & ex terminis seriei cuiuscunque $a, b, c, \&c.$ ita poterimus simili ratione prosequi seriem, cuius termini sint producta ex terminis duarum quarumcunque serierum, quarum altera tanquam cognita assumatur. Sit series cognita:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & & & x \\ A + B + C + & . & . & . & . & . & + Z \\ a + b + c + & . & . & . & . & . & + z \end{array} \quad \text{altera vero incognita}$$

atque quaeratur summa huius seriei:

$$Aa + Bb + Cc + \dots + Zz$$

quae ponatur $= Zs$. Sit in serie cognita terminus penultimus $= Y$, atque posito $x - 1$ loco x expressio summae $S.Zs$ abibit in

$$Y \left(s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c. \right)$$

Quae cum exprimat summam seriei Zs termino ultimo Zz multatae, erit:

$$Zs - Zz = Ys - \frac{Yds}{dx} + \frac{Ydds}{2dx^2} - \frac{Y^3d^3s}{6dx^3} + \&c.$$

quae aequatio continet relationem, qua summa Zs pendet ab Y, Z & z .

189. Ad hanc aequationem resoluendam negligantur primum termini differentiales, eritque $s = \frac{Zz}{Z-Y}$,

ponatur iste valor $\frac{Zz}{Z-Y} = P^1$, sit que reuera $s = P^1 + p$,
quo

quo valore in aequatione substituto fiet:

$$(Z - Y)p = -\frac{Y dP^1}{dx} + \frac{Y ddP^1}{2 dx^2} - \&c.$$

$$-\frac{Y dp}{dx} + \frac{Y dd p}{2 dx^2} - \&c.$$

addatur vtrunque YP^1 , & cum $P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2 dx^2} - \&c.$

fit valor ipsius P^1 , qui prodit si loco x ponatur $x = 1$,
fit iste valor $= P$, eritque

$$(Z - Y)p + YP^1 = YP - \frac{Y dp}{dx} + \frac{Y dd p}{2 dx^2} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus erit: $p = \frac{Y(P - P^1)}{Z - Y}$.

Ponatur $\frac{Y(P - P^1)}{Z - Y} = Q^1$, fitque $p = Q^1 + q$; fiet

$$(Z - Y)q = -\frac{Y(dQ^1 + dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ^1 + ddq)}{2 dx^2} - \&c.$$

positoque Q pro valore ipsius Q^1 , quem induit si loco x
scribatur $x = 1$, erit:

$$(Z - Y)q + YQ^1 = YQ - \frac{Y dq}{dx} + \frac{Y ddq}{2 dx^2} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus fit $q = \frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y}$.

Ponatur $\frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y} = R^1$, fitque reuera $q = R^1 + r$;

ac simili modo reperitur $r = \frac{Y(R - R^1)}{Z - Y}$; sicque procedendo erit summa quaesita:

$$Zs = Z(P^1 + Q^1 + R^1 + \&c.).$$

190. Proposita ergo serie quacunque:

$Aa + Bb + Cc + \dots + Yy + Zz$
eius summa sequenti modo definietur:

Ponatur posito $x = 1$ loco x

$$\frac{Zz}{Z-Y} = P^1; \text{ abeatque } P^1 \text{ in } P$$

$$\frac{Y(P-P^1)}{Z-Y} = Q^1; \text{ abeatque } Q^1 \text{ in } Q$$

$$\frac{Y(Q-Q^1)}{Z-Y} = R^1; \text{ abeatque } R^1 \text{ in } R$$

$$\frac{Y(R-R^1)}{Z-Y} = S^1; \text{ abeatque } S^1 \text{ in } S$$

&c.

His valoribus inuentis erit summa seriei \equiv

$$ZP^1 + ZQ^1 + ZR^1 + ZS^1 + \&c.$$

+ Constante, quae reddat summam $\equiv 0$, si ponatur $x = 0$, seu quod eodem redit, quae efficiat, vt cuipiam casui satisfiat.

191. Formula haec, quia nullis differentialibus est implicata, in plurimis casibus facillime adhibetur, atque etiam veram summam saepenumero exhibet. Sic si proponatur haec series:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \dots + x^2 p^x$$

fiat $Z = p^x$ & $z = x^2$, erit $Y = p^{x-1}$, atque

$$\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}, \quad \& \quad \frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}. \quad \text{Hinc fiet}$$

$$P^1 =$$

$$P^1 = \frac{px^2}{p-1}; \quad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q^1 = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \quad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R^1 = \frac{2p}{(p-1)^3}; \quad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$S^1 = 0, \quad \text{\& reliqui euanescent omnes:}$$

vnde erit summa \equiv

$$p^x \left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3} \right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$\equiv p^{x+1} \left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3} \right) - \frac{p-1}{(p-1)^3},$$

quemadmodum iam supra inuenimus.

192. Simili modo, quo ad hanc summae expressionem peruenimus, aliam inuenire poterimus expressionem, si series proposita non ex duabus aliis fit composita: quae illis potissimum casibus in usum vocari poterit, cum in praecedente expressione ad denominatores euanescentes peruenitur. Sit igitur proposita haec series:

$$s = a + b + c + d + \dots + z$$

quoniam posito $x-1$ loco x , summa ultimo termino truncatur, erit:

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.$$

$$\text{feu } z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \&c.$$

Sss 2

Quia

Quia hic ipsa summa s non occurrit, negligentur differentialia altiora, fietque $s = \int z dx$, ponatur $\int z dx = P^1$, cuius valor abeat in P si pro x scribatur $x-1$: fitque reuera $s = P^1 + p$; erit:

$$z = \frac{dP^1}{dx} - \frac{ddP^1}{2dx^2} + \&c. + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \&c.$$

$$\text{quia est } P = P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2dx^2} - \&c.$$

$$\text{erit } z - P^1 + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \&c. \text{ unde fit}$$

$$p = \int (z - P^1 + P) dx. \text{ Si porro ponatur } \int (z - P^1 + P) dx = Q^1,$$

hicque valor abeat in Q posito $x-1$ loco x , fit $\int (z - P^1 + P - Q^1 + Q) dx = R^1 = Q^1 - \int (Q^1 - Q) dx$ porro $R^1 - \int (R^1 - R) dx = S^1$; &c. erit summa quaesita:

$$s = P^1 + Q^1 + R^1 + S^1 + \&c. + \text{Const.}$$

qua vni casui satisfiat.

193. Mutatis aliquantum litteris ista summatio huc redit. Proposita serie summanda:

$$s = a^1 + b^2 + c^3 + d^4 + \dots + x^x$$

ponatur posito $x-1$ loco x

$$\int z dx = P \text{ abeatque } P \text{ in } p$$

$$P - \int (P - p) dx = Q \text{ abeatque } Q \text{ in } q$$

$$Q - \int (Q - q) dx = R \text{ abeatque } R \text{ in } r, \&c.$$

quibus valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$s = P + Q + R + S + \&c.$$

hac.

haecque expressio expedite ostendit summam, si formulae istae integrales exhiberi queant. Sit, ut usum eius exemplo illustremus, $z = xx + x$ eritque

$$P = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx; \quad p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}$$

$$P - p = xx - \frac{1}{6} \quad \& \quad f(P - p) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$Q = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x; \quad q = \frac{1}{2}xx - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$$

$$Q - q = x - \frac{1}{3} \quad \& \quad f(Q - q) dx = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x$$

$$R = \frac{1}{2}x; \quad r = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$R - r = \frac{1}{2}; \quad f(R - r) dx = \frac{1}{2}x$$

$S = 0$, reliquique valores evanescent. Quare summa quaesita erit:

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx$$

$$+ \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x = \frac{1}{3}x^3 + xx + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

$$+ \frac{1}{2}x.$$

Hocque ergo modo omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones rationales integrae ipsius x , summae ope integrationum continuarum inueniri possunt. Ex quibus facile perspicitur, quam amplum occupet campum doctrina de summatione serierum, neque omnibus methodis, quae tum habentur tum adhuc excogitari possunt, capiendis plura volumina sufficere.

194. Haecenus summas serierum inuestigauimus a termino primo vsque ad eum cuius index est x , quibus cognitis ponendo $x = \infty$ ipsius seriei in infinitum continuatae summa innotescet. Saepenumero autem hoc expeditius praestatur, si non summa terminorum a primo

vsque ad eum cuius index est x , sed summa omnium terminorum ab isto, cuius index est x , in infinitum vsque quaeratur, hocque casu imprimis, expressiones vltimae sunt tractabiliore. Sit igitur proposita series cuius terminus generalis seu indici x respondens sit $= z$, sequens indici $x+1$ respondens sit $= z^1$, huncque vltra sequentes sint z^{11} , z^{111} , &c. quaeraturque summa huius seriei infinitae:

$$x, x+1, x+2, x+3, \&c.$$

$$s = z + z^1 + z^{11} + z^{111} + \&c. \text{ in infinitum.}$$

Haec igitur summa s erit functio ipsius x , in qua si ponatur $x+1$ loco x , orietur summa prior termino z truncata. Cum ergo hac mutatione s abeat in

$$s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \&c. \text{ erit:}$$

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

$$\text{feu } 0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

195. Si nunc vt ante ratiocinium instituiamus, fiet neglectis differentialibus superioribus, $s = C - \int z dx$. Ponatur ergo $\int z dx = P$, sitque reuera $s = C - P + p$,

$$\begin{aligned} \text{erit } 0 = z - \frac{dP}{dx} - \frac{d^2P}{2dx^2} - \frac{d^3P}{6dx^3} - \&c. \\ + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \&c. \end{aligned}$$

Abe-

Abeat P in P^1 , si loco x ponatur $x+1$, eritque:

$$0 = z + P - P^1 + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \&c.$$

Hinc neglectis differentialibus altioribus fiet:

$$p = f(P^1 - P) dx - P. \text{ Statuatur } f(P^1 - P) dx - P = -Q,$$

fitque $p = -Q + q$, erit:

$$0 = z + P - P^1 - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2dx^2} - \&c. + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \&c.$$

Abeat Q in Q^1 si loco x ponatur $x+1$ eritque

$$0 = z + P - P^1 + Q - Q^1 + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \&c.$$

vnde sequitur $q = f(Q^1 - Q) dx - Q$. Quamobrem si comma cuique quantitati infixum denotet eius valorem, quem induit posito $x+1$ loco x , ponaturque

$$\begin{aligned} f z dx &= P \\ P - f(P^1 - P) dx &= Q \\ Q - f(Q^1 - Q) dx &= R \\ R - f(R^1 - R) dx &= S \quad \&c. \end{aligned}$$

erit seriei propositae $z + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \&c.$ summa $= C - P - Q - R - S - \&c.$ vbi constans C ita debet definiri, vt posito $x = \infty$ tota summa evanescat. Quia autem applicatio huius expressionis integrationes requirit, hoc loco eius ysum declarare non licet.

196. Vt autem formulas integrales euitemus; statuamus summam seriei $= y s$, existente y functione ipsius

fius x quacunque cognita, cuius valores y^1 , y^2 , &c. qui prodeunt ponendo $x+1$, $x+2$, &c. loco x , erunt noti. Si iam ponatur $x+1$ loco x prodibit superior series termino primo mulctata, cuius summa propterea

$$\text{erit } y' \left(s + \frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \&c. \right) = y^1 s - z$$

$$\text{feu } z + \frac{y'ds}{dx} + \frac{y'd^2s}{2dx^2} + \frac{y'd^3s}{6dx^3} + \&c. = (y - y') s$$

vnde neglectis differentialibus oritur $s = \frac{z}{y - y'}$. Sta-

tuatur $\frac{z}{y' - y} = P$, fitque reuera $s = -P + p$, erit:

$$\begin{aligned} & - \frac{y'dP}{dx} - \frac{y'ddP}{2dx^2} - \frac{y'd^3P}{6dx^3} - \&c. \\ & + \frac{y'dp}{dx} + \frac{y'ddp}{2dx^2} + \frac{y'd^3p}{6dx^3} + \&c. \end{aligned} = (y - y') p$$

$$\text{ideoque } \frac{y'dp}{dx} + \frac{y'ddp}{2dx^2} + \frac{y'd^3p}{6dx^3} + \&c. = y'(P' - P) - (y' - y)p.$$

Statuatur $Q = \frac{y'(P' - P)}{y' - y}$, fitque $p = Q + q$; erit:

$$y'(Q' - Q) + y' \left(\frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \&c. \right) = - (y' - y)q.$$

Statuatur $R = \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y}$, fitque $q = -R + r$.

Hocque modo si ulterius progrediamur. Seriei propositae: $z + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \&c.$ summa sequenti modo inuenietur.

Sum-

Sumta pro lubitu functione ipsius x , quae sit $=y$,
statuatur :

$$\begin{aligned} P &= \frac{z}{y' - y} = \frac{z}{\Delta y} \\ Q &= \frac{y'(P' - P)}{y' - y} = \frac{y \Delta P}{\Delta y} + \Delta P \\ R &= \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y} = \frac{y \Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q \\ S &= \frac{y'(R' - R)}{y' - y} = \frac{y \Delta R}{\Delta y} + \Delta R \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Hincque erit summa quaesita :

$$= C - Py + Qy - Ry + Sy - \&c.$$

Sumta pro C eiusmodi constante, ut posito $x = \infty$ summa euanescat.

192. Sumatur $y = a^x$, ob $y' = a^{x+1}$, erit :
 $y' - y = a^x(a - 1)$, unde fiet :

$$\begin{aligned} P &= \frac{z}{a^x(a-1)} ; P' = \frac{z'}{a^{x+1}(a-1)} \\ Q &= \frac{a(P' - P)}{a-1} = \frac{(z' - az)}{a^x(a-1)^2} ; Q' = \frac{(z'' - az')}{a^{x+1}(a-1)^2} \\ R &= \frac{a(Q' - Q)}{a-1} = \frac{z'' - 2az' + aaz}{a^x(a-1)^3} \\ S &= \frac{a(R' - R)}{a-1} = \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{a^x(a-1)^4} \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

T t t

Quo-

Quocirca summa seriei proposita erit:

$$C = \frac{z}{a-1} + \frac{z' - az}{(a-1)^2} + \frac{z'' + 2az' - a^2z}{(a-1)^3} \\ + \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{(a-1)^4}$$

&c.

Haec vero eadem summae expressio iam supra est inventa Capite primo. Hinc autem aliis pro y valoribus accipiendis infinitae aliae expressiones erui poterunt; unde ea, quae cuique casui maxime fit accommodata, eligi potest.



CAPUT VIII.
*DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN FORMANDIS
SERIEBUS.*

198.

Vnum adhuc calculi differentialis vsum in doctrina serierum commemorabimus, qui in ipsa formatione serierum consistit, & ad quem iam supra prouocauimus, cum quaestio esset de fractione, cuius denominator sit potestas quaecunque functionis cuiuspiam, in seriem euoluenda. Ista methodus autem similis est ei, quam iam aliquoties sumus vfi, dum functio in seriem convertenda aequalis fingitur cuiuspiam seriei, in singulis terminis coefficientes indeterminatos habenti, qui deinceps aequalitate constituta determinantur. Haec autem determinatio saepe numero mirifice adiuuatur, si antequam ea suscipiatur ad differentialia cum prima, tum nonnunquam quoque ad secunda aequatio perducatur. Quae methodus cum in calculo integrali amplissimi sit vsus, eam hic diligentius exponemus.

199. Primum igitur breuiter repetamus, quae supra de euolutione fractionum in series sine calculi differentialis subsidio attulimus. Sit fractio quaecunque proposita:

T t t 2

A +

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{a + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.} = s.$$

quam in seriem secundum potestates ipsius x procedentem conuerti oporteat. Fingatur pro s series indeterminata :

$$s = \mathcal{A} + \mathcal{B}x + \mathcal{C}x^2 + \mathcal{D}x^3 + \mathcal{E}x^4 + \mathcal{F}x^5 + \mathcal{G}x^6 + \&c.$$

Cum igitur fractione per multiplicationem sublata sit :

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \&c. = s(a + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \&c.)$$

si pro s series ficta substituatur prodibit sequens aequatio :

$$\begin{aligned} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c. = \\ \mathcal{A}a + \mathcal{B}ax + \mathcal{C}ax^2 + \mathcal{D}ax^3 + \mathcal{E}ax^4 + \mathcal{F}ax^5 + \&c. \\ + \mathcal{A}\mathcal{E} + \mathcal{B}\mathcal{E} + \mathcal{C}\mathcal{E} + \mathcal{D}\mathcal{E} + \mathcal{E}\mathcal{E} + \&c. \\ + \mathcal{A}\gamma + \mathcal{B}\gamma + \mathcal{C}\gamma + \mathcal{D}\gamma + \&c. \\ + \mathcal{A}\delta + \mathcal{B}\delta + \mathcal{C}\delta + \&c. \\ + \mathcal{A}\varepsilon + \mathcal{B}\varepsilon + \&c. \\ + \mathcal{A}\zeta + \&c. \end{aligned}$$

Aequalitate ergo inter singulos terminos, qui easdem ipsius x potestates continent, constituta fiet :

$$\mathcal{A}a - A = 0$$

$$\mathcal{B}a + \mathcal{A}\mathcal{E} - B = 0$$

$$\mathcal{C}a + \mathcal{B}\mathcal{E} + \mathcal{A}\gamma - C = 0$$

$$\mathcal{D}a + \mathcal{C}\mathcal{E} + \mathcal{B}\gamma + \mathcal{A}\delta - D = 0$$

$$\mathcal{E}a + \mathcal{D}\mathcal{E} + \mathcal{C}\gamma + \mathcal{B}\delta + \mathcal{A}\varepsilon - E = 0 \quad \&c.$$

ex

ex quibus aequationibus coefficientes ficti $A, B, C, D, \&c.$ determinantur, sicque series infinita inuenitur:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

fractioni propositae s aequalis. Atque in hac forma si tam numerator quam denominator fractionis s finito terminorum numero constent, omnes series recurrentes comprehenduntur, de quibus iam supra fusius est tractatum.

200. Quodsi autem vel numerator vel denominator vel uterque ad dignitatem quamcunque fuerit eleuatus, tum hoc modo series difficulter obtinetur; propterea quod negotium, nisi functio eleuata sit binomium, perquam fit laboriosum. Calculo autem differentiali iste labor euitari potest. Adsit primum solus numerator, fitque:

$$s = (A + Bx + Cxx)^n,$$

vnde quaeratur series secundum potestates ipsius x procedens huic trinomiali dignitati aequalis; quam quidem finitam fore constat, si exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus. Fingatur iterum pro s series indefinita:

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \&c.$$

cuius terminum primum A constat esse $= A^n$: si enim ponatur $x = 0$, ex priori forma proposita fit $s = A^n$, ex serie autem ficta $s = A$. Haec autem primi termini determinatio ex ipsa rei natura est petenda, si ad differentialia descendere velimus, quia hinc primus terminus non determinatur, vti mox patebit.

201. Cum fit $s = (A + Bx + Cx^2)^n$, erit logarithmis sumendis: $ls = n l (A + Bx + Cx^2)$, hincque sumtis differentialibus habebitur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{n B dx + 2n C x dx}{A + Bx + Cx^2}, \quad \text{feu}$$

$$(A + Bx + Cx^2) \frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx).$$

Ex serie autem ficta est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

si igitur haec series loco $\frac{ds}{dx}$, & pro s ipsa series ficta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$\begin{array}{r} A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x + 3A\mathfrak{D}x^2 + 4A\mathfrak{E}x^3 + 5A\mathfrak{F}x^4 + \&c. \\ + B\mathfrak{B} + 2B\mathfrak{C} + 3B\mathfrak{D} + 4B\mathfrak{E} + \&c. \\ + C\mathfrak{B} + 2C\mathfrak{C} + 3C\mathfrak{D} + \&c. \\ \hline nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} + nB\mathfrak{C} + nB\mathfrak{D} + nB\mathfrak{E} + \&c. \\ + 2nC\mathfrak{A} + 2nC\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{C} + 2nC\mathfrak{D} + \&c. \end{array}$$

Aequalitate ergo hic inter terminos eiusdem ipsius x potestatis constituta erit:

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nCA}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$$\mathfrak{E} =$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C}}{4A}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{(n-4)B\mathfrak{C} + (2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}$$

&c.

Cum igitur ut ante vidimus sit $\mathfrak{A} = A^n$, erit $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, hincque reliqui coefficientes omnes successive determinabuntur. Lex autem, quam ipsi sequuntur facillime ex his formulis patet, quae vehementer obscura mansisset, si trinomium actu eleuare voluissemus.

202. Haec eadem methodus succedit, si polynomium quodcunque ad quampiam dignitatem eleuari debeat. Sit

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)^n$$

figaturque:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

erit $\mathfrak{A} = A^n$, qui valor colligitur, si ponatur $x = 0$. Sumtis iam ut ante logarithmis, eorumque differentialibus reperietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx + 3nDx^2dx + 4nEx^3dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.}$$

$$\text{seu } (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.) \frac{ds}{dx} = s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \&c.)$$

Cum

Cum igitur sit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

Erit his seriebus pro s & $\frac{ds}{dx}$ substitutis:

$$\begin{aligned} & A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x + 3A\mathfrak{D}x^2 + 4A\mathfrak{E}x^3 + 5A\mathfrak{F}x^4 + \&c. \\ & + B\mathfrak{B} + 2B\mathfrak{C} + 3B\mathfrak{D} + 4B\mathfrak{E} + \&c. \\ & + C\mathfrak{B} + 2C\mathfrak{C} + 3C\mathfrak{D} + \&c. \\ & + D\mathfrak{B} + 2D\mathfrak{C} + \&c. \\ & + E\mathfrak{B} + \&c. = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} + nB\mathfrak{C} + nB\mathfrak{D} + nB\mathfrak{E} + \&c. \\ & + 2nC\mathfrak{A} + 2nC\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{C} + 2nC\mathfrak{D} + \&c. \\ & + 3nD\mathfrak{A} + 3nD\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{C} + \&c. \\ & + 4nE\mathfrak{A} + 4nE\mathfrak{B} + \&c. \\ & + 5nF\mathfrak{A} + \&c. \end{aligned}$$

Vnde deriuantur sequentes determinaciones:

$$\begin{aligned} A\mathfrak{B} &= nB\mathfrak{A} \\ 2A\mathfrak{C} &= (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A} \\ 3A\mathfrak{D} &= (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A} \\ 4A\mathfrak{E} &= (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A} \\ 5A\mathfrak{F} &= (n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D} + (3n-2)C\mathfrak{C} + (4n-1)E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A} \\ &\&c. \end{aligned}$$

vnde quemadmodum coefficientes ficti \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , &c.
a se inuicem pendeant, hincque determinentur, cum sit
 $\mathfrak{A} = A^n$, luculentissime apparet.

203. Quoniam, si quantitas $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$ ex finito terminorum numero constat, numerusque n fuerit integer affirmatiuus, quaecunque potestas finito etiam terminorum numero constare debet: manifestum est hoc casu, formulas modo inuentas tandem euanesce-
re debere, atque cum omnes termini adesse debeant, ut primum vnus euanuerit, simul omnes sequentes euanes-
cere debere. Ponamus formulam propositam $A+Bx+Cx^2$ esse trinomium, eiusque cubum quaeri, ut sit $n=3$, erit

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= A^3 \text{ ideoque ; } \mathfrak{A} = A^3 \\ A\mathfrak{B} &= 3B\mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{B} = 3A^2B \\ 2A\mathfrak{C} &= 2B\mathfrak{B} + 6C\mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C \\ 3A\mathfrak{D} &= 1B\mathfrak{C} + 5C\mathfrak{B} \quad ; \quad \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC \\ 4A\mathfrak{E} &= 0 + 4C\mathfrak{C} \quad ; \quad \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2 \\ 5A\mathfrak{F} &= -B\mathfrak{E} + 3C\mathfrak{D} \quad ; \quad \mathfrak{F} = 3BC^2 \\ 6A\mathfrak{G} &= -2B\mathfrak{F} + 2C\mathfrak{E} \quad ; \quad \mathfrak{G} = C^3 \\ 7A\mathfrak{H} &= -3B\mathfrak{G} + 1C\mathfrak{F} \quad ; \quad \mathfrak{H} = 0 \\ 8A\mathfrak{I} &= -4B\mathfrak{H} + 0 \quad ; \quad \mathfrak{I} = 0. \end{aligned}$$

Quoniam igitur iam bini sunt $= 0$, sequentiumque qui-
libet a duobus praecedentibus pendet, patet, omnes se-
quentes pariter euanescere debere. Hancque ob causam
lex, qua hi coefficientes a se inuicem pendere sunt in-
uenti, eo magis est notatu digna.

204. Si n fuerit numerus negatiuus, ita ut s aequale
fiat fractioni, series in infinitum excurrer. Sit igitur

V v v

s =

$$s = \frac{1}{(a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.)^n}$$

figatur pro eius valore haec series:

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

Atque si in superioribus formulis pro litteris A, B, C, D, &c. ponantur $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ simulque fiat n negativum, sequentes determinaciones coefficientium A, B, C, D, &c. prodibunt:

$$A = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$aB + n\epsilon A = 0$$

$$2aC + (n+1)\epsilon B + 2n\gamma A = 0$$

$$3aD + (n+2)\epsilon C + (2n+1)\gamma B + 3n\delta A = 0$$

$$4aE + (n+3)\epsilon D + (2n+2)\gamma C + (3n+1)\delta B + 4n\epsilon A = 0$$

$$5aF + (n+4)\epsilon E + (2n+3)\gamma D + (3n+2)\delta C + (4n+1)\epsilon B + 5n\zeta A = 0$$

&c.

Quae formulae eandem continent legem horum coefficientium numerorum, quam iam supra observauimus in introductione; cuiusque adeo veritatem nunc demum rigide demonstrare licuit.

205. Haec ita se habent, si numerator fractionis fuerit vnitas, vel etiam quaequam ipsius x potestas, puta x^m ; posteriori enim casu tantum oportebit seriem priori inuentam $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ multiplicare per x^m . At si numerator constet ex duobus pluribusue terminis, tum supra quidem legem progressio-

nis non obseruauimus, quamobrem eam hic per differentiationem inuestigemus. Sit igitur;

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{(a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque pro valore huius fractionis sequens series:

$$s = \mathcal{A} + \mathcal{B}x + \mathcal{C}x^2 + \mathcal{D}x^3 + \mathcal{E}x^4 + \mathcal{F}x^5 + \&c.$$

cuius primus terminus \mathcal{A} ut definiatur, ponatur $x = 0$, eritque ex priori expressione $s = \frac{A}{a^n}$, ex ficta vero $s = \mathcal{A}$,

vnde necesse est, ut sit $\mathcal{A} = \frac{A}{a^n}$. Quo termino determinato reliqui per differentiationem innotescunt.

206. Sumtis logarithmis erit:

$$ls = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.) \\ = nl(a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.)$$

hincque differentiando orietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cdx + 3Dx^2dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.} \\ = \frac{n\epsilon dx + 2n\gamma x dx + 3n\delta x^2 dx + \&c.}{a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.}$$

Sublatisque per multiplicationem fractionibus erit:

$$\left(\begin{array}{l} Aa + A\epsilon x + A\gamma x^2 + A\delta x^3 + \&c. \\ + Ba + B\epsilon + By + \&c. \\ + Ca + C\epsilon + \&c. \\ + Da + \&c. \end{array} \right) \frac{ds}{dx} =$$

$$\left(\begin{array}{l} Ba + B\epsilon x + B\gamma x^2 + B\delta x^3 + B\epsilon x^4 + \&c. \\ + 2Ca + 2C\epsilon + 2C\gamma + 2C\delta + \&c. \\ + 3Da + 3D\epsilon + 3D\gamma + \&c. \\ + 4Ea + 4E\epsilon + \&c. \\ + 5Fa + \&c. \end{array} \right) s$$

$$- \left(\begin{array}{l} A\epsilon + 2A\gamma x + 3A\delta x^2 + 4A\epsilon x^3 + 5A\zeta x^4 + \&c. \\ + B\epsilon + 2B\gamma + 3B\delta + 4B\epsilon + \&c. \\ + C\epsilon + 2C\gamma + 3C\delta + \&c. \\ + D\epsilon + 2D\gamma + \&c. \\ + E\epsilon + \&c. \end{array} \right) ns.$$

Cum nunc sit $\frac{ds}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c.$

erit factis substitutionibus:

$$AaB + nA\epsilon A - BaA = 0$$

$$2AaC + (n+1)A\epsilon B + 2nA\gamma A + (n-1)B\epsilon A - 2CaA = 0$$

$$3AaD + (n+2)A\epsilon C + (2n+1)A\gamma B + 3nA\delta A + BaC + nB\epsilon B + (2n-1)B\gamma A - CaB + (n-2)C\epsilon A - 3DaA = 0$$

$$4AaE + (n+3)A\epsilon D + (2n+2)A\gamma C + (3n+1)A\delta B + 4nA\epsilon A + 2BaD + (n+1)B\epsilon C + 2nB\gamma B + (3n-1)B\delta A + CaC + (n-1)C\epsilon B + (2n-2)C\gamma A - 2DaB + (n-3)D\epsilon A - 4EaA = 0$$

Hinc

Hinc lex, qua istae formulae progrediuntur, facile perspicitur: prima enim cuiusque aequationis linea eandem sequitur legem, quam §. 284. habuimus. Tum vero coefficientes secundarum linearum oriuntur, si a coefficientibus superioribus subtrahatur $n+1$; similique modo ex linea secunda formatur linea tertia & sequentes, a coefficientibus superioribus continuo subtrahendo $n+1$; ipsae autem litterae quovis terminum componentes per solam inspectionem facillime formantur.

207. Sin autem quoque numerator fractionis fuerit quaequam potestas: scilicet

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^m}{(\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.)^n}$$

figaturque $s = \mathcal{A} + \mathcal{B}x + \mathcal{C}x^2 + \mathcal{D}x^3 + \mathcal{E}x^4 + \&c.$

erit $\mathcal{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$; reliqui vero coefficientes ex sequentibus formulis determinabuntur:

$$\left. \begin{array}{l} A\alpha\mathcal{B} + nA\epsilon\mathcal{A} \\ - mB\alpha\mathcal{A} \end{array} \right\} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A\alpha\mathcal{C} + (n+1)A\epsilon\mathcal{B} + 2nA\gamma\mathcal{A} \\ - (m-1)B\alpha\mathcal{B} + (n-m)B\epsilon\mathcal{A} \\ - 2mC\alpha\mathcal{A} \end{array} \right\} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 3A\alpha\mathcal{D} + (n+2)A\epsilon\mathcal{C} + (2n+1)A\gamma\mathcal{B} + 3nA\delta\mathcal{A} \\ - (m-2)B\alpha\mathcal{C} + (n-m+1)B\epsilon\mathcal{B} + (2n-m)B\gamma\mathcal{A} \\ - (2m-1)C\alpha\mathcal{B} + (n-2m)C\epsilon\mathcal{A} \\ - 3mD\alpha\mathcal{A} \end{array} \right\} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4A\alpha\mathcal{E} + (n+3)A\epsilon\mathcal{D} + (2n+2)A\gamma\mathcal{C} + (3n+1)A\delta\mathcal{B} + 4nA\epsilon\mathcal{A} \\ - (m-3)B\alpha\mathcal{D} + (n-m+2)B\epsilon\mathcal{C} + (2n-m+1)B\gamma\mathcal{B} + (3n-m)B\delta\mathcal{A} \\ - (2m-2)C\alpha\mathcal{C} + (n-2m+1)C\epsilon\mathcal{B} + (2n-2m)C\gamma\mathcal{A} \\ - (3m-1)D\alpha\mathcal{B} + (n-3m)D\epsilon\mathcal{A} \\ \&c. \quad - 4mE\alpha\mathcal{A} \end{array} \right\} \text{Lex}$$

Lex, qua istae formulae ulterius continuantur, ex inspectione facilius apparet, quam verbis describi queat. Descendendo autem coefficientes diminuuntur differentia $n+m$; horizontaliter autem progrediendo augentur continuo differentia $n-1$.

208. Hoc igitur modo doctrina de seriebus recurrentibus amplificatur, dum istum defectum suppleuimus, atque legem coefficientium definiuimus, si non solum denominator fractionis fuerit potestas quaecunque, sed etiam numerator ex quolibet terminis constet, ad quam legem detegendam sola inductio non sufficebat. Praeter plurimos autem usus serierum recurrentium, quos iam exposuimus, maximam quoque afferunt utilitatem ad summas quarumvis serierum proxime inueniendas: cuius specimen iam in Capite primo huius sectionis exhibuimus, dum seriem substitutione $x = \frac{y}{1+ny}$ in aliam transmutauimus, quae saepenumero terminorum numero finito constet. Eaque methodus ulterius extendi potuisset, si pro x aliae functiones substitutae fuissent. Quoniam vero tum lex progressionis serierum, quae loco potestatum ipsius x poni deberent, non satis luculenter constabat, in hunc locum istam amplificationem referuare visum est; cum memorata lex iam penitus esset detecta. Interim tamen re diligentius perpensa compertimus idem negotium sine hac progressionis lege expediri posse, in subsidium tantum vocando methodum, qua hic ad hanc ipsam legem inuestigandam sumus vsi.

209. Sit igitur proposita series quaecunque

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

quam in aliam transformari oporteat, cuius termini singuli sint fractiones, quarum denominatores secundum potestates formulae huiusmodi $a + \xi x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.$ procedant. Quo igitur a simplicioribus incipiamus, ponamus esse:

$$s = \frac{A}{a + \xi x} + \frac{Bx}{(a + \xi x)^2} + \frac{Cx^2}{(a + \xi x)^3} + \frac{Dx^3}{(a + \xi x)^4} + \&c.$$

aequalitate illius fere cum hac expressione constituta, multiplicetur ubique per $a + \xi x$, fietque:

$$Aa + Bax + Cax^2 + Dax^3 + \&c. = A + \frac{Bx}{a + \xi x} + \frac{Cx^2}{(a + \xi x)^2} + \&c.$$

statuatur $A = Aa$; fiatque:

$$\begin{aligned} A\xi + Ba &= A^1 \\ B\xi + Ca &= B^1 \\ C\xi + Da &= C^1 \\ D\xi + Ea &= D^1 \quad \&c. \end{aligned}$$

erit diuisione per x instituta:

$$A^1 + B^1x + C^1x^2 + D^1x^3 + \&c. = \frac{B}{a + \xi x} + \frac{Cx}{(a + \xi x)^2} + \frac{Dx^2}{(a + \xi x)^3} + \&c.$$

Multiplicetur denuo per $a + \xi x$, positoque

$$\begin{aligned} A^1\xi + B^1a &= A^1 \\ B^1\xi + C^1a &= B^1 \\ C^1\xi + D^1a &= C^1 \quad \&c. \end{aligned} \quad \text{fiet}$$

$$A^1a + A^1x + B^1x^2 + C^1x^3 + \&c. = B + \frac{Cx}{a + \xi x} + \frac{Dx^2}{(a + \xi x)^2} + \&c.$$

Sit

Sit igitur $\mathfrak{B} = A^1 a$; atque operationem ut ante instituendo, si fiat:

$$\begin{array}{l|l} A^1 \xi + B^1 a = A^2 & A^2 \xi + B^2 a = A^3 \\ B^1 \xi + C^1 a = B^2 & B^2 \xi + C^2 a = B^3 \\ C^1 \xi + D^1 a = C^2 & C^2 \xi + D^2 a = C^3 \\ & \&c. \end{array}$$

erit $\mathfrak{C} = A^2 a$; $\mathfrak{D} = A^3 a$; $\mathfrak{E} = A^4 a$; &c.

unde summa seriei propositae hoc modo exprimetur, ut sit:

$$s = \frac{Aa}{a+\xi x} + \frac{A^1 a x}{(a+\xi x)^2} + \frac{A^2 a x^2}{(a+\xi x)^3} + \frac{A^3 a x^3}{(a+\xi x)^4} + \&c.$$

Quae eadem series orta fuisset ex substitutione $\frac{x}{a+\xi x} = y$

$$\text{seu } x = \frac{ay}{1-\xi y}.$$

210. Haec transformatio optimo cum successu adhibetur, si series proposita $A+Bx+Cx^2+\&c.$ ita fuerit comparata, ut tandem confundatur cum serie recurrente seu potius geometrica ex fractione $\frac{P}{a+\xi x}$ orta. Tum enim valores $A^1, B^1, C^1, D^1, \&c.$ tandem evanescent; hincque multo magis litterae $A^2, A^3, A^4, \&c.$ constituent seriem maxime convergentem. Poterimus autem simili modo denominatores trinomiales & polynomiales quoscunque adhibere, qui usum habebunt eximium, si series proposita tandem cum recurrente confundatur. Proposita ergo serie:

$$s = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$$

ita-

$$\text{statuatur } s = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}x}{\alpha + \xi x + \gamma x^2} + \frac{\mathcal{A}^1 x^2 + \mathcal{B}^1 x^3}{(\alpha + \xi x + \gamma x^2)^2} + \\ \frac{\mathcal{A}^2 x^4 + \mathcal{B}^2 x^5}{(\alpha + \xi x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathcal{A}^3 x^6 + \mathcal{B}^3 x^7}{(\alpha + \xi x + \gamma x^2)^4} + \&c.$$

Multiplicetur ubique per $\alpha + \xi x + \gamma x^2$, positoque

$$\begin{aligned} A\gamma + B\xi + Ca &= A^1 & \mathcal{A} &= A\alpha \\ B\gamma + C\xi + Da &= B^1 & \& & \mathcal{B} &= A\xi + B\alpha \\ C\gamma + D\xi + Ea &= C^1 & & & & \\ & & & & & \&c. \end{aligned}$$

orietur aequatio priori similis, diuisione per xx instituta:

$$\begin{aligned} A^1 + B^1 x + C^1 x^2 + D^1 x^3 + E^1 x^4 + \&c. &= \\ \frac{\mathcal{A}^1 + \mathcal{B}^1 x}{\alpha + \xi x + \gamma xx} + \frac{\mathcal{A}^2 x^2 + \mathcal{B}^2 x^3}{(\alpha + \xi x + \gamma xx)^2} + \frac{\mathcal{A}^3 x^4 + \mathcal{B}^3 x^5}{(\alpha + \xi x + \gamma xx)^3} + \&c. \end{aligned}$$

Si igitur ut ante operatio instituaturs faciendo

$$\begin{aligned} A^1 \gamma + B^1 \xi + C^1 \alpha &= A^2 & \mathcal{A}^1 &= A^1 \alpha \\ B^1 \gamma + C^1 \xi + D^1 \alpha &= B^2 & \mathcal{B}^1 &= A^1 \xi + B^1 \alpha \\ C^1 \gamma + D^1 \xi + E^1 \alpha &= C^2 & & \\ & & & \&c. \end{aligned} \quad \text{porroque:}$$

$$\begin{aligned} A^2 \gamma + B^2 \xi + C^2 \alpha &= A^3 & \mathcal{A}^2 &= A^2 \alpha \\ B^2 \gamma + C^2 \xi + D^2 \alpha &= B^3 & \mathcal{B}^2 &= A^2 \xi + B^2 \alpha \\ C^2 \gamma + D^2 \xi + E^2 \alpha &= C^3 & & \\ & & & \&c. \end{aligned}$$

sicque vltcrius valores similes inuestigando erit:

$$\begin{aligned} s &= \\ \frac{A\alpha + (A\xi + B\alpha)x}{\alpha + \xi x + \gamma xx} + \frac{(A^1 \alpha + (A^1 \xi + B^1 \alpha)x)x^2}{(\alpha + \xi x + \gamma xx)^2} + \frac{(A^2 \alpha + (A^2 \xi + B^2 \alpha)x)x^4}{(\alpha + \xi x + \gamma xx)^3} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

X x x

211.

211. Si ponatur $x = 1$, qua positione amplitudini nihil decedit, cum a, ϵ, γ pro lubitu accipi possint, fueritque

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Cum putentur successiue sequentes valores:

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\epsilon + Ca = A' & A'\gamma + B'\epsilon + C'a = A'' \\ B\gamma + C\epsilon + Da = B' & B'\gamma + C'\epsilon + D'a = B'' \text{ ficque} \\ C\gamma + D\epsilon + Ea = C' & C'\gamma + D'\epsilon + E'a = C'' \text{ porro} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

insuper vero brevitatis ergo ponatur:

$$a + \epsilon + \gamma = m$$

obtinebitur summa seriei propositae hoc modo expressa

$$s = (a + \epsilon) \left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c. \right) \\ + a \left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c. \right)$$

212. Eodem modo denominatores ex pluribus terminis constantes accipi possunt; & quoniam operatio ex praecedentibus facile perspicitur, hic tantum casum pro quadrinomio euoluamus: Sit ergo

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Quaerantur valores sequentes:

$$A\delta + B\gamma + C\epsilon + Da = A'$$

$$B\delta + C\gamma + D\epsilon + Ea = B'$$

$$C\delta + D\gamma + E\epsilon + Fa = C'$$

&c.

A'\delta

$$A'\delta + B'\gamma + C'\epsilon + D'\alpha = A''$$

$$B'\delta + C'\gamma + D'\epsilon + E'\alpha = B''$$

$$C'\delta + D'\gamma + E'\epsilon + F'\alpha = C''$$

&c.

$$A''\delta + B''\gamma + C''\epsilon + D''\alpha = A'''$$

$$B''\delta + C''\gamma + D''\epsilon + E''\alpha = B'''$$

$$C''\delta + D''\gamma + E''\epsilon + F''\alpha = C'''$$

&c.

Tum vero fit $\alpha + \epsilon + \gamma + \delta = m$; eritque

$$(\alpha + \epsilon + \gamma) \left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c. \right)$$

$$s = (\alpha + \epsilon) \left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c. \right)$$

$$+ \alpha \left(\frac{C}{m} + \frac{C'}{m^2} + \frac{C''}{m^3} + \frac{C'''}{m^4} + \&c. \right)$$

vnde simul progressio, si adhuc plures partes denominatori m tribuantur, clarissime perspicitur.

213. Neque vero absolute opus est, ut denominatores fractionum, ad quas summam seriei reducimus, sint potestates eiusdem formulae $\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \&c.$ sed haec ipsa in singulis terminis variari potest. Quo hoc clarius pateat, sumamus primo tantum duos terminos, fingaturque series

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

in hanc seriem fractionum conuerti:

$$X \times X \ 2 \qquad \qquad \qquad s =$$

$$s = \frac{\mathcal{A}}{a + \mathcal{E}x} + \frac{\mathcal{A}'x}{(a + \mathcal{E}x)(a' + \mathcal{E}'x)} + \frac{\mathcal{A}''x^2}{(a + \mathcal{E}x)(a' + \mathcal{E}'x)(a'' + \mathcal{E}''x)} + \&c.$$

Multiplicetur primum vtrunque per $a + \mathcal{E}x$, ponaturque

$$A\mathcal{E} + B\alpha = A'$$

$$B\mathcal{E} + C\alpha = B' \quad \& \quad \mathcal{A} = A\alpha$$

$$C\mathcal{E} + D\alpha = C'$$

&c.

fietque per x diuiso

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \&c. = \frac{\mathcal{A}'}{a' + \mathcal{E}'x} + \frac{\mathcal{A}''x}{(a' + \mathcal{E}'x)(a'' + \mathcal{E}''x)} + \&c.$$

Deinde simili modo multiplicando per $a' + \mathcal{E}'x$; tumque per $a'' + \mathcal{E}''x$, & ita porro, si statuatur:

$$A'\mathcal{E} + B'\alpha' = A'' \quad A''\mathcal{E}'' + B''\alpha'' = A''' \quad A'''\mathcal{E}''' + B'''\alpha''' = A''''$$

$$B'\mathcal{E}' + C'\alpha' = B'' \quad B''\mathcal{E}'' + C''\alpha'' = B''' \quad B'''\mathcal{E}''' + C'''\alpha''' = B''''$$

$$C'\mathcal{E}' + D'\alpha' = C'' \quad C''\mathcal{E}'' + D''\alpha'' = C''' \quad C'''\mathcal{E}''' + D'''\alpha''' = C''''$$

&c.

&c.

&c.

fiet $\mathcal{A}' = A'\alpha'$; $\mathcal{A}'' = A''\alpha''$; $\mathcal{A}''' = A'''\alpha'''$; &c.

atque hinc series proposita conuertetur in hanc:

$$s = \frac{A\alpha}{a + \mathcal{E}x} + \frac{A'\alpha'x}{(a + \mathcal{E}x)(a' + \mathcal{E}'x)} + \frac{A''\alpha''x^2}{(a + \mathcal{E}x)(a' + \mathcal{E}'x)(a'' + \mathcal{E}''x)} + \&c.$$

vbi valores α , \mathcal{E} , α' , \mathcal{E}' , α'' , \mathcal{E}'' , α''' , \mathcal{E}''' , &c. sunt arbitrarii; quouis autem casu ita accipi possunt, vt ista noua series maxime conuergat.

214. Applicemus hoc quoque ad factores trinomiales, sitque proposita serie quacunque:

$s =$

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\epsilon + C\alpha = A' & A'\gamma' + B'\epsilon' + C'\alpha' = A'' \\ B\gamma + C\epsilon + D\alpha = B' & B'\gamma' + C'\epsilon' + D'\alpha' = B'' \\ C\gamma + D\epsilon + E\alpha = C' & C'\gamma' + D'\epsilon' + E'\alpha' = C'' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A''\gamma'' + B''\epsilon'' + C''\alpha'' = A''' & A'''\gamma''' + B'''\epsilon''' + C'''\alpha''' = A'''' \\ B''\gamma'' + C''\epsilon'' + D''\alpha'' = B''' & B'''\gamma''' + C'''\epsilon''' + D'''\alpha''' = B'''' \\ C''\gamma'' + D''\epsilon'' + E''\alpha'' = C''' & C'''\gamma''' + D'''\epsilon''' + E'''\alpha''' = C'''' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Deinde statuatur breuitatis gratia :

$$\begin{array}{l} \alpha + \epsilon + \gamma = m \\ \alpha' + \epsilon' + \gamma' = m' \\ \alpha'' + \epsilon'' + \gamma'' = m'' \\ \alpha''' + \epsilon''' + \gamma''' = m''' \\ \&c. \end{array}$$

eritque seriei propositae summa :

$$\begin{aligned} s = & \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{m m'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{m m' m''} + \frac{\alpha'''(A''' + B''')}{m m' m'' m'''} + \&c. \\ & + \frac{\epsilon A}{m} + \frac{\epsilon' A'}{m m'} + \frac{\epsilon'' A''}{m m' m''} + \frac{\epsilon''' A'''}{m m' m'' m'''} + \&c. \end{aligned}$$

215. Quoniam haec tam late patent, ut vsus minus clare percipi possit, restringamus transformationem §. 213. traditam, sitque $x = -1$, ut habeatur haec series :

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \&c.$$

statuaturque :

Xxx 3

B-

$$\begin{array}{cccc}
 B-A=A' & B'-2A'=A'' & B''-3A''=A''' & B'''-4A'''=A'''' \\
 C-B=B' & C'-2B'=B'' & C''-3B''=B''' & C'''-4B'''=B'''' \\
 D-C=C' & D'-2C'=C'' & D''-3C''=C''' & D'''-4C'''=C'''' \\
 E-D=D' & E'-2D'=D'' & E''-3D''=D''' & E'''-4D'''=D'''' \\
 \&c. & \&c. & \&c. & \&c.
 \end{array}$$

Quibus valoribus inuentis, erit summa seriei propositae aequalis sequenti seriei:

$$s = \frac{A}{2} + \frac{A'}{2 \cdot 3} + \frac{A''}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A'''}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A''''}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

Simili igitur modo series quaecunque proposita in innumerabiles alias sibi aequales transmutari potest, inter quas sine dubio series maxime conuergentes reperientur, quarum ope summa proposita verò proxime indagari queat.

216. Reuertamur autem ad inuentionem serierum, quarum progressionis legem calculus differentialis declarat. Cum igitur hoc in quantitativis algebraicis iam sit praestitum, progrediamur ad transcendentis, quaeraturque series huic logarithmo aequalis:

$$s = l(1 + ax + Ex^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.)$$

figatur quaesito satisfacere haec series:

$$s = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \&c.$$

Cum igitur ex illius aequationis differentiatione sequatur

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a + 2Ex + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \&c.}{1 + ax + Ex^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.}$$

erit:

$$(1 + ax + Ex^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \&c.) \frac{ds}{dx} = a + 2Ex + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + \&c.$$

Quia

Quia vero ex ficta aequatione est :

$$\frac{ds}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c.$$

facta hac substitutione oritur haec aequatio :

$$\begin{aligned} &A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c. \\ &+ Aa + 2Ba + 3Ca + 4Da + \&c. \\ &+ A\epsilon + 2B\epsilon + 3C\epsilon + \&c. \\ &+ A\gamma + 2B\gamma + \&c. \\ &+ Ad + \&c. = \end{aligned}$$

$$a + 2\epsilon x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \&c.$$

Ex qua sequentes determinaciones obtinentur :

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= -\frac{1}{2}Aa + \epsilon \\ C &= -\frac{2}{3}Ba - \frac{1}{3}B\epsilon - \frac{1}{3}A\epsilon + \gamma \\ D &= -\frac{2}{4}Ca - \frac{2}{4}B\epsilon - \frac{1}{4}A\gamma + \delta \\ E &= -\frac{2}{5}Da - \frac{2}{5}C\epsilon - \frac{2}{5}B\gamma - \frac{1}{5}Ad + \epsilon \\ &\&c. \end{aligned}$$

217. Proposita nunc sit quantitas exponentialis :

$$ax + \epsilon x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.$$

$$s = e$$

in qua e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, atque fingatur series quaesita :

$$s = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.$$

iam enim ex casu $x = 0$ patet, primum terminum esse debere unitatem. Cum igitur sumendis logarithmis sit

$$ls =$$

$$ls = ax + bx^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \&c.$$

erit differentialibus sumtis :

$$\frac{ds}{dx} = s(a + 2bx + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \&c.)$$

At vero ex aequatione ficta erit :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c. = \\ &\quad a + Aax + Bax^2 + Cax^3 + Dax^4 + \&c. \\ &\quad + 2b + 2Ab + 2Bb + 2Cb + \&c. \\ &\quad + 3\gamma + 3A\gamma + 3B\gamma + \&c. \\ &\quad + 4\delta + 4A\delta + \&c. \\ &\quad + 5\epsilon + \&c. \end{aligned}$$

ex quibus sequentes prodeunt litterarum A, B, C, D, &c. determinationes :

$$A = a$$

$$B = b + \frac{1}{2}Aa$$

$$C = \gamma + \frac{2}{3}Ab + \frac{1}{3}Ba$$

$$D = \delta + \frac{3}{4}A\gamma + \frac{2}{4}Bb + \frac{1}{4}Ca$$

$$E = \epsilon + \frac{4}{5}A\delta + \frac{3}{5}B\gamma + \frac{2}{5}Cb + \frac{1}{5}Da \quad \&c.$$

218. Si quoque arcus, cuius sinus vel cosinus quaeritur, exprimatur binomio vel polynomio, vel etiam serie infinita, hoc modo quoque eius sinus & cosinus per seriem infinitam exprimi possunt. At vero quo hoc commodissime fiat, non sufficit ad differentialia prima processisse, sed opus est, ut differentialia secundi gradus in subsidium vocemus. Sit igitur

$$s =$$

$$s = \sin (a + \mathcal{E}x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \&c.)$$

figaturque series quae quaeritur :

$$s = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x^3 + \mathcal{D}x^4 + \mathcal{E}x^5 + \&c.$$

primum enim terminum constat evanescere : quia vero ad differentialia secunda descendendum est, coefficientem \mathcal{A} quoque aliunde definiri oportet, quod fiet si x ponamus infinite paruum. Tum enim ob arcum $= ax$ sinus ipsi fiet aequalis, eritque ergo $\mathcal{A} = a$. Ponamus nunc brevitatis gratia $z = ax + \mathcal{E}x^2 + \gamma x^3 + \&c.$ ut sit $s = \sin z$, erit differentiando $ds = dz \cos z$, denuoque differentiando $dds = ddz \cos z - dz^2 \sin z$. Quia igitur est $\sin z = s$ & $\cos z = \frac{ds}{dz}$; erit

$$dds = \frac{ds ddz}{dz} - s dz^2, \text{ seu } dz dds + s dz^3 = ds ddz.$$

219. Ponamus arcum z tantum binomio exprimi esseque $z = ax + \mathcal{E}x^2$; erit $dz = (a + 2\mathcal{E}x) dx$, & posito dx constante, $ddz = 2\mathcal{E} dx$; atque $dz^3 = (a^3 + 6a^2\mathcal{E}x + 12a\mathcal{E}^2x^2 + 8\mathcal{E}^3x^3) dx^3$. Deinde ob $s = \mathcal{A} + \mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x^3 + \mathcal{D}x^4 + \&c.$

$$\text{erit } \frac{ds}{dx} = \mathcal{A} + 2\mathcal{B}x + 3\mathcal{C}x^2 + 4\mathcal{D}x^3 + \&c.$$

$$\& \frac{dds}{dx^2} = 2\mathcal{B} + 6\mathcal{C}x + 12\mathcal{D}x^2 + \&c.$$

Quibus valoribus in aequatione differentio-differentiali substitutis fiet :

$$Yyy \dots \dots \dots dz^3$$

$$\begin{aligned}\frac{dzddz}{dx^3} &= 1.2 \mathcal{B}a + 2.3 \mathcal{C}ax + 3.4 \mathcal{D}ax^2 + 4.5 \mathcal{E}ax^3 + \&c. \\ &\quad + 2.1.2 \mathcal{B}\mathcal{E} + 2.2.3 \mathcal{C}\mathcal{E} + 2.3.4 \mathcal{D}\mathcal{E} + \&c. \\ \frac{+sdz^3}{dx^3} &= \quad + \mathcal{A}a^3 + \mathcal{B}a^3 + \mathcal{C}a^3 + \&c. \\ &\quad + 6\mathcal{A}a^2\mathcal{E} + 6\mathcal{B}a^2\mathcal{E} + \&c. \\ &\quad + 12\mathcal{A}a\mathcal{E}^2 + \&c.\end{aligned}$$

$$\frac{dsddz}{dx^3} = 2\mathcal{A}\mathcal{E} + 4\mathcal{B}\mathcal{E} + 6\mathcal{C}\mathcal{E} + 8\mathcal{D}\mathcal{E} + \&c.$$

Vnde coefficientes sequenti modo definiuntur :

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{2\mathcal{A}\mathcal{E}}{2a} \\ \mathcal{C} &= \frac{\mathcal{A}a^2}{2.3} \\ \mathcal{D} &= -\frac{2\mathcal{C}\mathcal{E}}{4a} - \frac{6\mathcal{A}a\mathcal{E}}{3.4} - \frac{\mathcal{B}a^2}{3.4} \\ \mathcal{E} &= -\frac{4\mathcal{D}\mathcal{E}}{5a} - \frac{12\mathcal{A}\mathcal{E}^2}{4.5} - \frac{6\mathcal{B}a\mathcal{E}}{4.5} - \frac{\mathcal{C}a^2}{4.5} \\ \mathcal{F} &= -\frac{6\mathcal{C}\mathcal{E}}{6a} - \frac{8\mathcal{A}\mathcal{E}^3}{5.6a} - \frac{12\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{E}}{5.6} - \frac{6\mathcal{C}a\mathcal{E}}{5.6} - \frac{\mathcal{D}a^2}{5.6} \\ \mathcal{G} &= -\frac{8\mathcal{F}\mathcal{E}}{7a} - \frac{8\mathcal{B}\mathcal{E}^3}{6.7a} - \frac{12\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{E}}{6.7} - \frac{6\mathcal{D}a\mathcal{E}}{6.7} - \frac{\mathcal{E}a^2}{6.7} \\ &\quad \&c.\end{aligned}$$

Quibus valoribus inuentis erit :

$$\sin(ax + \mathcal{E}x^2) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x^3 + \mathcal{D}x^4 + \&c.$$

existente $\mathcal{A} = a$.

220. Pari modo cosinus cuiusque anguli in feriem conuertitur, quia autem arcus rarissime per polynomium ex-

exprimitur, ostendamus vsum differentio-differentialium in invenienda serie pro cosinu arcus x . Sic ergo $s = \cos x$, & fingatur:

$$s = 1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + Dx^8 - \&c.$$

Quia est $ds = -dx \sin x$ & $dds = -dx^2 \cos x = -sdx^2$: erit $dds + sdx^2 = 0$; substitutione ergo facta fiet:

$$\frac{dds}{dx^2} = -1.2A + 3.4Bx^2 - 5.6Cx^4 + 7.8Dx^6 - \&c.$$

$$s = 1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + \&c.$$

& ex coaequatione terminorum sequitur:

$$A = \frac{1}{1.2}$$

$$B = \frac{A}{3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$C = \frac{B}{5.6} = \frac{1}{1.2.3 \dots 6}$$

$$D = \frac{C}{7.8} = \frac{1}{1.2.3 \dots 8} \quad \&c.$$

Patet ergo quod iam supra fufius demonftrauimus esse:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3 \dots 6} + \frac{x^8}{1.2.3 \dots 8} - \&c.$$

prior vero series pro finu posito $\xi = 0$ & $a = 1$ dabit:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3 \dots 7} + \frac{x^9}{1.2.3 \dots 9} - \&c.$$

221. Ex his seriebus pro finu & cosinu nōtiffimis deducuntur series pro tangente, cotangente, secante

Yyy z . . . &

& cosecante cuiusvis anguli. Tangens enim prodit si finus per cosinum; cotangens si cosinus per finum, secans si radius 1 per cosinum, & cosecans si radius per finum diuidatur. Series autem ex his diuisionibus ortae maxime videntur irregulares; verum excepta serie secantem exhibente reliquae per numeros Bernoullianos supra definitos A, B, C, D, &c. ad facilem progressionis legem reduci possunt. Quoniam enim supra §. 127 inuenimus esse:

$$\frac{Au^2}{1.2} + \frac{Bu^4}{1.2.3.4} + \frac{Cu^6}{1.2.3...6} + \frac{Du^8}{1.2.3...8} + \&c. = 1 - \frac{u}{2} \cot \frac{1}{2} u$$

erit posito $\frac{1}{2} u = x$;

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 Ax}{1.2} + \frac{2^4 Bx^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 Cx^5}{1.2.3...6} + \frac{2^8 Dx^7}{1.2...8} - \&c.$$

atque si ponatur $\frac{1}{2} x$ pro x , erit:

$$\cot \frac{1}{2} x = \frac{2}{x} - \frac{2^2 Ax}{1.2} + \frac{2^4 Bx^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 Cx^5}{1.2.3...6} + \frac{2^8 Dx^7}{1.2.3...8} - \&c.$$

222. Hinc autem tangens cuiusvis arcus sequenti modo per seriem exprimitur.

Cum sit $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, erit:

$$\cotang. 2x = \frac{1}{2 \tan x} - \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2} \tan x;$$

ideoque $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$. Cum igitur sit

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 Ax}{1.2} + \frac{2^4 Bx^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 Cx^5}{1.2...6} + \frac{2^8 Dx^7}{1.2...8} - \&c.$$

2 cot

$$2 \cot 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 A x}{1.2} - \frac{2^4 B x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 C x^5}{1.2...6} - \frac{2^8 D x^7}{1.2...8} - \&c.$$

erit hanc seriem ab illa subtrahendo :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)Ax}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)Cx^5}{1.2...6} + \frac{2^8(2^8-1)Dx^7}{1.2...8} + \&c.$$

Si ergo hic introducantur numeri A, B, C, D, &c.
§. 182. inuenti, erit :

$$\operatorname{tang} x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3 Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5 Cx^5}{1.2...6} + \frac{2^7 Dx^7}{1.2...8} + \&c.$$

223. Cofecans autem fequenti modo inuenietur.

$$\text{Quia est } \cot x = \operatorname{tang} x + 2 \cot 2x = \frac{1}{\cot x} + 2 \cot 2x;$$

erit $\cot x^2 = 2 \cot x \cdot \cot 2x + 1$, & radice extracta :

$$\cot x = \cot 2x + \operatorname{cofec.} 2x, \text{ unde fit}$$

$$\operatorname{cofec.} 2x = \cot x - \cot 2x, \text{ \& } x \text{ pro } 2x, \text{ pofito}$$

$\operatorname{cofec.} x = \cot \frac{1}{2}x - \cot x$. Quare cum cotangentes habeamus fcilicet :

$$\cot \frac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2^2 Ax}{1.2} - \frac{2^4 Bx^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 Cx^5}{1.2...6} - \&c.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 Ax}{1.2} - \frac{2^4 Bx^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 Cx^5}{1.2...6} - \&c.$$

erit hac ferie ab illa fubtracta :

$$\operatorname{cofec.} x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)Ax}{1.2} + \frac{2(2^3-1)Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)Cx^5}{1.2...6} + \&c.$$

224. Per hos autem numeros Bernoullianos secans
 exprimi non potest, sed requirit alios numeros, qui in
 summas potestatum reciprocarum imparium ingrediun-
 tur. Si enim ponatur:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. &= \alpha. \quad \frac{\pi}{2^2} \\
 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. &= \frac{\epsilon}{1.2} \cdot \frac{\pi^3}{2^4} \\
 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c. &= \frac{\gamma}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^5}{2^6} \\
 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \&c. &= \frac{\delta}{1.2 \dots 6} \cdot \frac{\pi^7}{2^8} \\
 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \&c. &= \frac{\epsilon}{1.2 \dots 8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} \\
 1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \&c. &= \frac{\zeta}{1.2 \dots 10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}} \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

erit:

α	$=$	1
ϵ	$=$	1
γ	$=$	5
δ	$=$	61
ϵ	$=$	1385
ζ	$=$	50521
η	$=$	2702765
θ	$=$	199360981
ι	$=$	19391512145
κ	$=$	2404879661671 &c.

ex

ex hisque valoribus obtinebitur:

$$\sec. x = a + \frac{\epsilon}{1.2}xx + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2...6}x^6 + \frac{\epsilon}{1.2...8}x^8 + \&c.$$

225. Ut autem nexum huius seriei cum numeris $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ ostendamus, consideremus seriem supra tractatam:

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi}$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{2n-m} - \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

Ponatur $m = \frac{1}{2}n - k$, eritque

$$\frac{\pi}{2n \cos \frac{k}{n} \pi}$$

$$\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} - \&c.$$

Sit $\frac{k\pi}{n} = x$, feu $k\pi = nx$, erit

$$\frac{\pi}{2n} \sec. x = \frac{\pi}{n\pi-2nx} + \frac{\pi}{n\pi+2nx} - \frac{\pi}{3n\pi-2nx} - \&c.$$

feu

$$\sec. x = \frac{2}{\pi-2x} + \frac{2}{\pi+2x} - \frac{2}{3\pi-2x} - \frac{2}{3\pi+2x} + \frac{2}{5\pi-2x} - \&c.$$

$$\sec. x = \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{4.3\pi}{9\pi^2-4xx} + \frac{4.5\pi}{25\pi^2-4xx} - \frac{4.7\pi}{49\pi^2-4xx} + \&c.$$

fi

si nunc singuli termini in series conuertantur, fiet:

$$\begin{aligned} \sec. x = & \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. \right) \\ & + \frac{2^4 x^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. \right) \\ & + \frac{2^6 x^4}{\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

quarum serierum loco si valores supra assignati substituantur, prodibit eadem series pro secante, quam dedimus.

226. Hinc simul patet lex, qua numeri α , ϵ , γ , δ , &c. quibus summae potestatum imparium constituuntur, procedunt. Cum enim fit

$$\sec. x = \frac{1}{\cos x} = \alpha + \frac{\epsilon}{1.2} x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4} x^4 + \frac{\delta}{1.2...6} x^6 + \&c.$$

necesse est vt haec series aequalis fit fractioni

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2...6} + \frac{x^8}{1.2...8} - \&c.}$$

aequalitate ergo constituta fiet $1 =$

$$\alpha + \frac{\epsilon}{1.2} x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4} x^4 + \frac{\delta}{1.2...6} x^6 + \frac{e}{1.2...8} x^8 + \&c.$$

$$- \frac{\alpha}{1.2} - \frac{\epsilon}{1.2.1.2} - \frac{\gamma}{1.2.1...4} - \frac{\delta}{1.2.1...6} \&c.$$

+

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a}{1.2.3.4} + \frac{\epsilon}{1...4.1.2} + \frac{\gamma}{1...4.1...4} && \&c. \\
 & - \frac{a}{1...6} - \frac{\epsilon}{1...6.1.2} && \&c. \\
 & + \frac{a}{1...8} && \&c.
 \end{aligned}$$

vnde sequuntur hae aequationes :

$$a = 1$$

$$\epsilon = \frac{2.1}{1.2} a$$

$$\gamma = \frac{4.3}{1.2} \epsilon - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} a$$

$$\delta = \frac{6.5}{1.2} \gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} \epsilon + \frac{6...1}{1...6} a$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon = & \frac{8.7}{1.2} \delta - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \gamma + \frac{8...3}{3...8} \epsilon - \frac{8...1}{1...8} a \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

Ex hisque formulis inuenti sunt istarum litterarum valores, quos in §. 224. exhibuimus; & quorum ope summae serierum in hac forma contentarum,

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \&c.$$

si n fuerit numerus impar, exprimi possunt.

CAPUT IX.
DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS
RESOLUENDIS.

227.

Constitutionem aequationum ad functionum rationem reduci posse supra iam satis ostensum est. Denotet enim y functionem quamcunque ipsius x , si ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae siue sint algebricae siue transcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ resolui dicitur, si is ipsius x valor definiatur, qui in functione y substitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiusmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y = 0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros f, g, h, i , &c. esse radices aequationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, ut si in ea loco x vel f , vel g , vel h , &c. substituatur, fiat reuera $y = 0$.

228. Quoniam igitur functio y evanescit, si in ea loco x ponatur f , seu $x + (f - x)$, existente f radice aequationis $y = 0$, erit per ea, quae supra de functionibus demonstraui:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

EX

ex qua aequatione valor radice f ita definitur, ut quicquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum $y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{2dx^2}$, &c substituti, semper resultet aequatio verum valorem ipsius f exhibens. Quo hoc clarius percipiat, ponamus esse $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$; $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2$; & $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$.

Quibus valoribus substitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3) + (f-x)^2(3x - 2) + (f-x)^3$$

feu multiplicationibus actu institutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur scilicet aequatio similis ipsi propositae, quae propterea easdem continet radices.

229. Quanquam autem hoc modo ad nouam aequationem non peruenitur, ex qua valor radice f facilius definiri queat; tamen hinc ingentia subsidia ad inventionem radicum deduci possunt. Si enim pro x assumptus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita ut $f-x$ sit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer conuergent, hancque ob causam non multum a veritate aberrabitur, si praeter binos terminos ini-

tiales reliqui reiiciantur. Erit ergo si pro x iam valor cuius aequationis $y = 0$ radici prope aequalis fuerit assumtus, proxime $0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx}$ seu $f = x - \frac{ydx}{dy}$, ex qua formula etsi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x substitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f suppeditabit; sicque continuo propius ad verum radicis f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuscunque numeris extrahi possunt. Sit enim propositus numerus $a^n + b$ ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ seu $x^n - a^n - b = 0$, vt sit $y = x^n - a^n - b$; erit $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}$; &c.

Hinc si radix quaesita ponatur $= f$, vt sit $f = \sqrt[n]{a^n + b}$ erit :

$$0 = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2x^{n-2} + \&c.$$

Si igitur pro x iam statuatur numerus ad valorem radicis quaesitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x = a$, si quidem b sit numerus tam paruus, vt $a^n + b < (a+1)^n$; erit $b = na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$, vnde valor radicis multo propius

pius cognoscetur. Sin autem adhuc tertium terminum assumere velimus, ut sit

$$b = n a^{n-1} (f-a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} (f-a)^2, \text{ fiet}$$

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1} (f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}, \text{ ideoque}$$

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm V \left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}} \right) \text{ feu}$$

$$f = \frac{(n-2)a \pm V(aa + 2(n-1)b : n a^{n-2})}{n-1}.$$

Quare ope extractionis radice quadratae valor radice f adhuc propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c , seu sit $xx \rightarrow c = y$.

Ponatur ergo numerus radici proximus $= a$, & $b = c - aa$, ob $aa + b = c$, & quia est $n = 2$, fiet prior formula

$$f = a + \frac{c-aa}{2a} = \frac{c+aa}{2a}, \text{ altera vero dat } f = Vc, \text{ quae est ipsa radix quaesita.}$$

Cum igitur sit proxime radix $= \frac{c+aa}{2a}$, hic ipse valor pro a scribatur, eritque propius

$$\text{radix } f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c+aa)}. \text{ Sit verbi gratia } c = 5;$$

$$\text{erit ex priori formula } f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}. \text{ Ponatur ergo } a = 2;$$

Zzz 3

erit

erit $f=2,25$; nunc ponatur $a=2,25$; fiet $f=2,236111$,
statuatur porro $a=2,236111$, erit $f=2,2360679$, qui
valor iam minime a vero discrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuscunque aequatio-
nis inueniri potest proxime ope aequationis $f=x-\frac{ydx}{dy}$,
postquam scilicet pro x assumptus fuerit valor parum a
quapiam aequationis radice discrepans. Ad huiusmodi
vero valorem pro x inueniendum, substituantur successiue
pro x varii valores, inter eosque is eligatur, qui func-
tionis y minimum hoc est cyphrae proximum valorem
indicat. Sic si sit $y=x^3-2xx+3x-4$,

$$\text{posito } x=0 \text{ fit } y=-4$$

$$x=1 \dots y=-2$$

$$x=2 \dots y=+2$$

unde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2,
ipsius x . Cum ergo sit $\frac{dy}{dx}=3xx-4x+3$, habe-
bitur pro radice f aequationis $x^3-2xx+3x-4=0$
inuenienda haec aequatio:

$$f=x-\frac{ydx}{dy}=x-\frac{(x^3-2xx+3x-4)}{3xx-4x+3}$$

Sit ergo $x=1$; fiet $f=1+\frac{2}{2}=2$. Nunc ponatur

$$x=2, \text{ fiet } f=2-\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$$

erit

erit $f = \frac{12}{7} = \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si ulterius progredi velimus, logarithmis commodius utemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

$$\begin{array}{rcl}
 lx & = & 0,2182729 \quad | \quad x = 1,653000 \\
 lx^2 & = & 0,4365458 \quad | \quad x^2 = 2,732409 \\
 lx^3 & = & 0,6548187 \quad | \quad x^3 = 4,516673 \\
 x^3 & = & 4,516673 \\
 3x & = & 4,959000 \\
 & & 9,475673 \quad 3xx+3 = 11,197227 \\
 2xx+4 & = & 9,464818 \quad 4x = 6,612000 \\
 \text{num.} & = & 0,010855 \quad \text{den.} = 4,585227 \\
 l \text{ num.} & = & 8,0356298 \\
 l \text{ den.} & = & 0,6613608 \quad x = 1,653000 \\
 l \text{ fract.} & = & 7,3742690 ; \quad \text{fractio} = 0,002367 \\
 & & f = 2,650633
 \end{array}$$

qui valor iam proxime ad verum accedit.

232. Citiores autem approximationes ex generali expressione deducere poterimus. Cum enim posita functione quacunque $y = 0$, si radix huius aequationis fuerit $x = f$, inuenerimus esse:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

fit $f-x = z$, ita vt fit radix $f = x + z$, atque ponatur

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dr}{dx} = s; \quad \text{erit:}$$

$$0 = y + zp + \frac{z^2 q}{2} + \frac{z^3 r}{6} + \frac{z^4 s}{24} + \frac{z^5 t}{120} + \&c.$$

in

in qua aequatione sumto pro x valore quocunque, ex quo simul y, p, q, r, s , &c. determinantur, inueniri debet quantitas z , qua inuenta habebitur aequationis propositae $y = 0$, radix $f = x + z$. In id ergo est incumbendum, vt quam commodissime ex hac aequatione valor incognitae z eruatur.

233. Fingatur pro z series conuergens haec:

$$z = A + B + C + D + E + \&c.$$

atque facta substitutione erit:

$$y = y$$

$$pz = Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c.$$

$$\frac{1}{2}qz^2 = \frac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c. \\ + \frac{1}{2}BBq + BCq + \&c.$$

$$\frac{1}{6}rz^3 = \frac{1}{6}A^3r + \frac{1}{2}A^2Br + \frac{1}{2}A^2Cr + \&c. \\ + \frac{1}{2}AB^2r + \&c.$$

$$\frac{1}{24}sz^4 = \frac{1}{24}A^4s + \frac{1}{6}A^3Bs + \&c.$$

$$\frac{1}{120}tz^5 = \frac{1}{120}A^5t + \&c.$$

Vnde obtinentur sequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} + \&c.$$

ideo

ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2 q}{2p^3} - \frac{y^3 qq}{2p^5} + \frac{y^3 r}{6p^4} - \frac{5y^4 q^3}{8p^7} + \frac{5y^4 qr}{12p^6} - \frac{y^4 s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2$$

$$\frac{dp}{dx} = q = 20x^3$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2$$

$$\frac{dr}{dx} = s = 120x \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 1$, quia hic valor parum a radice discrepat, erit:

$$y = 1; \quad p = 7; \quad q = 20; \quad r = 60; \quad s = 120.$$

vnde fiet:

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \cdot 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

$$\text{feu } z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} \&c. \quad \text{eritque}$$

ergo $z = -0,18$, & radix $f = 0,82$, qui valor si denuo loco x substitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Inuenimus ergo seriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo ut tum lex progressionis non pateat, tum ipsa nimis sit perplexa atque ad usum non satis accommodata. Alio igitur modo idem negotium suscipiamus, seriemque magis regularem inuestigemus, cuiuscunque aequationis propositae radicem exprimentem.

Sit ut ante proposita aequatio $y = 0$, existente y functione quacunque ipsius x ; & quaestio huc redit, ut valor ipsius x definiatur, qui loco x substitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y sit functio ipsius x , vicissim x tanquam functio spectari poterit ipsius y , atque hac consideratione adhibita quaerendus est valor ipsius functionis x , quem induit, cum quantitas y euanesceat. Si igitur f ponatur designare istum ipsius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0$, quoniam x abit in f , si statuatur $y = 0$, erit per ea quae supra sunt demonstrata:

$$f = x - \frac{y dx}{dy} + \frac{y^2 d^2 x}{2 dy^2} - \frac{y^3 d^3 x}{6 dy^3} + \frac{y^4 d^4 x}{24 dy^4} - \&c.$$

in qua aequatione statuitur differentiale dy constans. Si igitur ponatur:

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = q; \quad \frac{dq}{dy} = r; \quad \frac{dr}{dy} = s; \quad \&c.$$

erit his valoribus introductis, ut consideratio differentialis constantis exuatur:

$$f = x - p + \frac{1}{2} q y^2 - \frac{1}{6} r y^3 + \frac{1}{24} s y^4 - \frac{1}{120} t y^5 + \&c.$$

235. Tributo ergo ipsi x quocunque valore, simul valores ipsius y , atque quantitatum p, q, r, s , &c. determinabuntur; hisque inuentis habebitur series infinita valorem radices f exprimens. Sin autem aequatio $y=0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, si pro x diuersi valores assumantur: quia enim y eundem valorem induere potest, etiamsi ipsi x diuersi valores tribuantur, mirum non est eandem seriem saepenumero plures valores suppeditare posse. Quo igitur his casibus ambiguitas tollatur, simulque series conuergens reddatur, pro x assumi debet valor iam prope ad valorem eius radices, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum parvus, serieique termini vehementer decrescent, ita vt paucis terminis sumendis iam satis iustus valor pro f inueniatur. Hic igitur valor si deinceps loco x substituatur, quantitas y multo minor euadet, seriesque multo magis conuerget; hocque modo statim radix f tam exacte innotescet, vt error futurus sit minimus. Hincque summa huius expressionis praerogatiua prae ea, quam ante elicueramus, manifesto perspicitur.

236. Ponamus extrahendam esse radicem potestatis n ex numero quocunque N . Sumta igitur proxima potestate exponentis n , numerus propositus facile resolvetur in hanc formam $N = a^n + b$. Erit ergo

$$x^n = a^n + b \quad \& \quad y = x^n - a^n - b; \quad \text{vnde fit:}$$

$$A a a a 2$$

$$dy =$$

$$\begin{aligned}
 dy &= nx^{n-1}dx ; & \& \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}} \\
 dp &= -\frac{(n-1)dx}{nx^2} ; & \& \frac{dp}{dy} = q = -\frac{(n-1)}{nnx^{2n-1}} \\
 dq &= \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} ; & \& \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \\
 dr &= -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3x^{3n}} ; & \& s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n}} \\
 & & & \&c.
 \end{aligned}$$

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaesita $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ hoc modo exprimetur:

$$\begin{aligned}
 f &= a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n \cdot 2n \cdot a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot a^{3n-1}} - \\
 &\quad \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot a^{4n-1}} + \&c.
 \end{aligned}$$

ficque prodit eadem series, quae vulgo per evolutionem binomii $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ erui solet.

237. Postquam ergo in actuali extractione radix proxime vera a fuerit inuenta, simulque residuum b fuerit repertum, tunc ad radicem insuper addi oportet valorem fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$, quo propius vera radix obti-

neatur. Erit autem $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, ob $N = a^n + b$.

At vero hoc modo radix iusto maior inuenietur, quoniam tertius terminus subtrahi debet. Quo igitur per diui-

diuisionem residui b radix multo propius ad verum accedens inueniatur idoneus diuisor debet inuestigari, qui fingatur esse $na^{n-1} + ab + \xi b^2 + \gamma b^3 + \&c.$

Cum igitur debeat esse:

$$\begin{array}{r} b \\ na^{n-1} + ab + \xi b^2 + \gamma b^3 + \&c. \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \&c.$$

fiet multiplicatione per $na^{n-1} + ab + \xi b^2 + \gamma b^3 + \&c.$ instituta:

$$\begin{array}{r} b \\ \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \&c. \\ + \frac{ab^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)ab^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)ab^4}{6n^3a^{3n-1}} \\ + \frac{\xi b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\xi b^4}{2n^2a^{2n-1}} \\ + \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}} \end{array}$$

Hinc deducuntur sequentes determinaciones:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\xi = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\xi}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

$$\text{seu } \gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}} \quad \text{Frac.}$$

Fractio ergo ad radicem iam inuentam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1}} + \frac{(n-1)b}{2a} + \frac{(nn-1)bb}{12na^{n-1}} + \frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n-1}}.$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N , atque inuenta iam fit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inuentam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b diuidatur per $2a + \frac{b}{2a} + \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} + \&c.$ Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b diuidi debet per $3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{2bb}{9a^4} + \frac{b^3}{9a^7} + \&c.$ quarum formularum vsum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum fit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea diuidi debet per $28 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7 \cdot 196 \cdot 98}$, eritque ergo diuisor $= 28,142135$, per quem si 4 diuidatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & vltra.

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero $N = 10$.

Proximus cubus est 8, & residuum $= 2$, vnde $a = 2$
&

& $b = 2$, atque diuisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12,9444$.

Quare radix cubica quaesita erit proxime $\underline{\underline{\quad\quad\quad}}$

$$2 \frac{2}{12,9444} = 2 \frac{10000}{64722}.$$

239. Series pro radice inuenta etiam considerari potest tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini seriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis constituent, reuocabuntur. Sic leui attentione adhibita perspicietur fore proxime :

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a + \frac{(n+1)b}{2}}{a + \frac{(n-1)b}{2}} \text{ atque adhuc propius}$$

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{aa + \frac{(n+2)}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{(n-2)}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}.$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri possunt :

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^3 + \frac{(n+3)}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{120}b^3}{a^3 - \frac{(n-3)}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{120}b^3}.$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi potest, ad quam commode exprimendam fit :

$$A =$$

$$\begin{array}{l|l}
 A = \frac{m(n+m)}{1 \cdot 2m} & \mathcal{A} = \frac{m(n-m)}{1 \cdot 2m} \\
 B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)} A & \mathcal{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)} \mathcal{A} \\
 C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)} B & \mathcal{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)} \mathcal{B} \\
 D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4(2m-3)} C & \mathcal{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4(2m-3)} \mathcal{C} \\
 & \&c. \qquad \qquad \&c.
 \end{array}$$

His autem valoribus determinatis erit :

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathcal{A}a^{m-1}b + \mathcal{B}a^{m-2}b^2 - \mathcal{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro x substituatur numerus fractus, istae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic si radix quaecunque potestatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, sequentes formulae in usum vocari possunt:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, vt fit $a^n = N - b$;
erit :

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}$$

241. Formula igitur generalis pro radice cuiusque aequationis inveniendi in aequationibus, quae ex pluribus terminis constant, eundem praestat vsum, quem solita regula binomii ad resolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre solet, atque adeo hoc casu in regulam illam ipsam abit. Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in vsum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radices exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius vsum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur $x^n + cx - N = y$, erit $dy = (nx^{n-1} + c)dx$,

hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}dx}{(nx^{n-1} + c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1} + c)^3}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$ &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-2}}{(nx^{n-1} + c)^5}$$

$$s = -\frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-4} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-2}}{(nx^{n-1} + c)^7}$$

$$t = +\frac{n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(2n-1)(2n-1)cx^{3n-4}}{(nx^{n-1} + c)^9}$$

$$+ \frac{n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(3n-1)(4n-1)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-4}}{(nx^{n-1} + c)^9}$$

&c.

B b b b

Qui-

Quibus valoribus inuentis, erit aequationis propositae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2} qyy - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 + \&c.$$

quicquid enim pro x substituatur, vnde simul litterae $y, p, q, r, \&c.$ valores determinatos induunt, summa seriei aequabitur valori vnus radice.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.

Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$,

Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{84}{5^5}$;

$s = -\frac{16.90}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{5^3} - \frac{14}{5^5} + \frac{60}{5^7} - \&c. = 0,770751.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia est $y = x^3 + 2x - 2$;

$p = \frac{1}{3xx+2}$; $q = -6p^3x$; $r = 9xxp^5 - 12p^5$; atque

$s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$; habebitur logarithmis adhibendis:

$lx = 9,8864907$	$x = 0,77$
$lx^2 = 9,7729814$	$x^2 = 0,5929$
$lx^3 = 9,6594721$	$x^3 = 0,456533$
	$2x = 1,54$

$$x^3 + 2x = 1,996533$$

Ergo $y = -0,003467$

$l-y$

$$\begin{aligned}
 l-y &= 7,5399538; & 3xx+2 &= 3,7787 \\
 lp &= 9,4226575; & l(3xx+2) &= 0,5773424 \\
 l-py &= 6,9626113; & p-py &= 0,000917511
 \end{aligned}$$

$$lp^3 = 8,2679725$$

$$lx = 9,8864907$$

$$l_3 = 0,4771213$$

$$ly^2 = 5,0799076$$

$$l-\frac{1}{2}py = 3,7114922 \quad -\frac{1}{2}py = 0,000000514.$$

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in vltima figura a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit proposita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$; erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3xx+1}{4(x^3 - x + 1)^2} \quad \text{Ergo}$$

$$q = \frac{-3xx+1}{16(x^3 - x + 1)^3}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{16(x^3 - x + 1)^4} \quad \&$$

$$r = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{64(x^3 - x + 1)^5} \quad \&c.$$

ex quibus erit radix aequationis propositae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} + \frac{(3xx-1)yy}{32(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4xx + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} - \&c.$$

Oportet ergo ipsi x idoneum valorem tribui, quo series ista fiat conuergens. Primum autem perspicuum est, si

B b b b 2

ipfi

ipfi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3 - x + 1 = 0$,
 tum omnes seriei terminos praeter primum euadere in-
 finitos, neque adeo exinde quicquam concludi posse.
 Conuenit ergo ipfi x eiusmodi valorem assignare, quo
 & y fiat exiguum & $x^3 - x + 1$ non admodum
 paruum. Sit $x = 1$, erit $y = -5$, &

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \&c.$$

vbi cum tres termini $\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ congruant

cum progressionem geometricam, cuius summa est $\frac{5}{9}$ erit

circiter $f = \frac{14}{9}$. Statuamus ergo $x = \frac{3}{2}$, erit $y = -\frac{23}{16}$;

& $x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}$, vnde fit:

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{407}{256 \cdot 529} - \&c. = 1,61.$$

Ponatur nunc $x = 1,61$; erit:

$lx = 0,2068259$	$x = 1,61$	fit $x^3 - x + 1 = z$
$lx^2 = 0,4136518$	$x^2 = 2,5921$	
$lx^3 = 0,6204777$	$x^3 = 4,173281$	
$lx^4 = 0,8273036$	$x^4 = 6,718983$	
	hinc	
$l-y = 8,4016934$	$y = -0,025217$	
$lz = 0,5518502$	$z = 3,563281$	
$l\frac{-y}{z} = 7,8498432$		

$$l4 =$$

$$\begin{array}{l|l}
 l_4 = 0,6020600 & \\
 \frac{-y}{4^2} = 7,2477832 & \frac{-y}{4^2} = 0,0017692 \\
 l(3xx-1) = 0,8309926 & 3xx-1 = 6,7763 \\
 ly^2 = 6,8033868 & \\
 7,6343794 & \\
 lx^3 = 1,6555506 & \\
 5,9788288 & \\
 l32 = 1,2041200 & \frac{(3xx-1)y^2}{32^3} = 0,000005952 \\
 4,7747088 &
 \end{array}$$

$$\text{Ergo } f = 1,6117632.$$

242. Methodus haec inueniendi radices aequationum proxime aequae patet ad quantitates transcendentes. Quaeramus numerum x , cuius logarithmus ex quocunque canone desumptus ad ipsum numerum datam habeat rationem ut 1 ad n , atque habebitur ista aequatio $x - n \log x = 0$: fit autem k modulus horum logarithmorum, ita ut isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur per k , erit $d \log x = \frac{k dx}{x}$.

Ponatur ergo $x - n \log x = y$, fitque f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = n \log x$. Cum igitur sit

$$y = x - n \log x, \text{ erit } dy = dx - \frac{k n dx}{x} = \frac{dx(x - kn)}{x}$$

$$\& \frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x - kn}; \text{ vnde } dp = -\frac{k n dx}{(x - kn)^2} \text{ ergo}$$

$$\frac{dp}{dy} = q = -\frac{k n x}{(x - kn)^3}; \quad dq = \frac{2 k n x dx + k^2 n^2 dx}{(x - kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{k n x (2x + kn)}{(x - kn)^5} \quad \&c.$$

Qua-

Quare fiet:

$$f = x - \frac{xy}{x - kn} - \frac{kxxy}{2(x - kn)^2} - \frac{kxxy^2(2x + kn)}{6(x - kn)^3} - \&c.$$

Infra autem ostendemus hoc problema solutionem non admittere, nisi sit $kn > e$, existente e numero cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, seu debet esse $kn > 2,7182818$.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus praeter 10, cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipsius numeri.

Quia de logarithmis tabularibus quaestio instituitur, erit $k = 0,43429448190325$, atque ob $n = 10$ habebitur $kn = 4,3429448190325$. Facto iam $x = 1$, erit

$$y = 1, \text{ fietque } f = 1 + \frac{1}{3,3429} + \frac{2,1714724}{(3,3429)^2} - \&c.$$

sicque proxime erit $f = 1,37$. Statuatur ergo $x = 1,37$,

erit $lx = 0,136720567156406$, & ob $y = x - 10/x$,

erit $y = 0,00279432843503$, &

$-x + kn = 2,9729448190325$. Fiat ergo

$$lx = 0,1367205$$

$$ly = 7,4462773$$

$$7,5829978$$

$$l(kn - x) = 0,4731866$$

$$\frac{-xy}{x - kn} = 0,00128769.$$

De-

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{k n x y y}{2(x-kn)^3} = \frac{k n y}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{x y}{x-kn}$
erit :

$$l \frac{x y}{x-kn} = 7,1098112$$

$$l y = 7,4462773$$

$$l k n = 0,6377842$$

$$5,1938527$$

$$l(kn-x)^2 = 0,9463732$$

$$4,2474995$$

$$l_2 = 9,3010300$$

$$l \text{ tert. term.} = 3,9464695$$

$$\text{I. term. } x = 1,37$$

$$\text{II. term.} = 0,00128769$$

$$\text{III. term.} = 0,00000088$$

$$f = 1,37128857$$

$$l f = 0,137128857.$$

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x , ut sit $x^x = a$, erit $x l x = l a$. Quare posito $y = x l x - l a$, fiet $dy = dx l x + dx$,

$$\& \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1 + l x}. \quad \text{Tumque}$$

$$dp =$$

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$$

$$dy = \frac{dx}{xx(1+lx)^3} + \frac{3dx}{xx(1+lx)^4}, \quad \text{ideoque}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1+lx)^4} + \frac{3}{xx(1+lx)^5}; \quad \text{porro erit}$$

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6}; \quad \text{ergo}$$

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}; \quad \&$$

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}.$$

Hinc ergo si verus valor ipsius x sit $=f$, ita vt sit $ff = a$; erit:

$$f = x - \frac{y}{(1+lx)} - \frac{yy}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2xx(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$

$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$

$$- \frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$

$$- \frac{y^6}{20x^4(1+lx)^6}$$

&c.

Haec

Haec ergo expressio in infinitum continuata, quicumque valor pro x statuatur, sumto $y = x \ln x - la$ verum ipsius f dabit valorem. Sic si ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, & $f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} \&c.$ vbi notandum est esse la logarithmum hyperbolicum ipsius a .

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus f , ut sit $ff = 100$.

Cum sit $a = 100$, & $y = x \ln x - la = x \ln x - 100$, quia patet esse $f > 3$ & < 4 , statuatur

$$x = \frac{1}{2}; \text{ eritque } \ln x = 1,25276296849$$

$$x \ln x = 4,38467034972$$

$$l100 = 4,60517018599$$

$$y = -0,22049983627$$

$$1 + \ln x = 2,25276296849$$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$$l-y = 9,3434083$$

$$l(1+\ln x) = 0,3527156$$

$$\frac{8,9906927}{1+\ln x} = 0,0978797$$

$$ly^2 = 8,6868166$$

$$3l(1+\ln x) = 1,0581468$$

$$= 7,6286698$$

$$l2x = l7 = 0,8450980$$

$$\frac{6,7835718}{2x(1+\ln x)^3} = 0,0006075$$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$

sequentibus vero insuper terminis

sumtis erit $f = 3,5972852$

C c c c

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet usum in resolutione aequationum, si quaequam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x . Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a , hae duae radices facile inuenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y euanescat, si x significet vnā ex radicibus aequationis $y = 0$, euanescet quoque y , si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

Vnde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{a ddy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radice x , quam alia radix superat quantitate a .

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam undecunque constet, habere duas radices unitate differentes.

Posito

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$. erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Jam ob $a = 1$ erit:

A . . . $5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0$. At est

B . . . $x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0$.

Multiplicetur superior per x & inferior per 5 , alteraque ab altera subtracta relinquet:

$$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0 \text{ seu}$$

C . . . $5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$

a qua prima A subtracta relinquet:

D . . . $19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0$

D. $5x$. . . $95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0$

A. 19 . . . $95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0$

E $415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0$

D. 415 $7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0$

E. 19 $7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0$

F $1997x^2 - 12581x + 17174 = 0$

C c c c 2

D. 247

$$D. 247 \dots 4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0$$

$$E. 32 \dots 13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0$$

$$8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0$$

$$G \dots \dots \dots 8587x^3 - 23701x + 13054 = 0$$

$$F. 8587 \dots 17148239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0$$

$$G. 1997 \dots 17148239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0$$

$$60702150x - 121404300 = 0$$

Ex qua aequatione sequitur $x = 2$,
ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quo-
rum uterque valor aequationis satisfacit.

245. Potest autem haec operatio absolui sine sub-
sidio calculi differentialis; propterea quod eadem aequa-
tio, quam calculus differentialis suppeditavit, prodit si in
ipsa aequatione proposita ponatur $x + a$ loco x . Cete-
rum vero haec methodus eliminandi nimium est ope-
rosa, & si aequationes essent altioris gradus, labor pe-
nitus foret insuperabilis; ex quo multo minus in aequa-
tionibus transcendentibus locum habere potest. Quod si
autem ponamus duas aequationis propositae $y = 0$ radi-
ces inter se esse aequales, tum ob $a = 0$, aequatio diffe-
rentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quaecumque
aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties
erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae
praebunt eum ipsius x valorem, cui binae radices sunt
aequa-

æquales. Vnde vicissim si ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$. Euenit autem hoc, si postquam quantitas x ope duarum istarum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata, perueniatur ad aequationem identicam. Sic si proponatur aequatio:

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam additum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ seu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius triplum est $3xx + 12x - 36 = 0$

$$\text{subtrahatur } 3xx - 4x - 4 = 0$$

$$16x - 32 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Cum ergo prodierit $x = 2$, substituatur hic valor in vna praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio identica $12 - 8 - 4 = 0$, vnde colligitur aequationem propositam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices æquales, nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quocunque dimensionum:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

quae duas habeat radices inter se æquales, erit quoque

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \&c. = 0.$$

C c c c 3

Scili-

Scilicet illius aequationis radix duplex simul erit radix istius aequationis. Multiplicetur illa per n , ab eaque haec per x multiplicata subtrahatur, prodibitque haec noua aequatio:

$$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicata erit:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae aequatio cum ipsa proposita coniuncta monstrabit radices aequales, si quas habet proposita. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu assumi queant, coefficientes a , $a+b$, $a+2b$, &c. progressionem quamcunque arithmeticam repraesentant. Quamobrem si aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae inueniuntur, si singuli aequationis propositae termini multiplicentur per terminos cuiusuis progressionis arithmeticae respectiue; noua enim aequatio hoc modo resultans eam radicem, quae in proposita bis inest, quoque continebit. Sic aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

si eius termini multiplicentur per progressionem arithmeticam hanc:

$$a, a+b; a+2b; a+3b; a+4b; \&c.$$

prodibit noua aequatio haec:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae cum illa coniuncta radices aequales ostendet. Haecque est regula satis cognita inueniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247. Si aequatio $y = 0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam erit $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; si quidem pro x statuatur eius radiceis valor, quae in aequatione $y = 0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y = 0$ tres habere radices huiusmodi x , $x+a$, & $x+b$, quae primum interuallis finitis a & b a se inuicem discrepent; & quia y euanesceat, si loco x tam $x+a$, quam $x+b$ scribatur, erit:

$$y = 0$$

$$y + \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 d^2y}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{a^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c. = 0$$

$$y + \frac{b dy}{dx} + \frac{b^2 d^2y}{2 dx^2} + \frac{b^3 d^3y}{6 dx^3} + \frac{b^4 d^4y}{24 dx^4} + \&c. = 0$$

a quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a d^2y}{2 dx^2} + \frac{a^2 d^3y}{6 dx^3} + \frac{a^3 d^4y}{24 dx^4} + \&c. = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b d^2y}{2 dx^2} + \frac{b^2 d^3y}{6 dx^3} + \frac{b^3 d^4y}{24 dx^4} + \&c. = 0$$

Subtrahantur quoque hae a se inuicem, diuisioneque per $a-b$ facta erit:

$$\frac{d^2y}{2 dx^2} + \frac{(a+b) d^3y}{6 dx^3} + \frac{(aa+ab+bb) d^4y}{24 dx^4} + \&c. = 0.$$

Ponatur iam $a = 0$ & $b = 0$, ita vt tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos euanescentes:

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \& \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habent radices aequales puta f, f, f , tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

tres contineat radices aequales f, f, f , si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusvis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f : quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticae quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat aequatio eandem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressionem arithmeticae eligantur, quarum vel primus vel ultimus terminus sit $= 0$, tum aequatio prodibit vno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilius euadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y = 0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f , tum posito $x = f$ non

non solum fieri $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, & $\frac{ddy}{dx^2}=0$, sed etiam fore $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Scilicet vti aequatio $y=0$ quater continet radicem $x=f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio vero $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, & aequatio $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel complectetur. Hoc quoque facilius perspicietur, si perpendamus functionem y hoc casu huiusmodi formam $(x-f)^4 X$ habere debere, denotante x functionem quamcunque ipsius x . Hac forma assumpta erit: $\frac{dy}{dx}=(x-f)^3 \left(4X + \frac{(x-f)dX}{dx} \right)$, ideoque per $(x-f)^3$ diuisibilis. Similiter porro habebit $\frac{ddy}{dx^2}$ factorem $(x-f)^2$, & $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perspicuum est, si radix $x=f$ in aequatione $y=0$ quater insit, eam in aequatione $\frac{dy}{dx}=0$ ter, in aequatione $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, atque in $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel adhuc inesse debere.

CAPUT X.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

250.

Si functio ipsius x ita fuerit comparata, ut crescentibus valoribus x ipsa continuo crescat vel decrescat, tum ista functio nullum habebit valorem maximum minimumve. Quicumque enim huius functionis valor consideretur, sequentes erunt maiores, praecedentes vero minores. Huiusmodi functio est $x^3 + x$, cuius valor crescentibus x continuo crescit, decrescantibus vero x , continuo decrescit; maximum ergo haec functio valorem alium induere nequit, nisi ipsi x valor maximus, hoc est infinitus tribuatur; similique modo minimum obtinebit valorem, si ponatur $x = -\infty$. Nisi autem functio ita fuerit comparata, ut crescente x continuo crescat decrescatue, maximum vel minimum alicubi habebit valorem; hoc est eiusmodi valorem, qui sit vel maior vel minor, quam antecedentes & sequentes. Sic ista functio $xx - 2x + 3$ minimum valorem induit, si ponatur $x = 1$, quicumque enim alius valor ipsi x tribuatur, perpetuo functio maiorem adipiscetur valorem.

251. Quo autem natura maximorum ac minimorum clarius perspiciatur, ponamus y eiusmodi esse functionem ipsius x , quae maximum obtineat valorem, si ponatur $x = f$; atque intelligitur, si x ponatur siue ma-

iun

ius siue minus quam f , tum valorem ipsius y inde oriundum minorem fore illo, quem induit si ponatur $x=f$. Simili modo, si posito $x=f$, functio y minimum obtineat valorem, necesse est vt, siue x ponatur maius quam f siue minus, semper maior ipsius y valor resultet: haecque est definitio maximorum & minimorum absolutorum. Praeterea autem quoque functio y maximum valorem recipere dicitur posito verbi gratia $x=f$, dummodo iste valor maior fuerit quam proximi siue sequentes siue antecedentes, qui oriuntur, si x aliquantillum siue maius siue minus quam f statuatur; etiam si aliis valoribus loco x substituendis functio y maiores forte valores recipiat. Similiter functio y minimum valorem recipere dicitur posito $x=f$, dummodo ille valor minor fuerit iis, quos induit, si loco x valores proxime siue maiores siue minores quam f substituuntur. Atque in hac posteriori significatione istis maximorum & minimorum vocabulis vtemur.

252. Antequam autem modum ostendamus haec maxima & minima inueniendi, notari conuenit hanc investigationem proprie in iis tantum ipsius x functionibus locum habere, quas supra vniformes vocauimus, & quae sunt ita comparatae, vt pro singulis ipsius x valoribus singulos pariter valores recipiat. Biformes autem & multiformes functiones vocauimus, quae pro singulis valoribus ipsius x binos pluresue valores inducunt, cuiusmodi functiones sunt radices aequationum quadraticarum & plurium dimensionum. Si igitur y huiusmodi fuerit functio ipsius x vel biformis vel multiformis, tum proprie

D d d d 2

dici

dici nequit, eam posito $x = f$ valorem siue maximum siue minimum induere: quoniam enim posito $x = f$ vel duos pluresue valores simul obtinet, atque praecedentes aequae ac sequentes sint numero plures, diiudicatio maximi minimiue non tam facile instituitur: nisi forte omnes functionis y valores, qui singulis ipsius x valoribus respondent, sint imaginarii praeter vnum; quo casu huiusmodi functiones speciem functionum uniformium mentiuntur. Primum ergo functiones uniformes harumque speciem mentientes contemplabimur, tum vero quomodo iudicium ad multiformes accommodari debeat, indicabimus.

253. Sit igitur y functio ipsius x uniformis, quae propterea, quicunque valor pro x substituatur, semper vnum recipiat valorem realem, denotetque x eum valorem, qui functioni y maximum minimumue valorem inducat. Priori ergo casu, siue loco x substituatur $x + a$ siue $x - a$, valor ipsius y minor erit, quam si $a = 0$, posteriori vero casu maior. Cum igitur posito $x + a$ loco x functio y abeat in

$$y + \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

at posito $x - a$ loco x in

$$y - \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

ne-

necesse est vt casu maximi fit

$$y > y + \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c. \quad \&$$

$$y > y - \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

In casu autem, quo valor ipsius y fit minimus erit:

$$y < y + \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

$$y < y - \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2 dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$$

254. Quoniam haec euenire debent, si a denotet quantitatem minimam, statuamus a tam paruum, vt eius potestates altiores reiici queant; debeatque tam pro casu maximi quam minimi esse $\frac{a dy}{dx} = a$. Nisi enim $\frac{a dy}{dx}$ esset $= 0$, neque valor ipsius y maximus neque minimus esse posset. Hinc tam pro maximis quam pro minimis inuestigandis haec habetur regula communis, vt differentiale propositae y nihilo aequale ponatur, eritque ille ipsius x valor, qui functionem reddit vel maximam vel minimam, radix istius aequationis. Vtrum vero valor hoc modo inuentus ipsius y futurus sit maximus an minimus, incertum relinquitur; quin etiam fieri potest, vt y neque maximum neque minimum sit futurum: tantum enim inuenimus utroque casu fore $\frac{dy}{dx} = 0$, ne-

D d d d 3

que

que vicissim affirmauimus, quoties fit $\frac{dy}{dx} = 0$, toties quoque valorem pro y prodire vel maximum vel minimum.

255. Interim tamen ad casus, quibus valor ipsius y vel maximus vel minimus euadat, inuestigandos haec prima operatio instituenda est, vt differentiale functionis propositae nihilo aequetur, atque ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ omnes ipsius x valores eliciantur. Quibus inuentis deinceps dispendendum erit, vtrum iis functio y maximum induat valorem, an minimum, an neutrum? ostendemus enim fieri posse, vt neque maximum neque minimum locum habeat; etiamsi sit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sit f valor seu vnus ex valoribus ipsius x , quem obtinet ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, hicque valor substituatur in expressionibus $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. fiatque hac substitutione $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ &c. Abeat autem functio ipsa y posito f loco x in F , atque si loco x ponatur $f + a$, ista functio abibit in

$$F + \frac{1}{2}a^2p + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r + \&c.$$

sin autem loco x ponatur $f - a$ prodibit

$$F + \frac{1}{2}a^2p - \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r - \&c.$$

vnde

vnde patet, si p fuerit quantitas affirmatiua, vtrumque valorem maiorem fore quam F , saltem si a quantitatem valde paruum denotet, ac propterea valorem F ; quem functio y induit posito $x = f$, fore minimum. Sin autem p sit quantitas negatiua, tum valor $x = f$ functioni y inducet valorem maximum.

256. Quodsi autem fuerit $p = 0$, tum spectari debet valor ipsius q , qui si non fuerit $= 0$, valor ipsius y neque maximus erit neque minimus; nam posito $x = f + a$ erit $F + \frac{1}{6}a^3q > F$ & posito $x = f - a$ erit

$F - \frac{1}{6}a^3q < F$. Sin autem quoque fuerit $q = 0$, ad quantitatem r erit respiciendum, quae si habuerit valorem affirmatiuum valor functionis F , quem recipit posito $x = f$, erit minimum; sin autem r habeat valorem negatiuum, erit F maximum. At si quoque r euanescat iudicium ex sequentis litterae s valore erit petendum, quod simile erit illi, quod ex littera q formauimus. Scilicet si s non fuerit $= 0$, functio F neque maximum erit neque minimum; sin autem sit quoque $s = 0$, tum sequens littera t , si habeat valorem affirmatiuum indicabit minimum, sin autem habeat valorem negatiuum, indicabit maximum. Verum si & haec littera t euanescat, tum in iudicando vterius est procedendum eodem prorsus modo, quo in casibus praecedentibus sumus vfi. Sicque de qualibet radice aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ indagabitur, vtrum functioni y inducat valorem maximum an mini-

minimum, an neutrum; atque hoc modo omnia maxima & minima, quae quidem functio y recipere potest, inuenientur.

257. Si ergo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat aequales, ita ut factorem habeat quadratum $(x-f)^2$, tum posito $x=f$ simul $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescet, eritque $p=0$, non autem q . Hoc ergo casu functio y neque maximum neque minimum valorem induet. Sin autem aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ tres radices habeat aequales, seu $\frac{dy}{dx}$ factorem cubicum $(x-f)^3$, tum posito $x=f$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ & $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; non autem $\frac{d^4y}{dx^4}$. Huius ergo termini valor si fuerit affirmatiuus indicabit minimum, sin negatiuus, maximum. Judicium ergo ante explicatum huc redit, ut si expressio $\frac{dy}{dx}$ factorem habuerit $(x-f)^n$, existente n numero impari, functio y , si in ea ponatur $x=f$, valorem sit acceptura vel maximum vel minimum; sin autem exponens n fuerit numerus par, tum substitutio $x=f$ neque maximum neque minimum valorem producat.

258. Deinde inuentio maximi ac minimi saepe numero non mediocriter adiuuabitur sequentibus considerationibus. Quibus scilicet casibus functio y sit maximum vel minimum, iisdem casibus fiet quoduis eius multipulum ay , si qui-

quidem a fuerit quantitas affirmatiua, itemque y^3, y^5, y^7 , &c. atque generaliter ay^n , si quidem n fuerit numerus affirmatiuus impar, pariter maximum vel minimum; quoniam huiusmodi formulae ita sunt comparatae, ut crescente y crescant, & decresciente y decrescant. Quibus autem casibus fit y maximum vel minimum, iisdem casibus $-y, -ay, b - ay$, & generaliter $b - ay^n$ existente n numero affirmatiuo impari, fiet ordine inuerso vel minimum vel maximum. Similiter quibus casibus y fit maximum vel minimum, iisdem casibus formulae hae $\frac{a}{y}, \frac{a}{y^3}, \frac{a}{y^5}$, & generaliter $\frac{a}{y^n} \pm b$, denotante a quantitatem affirmatiuam & n numerum affirmatiuum imparem, fient inuerso ordine vel minimum vel maximum; si autem a fuerit quantitas negatiua, tum istae formulae maximum impetrabunt valorem, si y fuerit maximum, & minimum, si y fit minimum.

259. Ad potestates autem pares haec non item traduci possunt: quoniam enim, si y valores recipit negatiuos, eius potestates pares y^2, y^4 , &c. valores affirmatiuos inducunt, fieri potest, ut dum y minimum valorem negatiuum scilicet recipit, eius potestates pares fiant maxima. Huius igitur conditionis ratione habita affirmare poterimus, si y fuerit maximum vel minimum, existente eius valore affirmatiuo, tum eius potestates pares y^2, y^4 , &c. quoque fore maxima vel minima. Sin autem valor ipsius y negatiuus fuerit maximum, tum eius quadratum yy accepturum esse valorem minimum, & contra si valor

E e e e

ipfius

ipsius y negatius sit minimum, tum y^2 , y^4 , &c. fore maximum. Quodsi vero exponentes ipsius y pares fuerint negatiui, tum contrarium eueniet. Ceterum quae hic de exponentibus paribus & imparibus annotauimus, ea non solum pro numeris integris valent, sed etiam pro fractis, quorum denominatores sunt numeri impares; in hoc enim negotio fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, &c. numeris imparibus, at $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, &c. numeris paribus aequivalent.

260. Sin autem denominatores fuerint numeri pares, tum, quoniam si y negatiuum habet valorem, eius potestates $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{3}{4}}$, &c. fiunt imaginariae; hoc tantum de iis affirmari poterit, si valor ipsius y affirmatiuus fuerit maximum vel minimum, tum quoque $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{3}{2}}$, $y^{\frac{1}{4}}$, &c. fore pariter vel maxima vel minima; contra autem $y^{-\frac{1}{2}}$, $y^{-\frac{3}{2}}$, $y^{-\frac{1}{4}}$, &c. minima vel maxima. Quia autem haec irrationalia simul geminos valores habent, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum, de negatiuis contrarium erit tenendum, quod hic de affirmatiuis diximus. Sin autem valor ipsius y negatiuus euadat maximum vel minimum, tum quia huiusmodi potestates omnes fiunt imaginariae, neque maximis neque minimis annumerari poterunt. His igitur subsidiis inuestigatio maximi & minimi saepe admodum reddetur facilis, quae alias futura esset vehementer difficilis.

261. Quoniam haec proprie ad functiones rationales, quippe quae sunt solae uniformes, pertinent, primum functiones integras euoluamus, atque maxima minimaque quae in ipsis occurrunt indagemus. Cum igitur huiusmodi functiones ad hanc formam referantur:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

primum patet earum valorem maiorem fieri non posse, quam si ponatur $x = \infty$; tum vero si $x = -\infty$ valor huius formulae prodit $= \infty^n$, si n sit numerus par, at $= -\infty^n$ si n sit numerus impar, qui propterea valor erit omnium minimus. Dantur autem praeterea saepe alia maxima & minima eo sensu, quem his vocibus attribuimus, quae sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire valores ipsius x , quibus haec functio $(x-a)^n$ fit maximum, vel minimum.

Posito $(x-a)^n = y$, erit $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, quo posito $= 0$, fiet $x = a$. Cum igitur $\frac{dy}{dx}$ factorem habeat $(x-a)^{n-1}$, ex §. 257. intelligitur y maximum minimumue esse non posse, nisi sit $n-1$ numerus impar, seu n numerus par. Quia autem dum fit

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

hoc est numerus affirmatiuus, sequitur, valorem ipsius y posito $x = a$ proditurum esse minimum. Quod quidem

E e e e 2 faci-

facile patet; nam posito $x = a$ fit $y = 0$; & si x ponatur vel maius vel minus quam a , ob n numerum parem, accipiet y valorem positivum hoc est nihilo maiorem; sin autem n fuerit numerus impar, tum functio $y = (x-a)^n$ neque maximum neque minimum admittit. Perspicuum autem porro est hoc idem valere, si n fuerit numerus

fractus siue impar siue par. Scilicet $(x-a)^{\frac{\mu}{\nu}}$ fiet posito $x = a$ minimum, si μ fuerit numerus par & ν impar; sin autem vterque fuerit impar, neque maximum dabitur neque minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire casus quibus valor huius formulae $xx + 3x + 2$ fit maximum vel minimum.

Ponatur $xx + 3x + 2 = y$, erit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$.

Statuatur ergo $2x + 3 = 0$, fiet $x = -\frac{3}{2}$; qui casus vtrum maximum an minimum producat, cognoscetur ex valore $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, qui cum sit affirmativus, quicquid sit x , indicat minimum. Posito autem $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{5}{4}$, & si alii quicunque valores ipsi x tribuantur, valor ipsius y inde oriundus perpetuo maior erit quam $-\frac{5}{4}$. Ex natura quoque ipsius formulae $xx + 3x + 2$ perspicitur, eam minimum valorem habere debere; nam cum in infinitum excreseat siue ponatur $x = +\infty$ siue $x = -\infty$, necesse est, ut quispiam valor ipsius x ipsi y omnium minimam quantitatem inducat.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire casus, quibus expressio haec $x^3 - axx + bx - c$ maximum minimumue valorem accipit.

Posito $y = x^3 - axx + bx - c$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$

& $\frac{d^2y}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Statuatur ergo

$\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b = 0$; erit $x = \frac{a \pm V(aa - 3b)}{3}$,

ex quo intelligitur, nisi sit $aa > 3b$, formulam propositam neque maximum neque minimum esse habituram. Sin autem sit $aa > 3b$, duobus casibus fit maximum vel minimum. Hinc vero oritur $\frac{d^2y}{2dx^2} = \pm V(aa - 3b)$, vnde intel-

ligitur nisi sit $aa = 3b$, valorem $x = \frac{a + V(aa - 3b)}{3}$

reddere formulam $y = x^3 - axx + bx - c$ minimam, alterum vero $x = \frac{a - V(aa - 3b)}{3}$ maximam.

Quanti autem futuri isti sint ipsius y valores, cum sit $3xx - 2ax + b = 0$ seu $x^3 - \frac{2}{3}axx + \frac{1}{3}bx = 0$; erit $y = -\frac{1}{3}axx + \frac{2}{3}bx - c$ & ob $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$, fit

$y = \frac{2}{9}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(aa - 3b)}{27} + \frac{2(aa - 3b)V(aa - 3b)}{27}$

$+ \frac{ab}{9} - c$, siue $y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \pm \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}}$,

vbi signum superius valet pro minimo, inferius autem

E e e e 3

pro

pro maximo. Restat ergo casus quo $na = 3b$, in quo cum fiat $\frac{ddy}{dx^3} = 0$, sequens vero terminus $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$, non sit $= 0$, sequitur hoc casu formulam propositam neque maximum neque minimum esse recepturam.

EXEMPLUM IV.

Invenire casus quibus haec functio ipsius x ;

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

fit maximum vel minimum.

Posito $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, erit

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22$$

Statuatur nunc $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

seu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, orientur tres valores reales pro x ; I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$. Ex primo valore fit

$\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, ideoque posito $x = 1$ functio proposita fit minimum. Ex secundo valore $x = 2$ fit

$\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, ideoque functio proposita maximum. Ex

tertio valore $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = +4$, ideoque functio proposita iterum minimum.

EXEM-

EXEMPLUM V.

Proposita sit haec functio $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, quae,
quibus casibus fiat maximum minimumue
quaeritur.

Cum sit $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$, formetur aequatio
 $x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$, cuius radices sunt I. & II. $x = 0$;
III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Quoniam prima & secunda ra-
dices sunt aequales, ex iis neque maximum neque mini-
mum sequitur, fit enim $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, at $\frac{d^3y}{2dx^3}$ non evanescit.
Tertia radix autem $x = 1$, ob $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$
praebet $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, hocque ergo casu functio fit maxi-
mum. Ex quarta radice $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = 45$, ideo-
que functio proposita minimum.

EXEMPLUM VI.

Invenire casus quibus haec formula

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

fit maximum vel minimum.

Erit ergo $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2$, &
 $\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$. Formetur aequa-
tio $x^5 - x^4 + x^3 - xx = 0$, quae cum in factores
res resoluta fit $x^2(x-1)(xx+1) = 0$, duas habet ra-
dices

lices aequales $x = 0$, & praeterea radicem $x = 1$, duasque insuper ex $xx + 1 = 0$ imaginarias. Cum igitur binae radices aequales $x = 0$ neque maximum neque minimum exhibeant, tantum considerata superest radix $x = 1$, ex qua fit $\frac{ddy}{60dx^2} = 2$, cuius valor affirmatiuus indicat minimum.

262. Determinatio ergo maximorum & minimorum pendet a radicibus aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = 0$, cuius potestas summa, cum sit vno gradu inferior quam in ipsa functione proposita y , si quidem haec fuerit functio rationalis integra: manifestum est si in genere proponatur haec functio:

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = y$
eius maxima & minima determinari per radices huius aequationis:

$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0.$

Ponamus huius aequationis radices reales secundum ordinem quantitatis dispositas esse α , ϵ , γ , δ , &c. ita ut α sit maxima $\epsilon < \alpha$, $\gamma < \epsilon$, &c. Ac primo quidem si hae radices omnes fuerint inaequales, vnaquaeque formulae propositae y inducet valorem maximum vel minimum; totque idcirco functio y habebit maxima vel minima, quo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habuerit radices reales inaequales. Sin autem duae pluresue radices inter se fuerint aequales, res ita se habebit, ut duae radices aequales

les neque maximum neque minimum exhibeant; ternae vero radices aequales vni aequiualeant; atque in genere si numerus radicum aequalium fuerit par, nullum inde resultat maximum minimumue; si autem sit impar, vnum inde oritur siue maximum siue minimum.

263. Quoniam autem radices maxima, & quae minima producant, sine subsidio regulae ante traditae ita definiri poterit. Cum functio y posito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipsius x intra limites ∞ & a , ullum producant siue maximum siue minimum; perspicuum est valores functionis y , dum loco x successive valores ab ∞ vsque ad a substituuntur, continuo decrescere oportere; ideoque valor $x = a + \omega$ functioni y maiorem valorem inducet, quam valor $x = a$: vnde cum $x = a$ maximum minimumue producat, necesse est, ut hoc casu functio y fiat minimum. Vterius ergo x diminuendo seu ponendo $x = a - \omega$, valor ipsius y iterum crescet, donec fiat $x = b$, quae est secunda aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix maximum minimumue producens: quare haec secunda radix $x = b$ maximum praebabit, & valor $x = b - \omega$ minorem efficiet functionem y , quam $x = b$, donec perueniatur ad $x = c$, quae consequenter iterum minimum generabit. Ex quo ratiocinio perspicitur, radices aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ primam, tertiam, quintam, &c. minima, secundam autem, quartam, sextam &c. maxima exhibere. Simul autem hinc intelligitur in casu

duarum radicum aequalium maximum & minimum coalescere, sicque neutrum locum habere.

264. Si ergo in functione proposita

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

maximus exponens n fuerit numerus par, aequatio

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \&c. = 0;$$

erit gradus imparis, ideoque vel vnam habebit radicem realem, vel tres, vel quinque, vel numero impares. Si vnica radix fuerit realis, ea dabit minimum; sin tres fuerint reales, maxima praebebit minimum, media maximum, & minima iterum minimum; & si quinque radices fuerint reales, functio y tria habebit minima & duo maxima; sicque porro. At si exponens n fuerit numerus impar, aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad gradum parem pertinebit, ideoque vel nullam habebit radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel sex, &c. Primo casu functio y neque maximum habebit neque minimum: altero casu, quo duae dantur radices, earum maior minimum, minor autem maximum indicabit: quatuor autem radicum prima (quae est maxima) & tertia minimum, secunda vero & quarta maximum producant. Perpetuo autem quotcunque radices fuerint reales, maxima & minima se mutuo alternatim insequuntur.

265. Progrediamur ad functiones racionales fractas, quibus altera species functionum vniformium constituitur.

Sit

Sit igitur $y = \frac{P}{Q}$, existentibus P & Q functionibus quibuscunque ipsius x ; ac primo quidem apparet, si ipsi x eiusmodi valor tribuatur, ut fiat $Q = 0$, nisi simul P evanescat, functionem y evadere infinitam, quod utique maximum videatur. Nihilo vero minus iste casus pro maximo haberi nequit; cum enim fractio inversa $\frac{Q}{P}$ iisdem casibus fiat minimum, quibus proposita $\frac{P}{Q}$ fit maximum, deberet fractio $\frac{Q}{P}$ fieri minimum, si Q evanescit; hoc autem non semper evenit, propterea quod adhuc minores valores, negativos scilicet, induere posset. Hoc igitur dubio exempto, simul regula ante data confirmatur, quod maxima & minima ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ elici debeant. Fiet ergo casu proposito $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; ideoque $QdP - PdQ = 0$; huiusque aequationis radices efficient functionem y vel maximum vel minimum. Atque si dubium sit, utrum maximum an minimum locum habeat, confugiendum est ad valorem $\frac{ddy}{dx^2}$, qui si fuerit affirmatiuus minimum indicabit, sin autem sit negatiuus maximum. Quod si vero & hic valor $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescat, quod evenit, si aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habeat duas pluresue ra-

F f f f 2

dices

dices aequales; perpetuo tenendum est radices aequales numero pares neque maximum neque minimum producere.

EXEMPLUM I.

Inuenire casus, quibus functio $\frac{x}{1+xx}$ fit maximum vel minimum.

Primum quidem apparet, hanc functionem in nihilum abire casibus tribus $x = \infty$, $x = 0$ & $x = -\infty$, vnde ad minimum duo recipiet siue maxima siue minima. Ad quae inuenienda ponatur $y = \frac{x}{1+xx}$; eritque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2} \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x+2x^3}{(1+xx)^3}.$$

Jam statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $1-xx = 0$, & vel $x = +1$ vel $x = -1$.

Priori casu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$; ideoque y maxim. $= \frac{1}{2}$,

posteriori $x = -1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$; ideoque y minim. $= -\frac{1}{2}$.

Haec quoque facilius inueniuntur, si fractio proposita $\frac{x}{1+xx}$ inuertatur, ponendo $y = \frac{1+xx}{x} = x + \frac{1}{x}$, dummodo recordemur tum quae maxima inueniuntur. in minima & vicissim transmutari debere. Erit autem

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{x^3}.$$

Statuto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, fit $xx - 1 = 0$, indeque vel $x = +1$ vel $x = -1$ vt ante.

Atque

Atque casu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, ideoque y minimum,
 & formula proposita $\frac{1}{y}$ maximum. Casu autem $x = -1$,
 fit $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, vnde y maximum & $\frac{1}{y}$ minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire casus quibus formula $\frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ fit maximum
 vel minimum.

Posito $y = \frac{xx-3x+2}{xx+3x+2}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2-12}{(xx+3x+2)^2}$
 & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{12x^3+72x+72}{(xx+3x+2)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, fiet
 vel $x = +\sqrt{2}$ vel $x = -\sqrt{2}$. Priori casu $x = +\sqrt{2}$,
 erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2}+72}{(4+3\sqrt{2})^3}$, ideoque affirmativum, ob de-
 nominatorem affirmativum: hinc erit y minimum $=$
 $\frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}-17 = -0,02943725$. Posteriori casu
 $x = -\sqrt{2}$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{48\sqrt{2}+72}{(4-3\sqrt{2})^3} = -\frac{24(3-2\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})^3}$,
 cuius valor ob numeratorem affirmativum & denomi-
 natorem negativum erit negativus, ideoque y fiet maxi-
 mum $= \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2}-17 = -33,97056274$.

Qui valor etsi minor est quam prior minimus, tamen ideo
 est maximus, quod maior sit contiguus proximis, qui ori-

untur, si loco x vel aliquantillum maiores vel minores valores quam $-\sqrt{2}$ substituantur. Cum igitur $\sqrt{2}$ inter limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$ contineatur, probatio facile instituitur hoc modo:

$$\text{si } x = \frac{4}{3} \quad \text{fit } y = -\frac{2}{70} = -0,0285$$

$$\text{si } x = \sqrt{2} \quad \text{fit } y = 12\sqrt{2} - 17 = -0,0294 \text{ minimum}$$

$$\text{si } x = \frac{3}{2} \quad \text{fit } y = -\frac{1}{35} = -0,0285$$

$$\text{si } x = -\frac{4}{3} \quad \text{fit } y = -35$$

$$\text{si } x = -\sqrt{2} \quad \text{fit } y = -33,970 \text{ maximum}$$

$$\text{si } x = -\frac{3}{2} \quad \text{fit } y = -35.$$

EXEMPLUM III.

Invenire casus, quibus formula $\frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$ fit maximum vel minimum.

Ponatur $y = \frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$, eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{2xx - 4x}{(xx + x - 1)^2}$ &
 $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4x^3 + 12xx + 4}{(xx + x - 1)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit vel
 $x = 0$ vel $x = 2$: priori casu fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, ideoque
 erit y maximum $= 1$. Posteriori casu $x = 2$ fit
 $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, ideoque y minimum $= \frac{3}{5}$, etiam si illud ma-
 ximum

ximum minus sit quam hoc minimum. Probatio patebit ex his positionibus :

$$\text{si } x = -\frac{1}{3}; \text{ erit } y = -\frac{13}{11}$$

$$\text{si } x = 0; \therefore y = -1 \text{ maximum}$$

$$\text{si } x = +\frac{1}{3}; \therefore y = -\frac{7}{5}$$

$$\text{si } x = 2 - \frac{1}{3}; \text{ erit } y = \frac{19}{31}$$

$$\text{si } x = 2; \therefore y = \frac{3}{5} \text{ minimum.}$$

$$\text{si } x = 2 + \frac{1}{3}; \therefore y = \frac{37}{61}$$

Quod autem, si ponatur $x = 1$, fiat $y = 1$, ideoque > -1 , causa est, quod inter valores ipsius x , 0 & 1 contineatur vnus, quo fit $y = \infty$.

EXEMPLUM VI.

Quaerantur casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$ fiat maxima vel minima.

$$\text{Posito } y = \frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}, \text{ erit } \frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 - 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$$

$$\& \frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^2 + 18x^2 - 24x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}. \text{ Habe-}$$

bimus ergo hanc aequationem: $x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$, quae resoluitur in has duas: $xx - 1 = 0$ & $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$, quarum illius radices sunt $x = +1$ & $x = -1$; haec vero

vero resoluta dat $xx = -\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, ex qua nulla radix realis emergit. Duarum igitur radicum inuentarum prior $x = +1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = -8$, ac propterea y maximum $= 2$; altera radix $x = -1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = +8$ ac propterea y minimum $= -2$.

EXEMPLUM V.

Inuenire casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$ sit maximum vel minimum.

Posito $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$

& $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - x^2 + 1)^3}$. Facto autem $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, quae diuisa per $xx + 1$ dat $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, haecque vltius resoluitur in $xx - x - 1 = 0$ & $xx + x - 1 = 0$, vnde sequentes quatuor oriuntur radices reales:

$$\text{I. } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \text{II. } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{III. } x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \text{IV. } x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Quae cum omnes in aequatione $x^4 - 3xx + 1 = 0$ contineantur, posito $x^4 = 3xx - 1$ fiet pro omnibus

ddy

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10-20xx)}{8x^6} = \frac{5(1-2xx)}{2x^5} = \frac{5(1-2xx)}{2x(3xx-1)}$$

$$\& \quad y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx - 1}{2x}.$$

Pro duabus autem prioribus ex aequatione $xx = x + 1$

ortis erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2x+1)}{2x(3x+2)} = -\frac{5(2x+1)}{2(5x+3)}, \& \quad y = \frac{1}{2}.$

Prima igitur radix $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2+\sqrt{5})}{11+5\sqrt{5}},$

ideoque est y maximum. Secunda radix $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$ dat

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2-\sqrt{5})}{11-5\sqrt{5}} = -\frac{5(\sqrt{5}-2)}{5\sqrt{5}-11};$$

ideoque $y = \frac{1}{2}$ erit quoque maximum. Duae reliquae radices dant $y = -\frac{1}{2}$ minimum.

266. In his igitur exemplis exploratio, vtrum valor quispiam inuentus maximum an minimum producat, facilius institui poterit: cum enim fit $\frac{dy}{dx} = 0,$ valor ter-

mini $\frac{ddy}{dx^2},$ eius aequationis ratione habita, simplicius ex-

primi poterit. Sit enim proposita fractio $y = \frac{P}{Q};$ cum fit $dy = \frac{QdP - PdQ}{Q^2},$ & $QdP - PdQ = 0;$ erit

$$ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}.$$

At vero ob $QdP - PdQ = 0$ hic posterior terminus evanes-

G g g g

cit

cit, eritque $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(QdP - PdQ)}{QQ} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$;

Quoniam vero iudicium ex huius termini valore siue affirmatiuo siue negatiuo petitur, denominator autem Q^2 perpetuo fit affirmatiuus; ex solo numeratore negotium ita confici poterit, vt quoties $QddP - PddQ$ seu $\frac{d(QdP - PdQ)}{dx^2}$ fuerit affirmatiuum, minimum pronuncietur, sin fit negatiuum maximum. Siue postquam inuentum fuerit $\frac{dy}{dx}$, cuius forma erit huiusmodi $\frac{R}{QQ}$, tantum quaeratur $\frac{dR}{dx}$; & quae radix huic expressioni valorem affirmatiuum inducit, ex ea proueniet minimum, & contra maximum.

267. Si denominator fractionis propositae fuerit quadratum seu altior potestas quaecunque, ita vt sit $y = \frac{P}{Q^n}$, fiet $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$, & posito $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$; & maxima minimaque determinabuntur ex radicibus aequationis $R=0$. Cum deinde fit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$, ob $R=0$, fiet $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$; cuius valor affirmatiuus indicabit minimum, negatiuus autem maximum. Perspicuum autem est, si n fuerit numerus impar, ob Q^{n+1} semper affirmati-

matium, iudicium ex solo $\frac{dR}{dx}$ perfici posse; si autem n sit numerus par, adhibeatur formula $\frac{Q dR}{dx}$. Ponamus autem porro proponi huiusmodi fractionem $\frac{P^m}{Q^n} = y$, erit $dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$; si itaque ponatur $\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$, aequationis $R = 0$ radices indicabunt casus, quibus functio y fit vel maximum vel minimum. Cum igitur sit $\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$, erit: $\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}}$, & ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}$; quae insuper per quodcunque quadratum $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ diuidi potest, ad iudicium absoluendum. Praeterea vero quoque aequatio $P = 0$ dabit maximum vel minimum, si m fuerit numerus par; atque simili modo formulam inuersam $\frac{Q^n}{P^m}$ spectando, prodibit maximum vel minimum ponendo $Q = 0$, si n fuerit numerus par, uti supra §. 257. ostendimus: hic autem ad maxima vel minima hinc oriunda non respicimus, sed tantum ad vsum methodi explicandum ea indagamus, quae oriuntur ex aequatione $R = 0$.

EXEMPLUM I.

Proponatur fractio $\frac{(a + \epsilon x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$, quae, quo casu fiat maximum vel minimum, quaeritur.

Posito $y = \frac{(a + \epsilon x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$, primo quidem patet fore $y = 0$ si $x = -\frac{a}{\epsilon}$, & $y = \infty$ si $x = -\frac{\gamma}{\delta}$: quorum casuum ille dabit minimum, hic vero maximum, si m & n fuerint numeri pares. Praeterea vero erit: $\frac{dy}{dx} = \frac{(a + \epsilon x)^{m-1}}{(\gamma + \delta x)^{n+1}} [(m-n)\epsilon\delta x + m\epsilon\gamma - n\alpha\delta]$, ideoque $R = (m-n)\epsilon\delta x + m\epsilon\gamma - n\alpha\delta$. Quare posito $R = 0$, erit $x = \frac{n\alpha\delta - m\epsilon\gamma}{(m-n)\epsilon\delta}$. Deinde ob $\frac{dR}{dx} = (m-n)\epsilon\delta$, dispiciendum est, vtrum

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}\epsilon^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}} \left(\frac{\alpha\delta - \epsilon\gamma}{m-n} \right)^{m-n-2} \frac{dR}{dx}$$

fit quantitas affirmatiua an negatiua? priori casu formula proposita erit minimum, posteriori maximum. Sic si fuerit

$$y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}, \text{ fiet } \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{9}{8}, \text{ ideoque formula}$$

$\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ fiet minimum, si ponatur $x = 0$. Sin autem sit

$$y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}, \text{ erit } \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}}{n^{n+1}} \left(\frac{n-m}{2} \right)^{n-m+2} (m-n),$$

&

& $x = \frac{n+m}{n-m}$. Cum autem m & n ponantur numeri affirmatiui, iudicium petendum erit ex formula $(n-m)^{n-m+1} (m-n)^{n-m}$ seu $(n-m)^{n-m} (m-n)$. Si igitur fuerit $n > m$, valor erutus $x = \frac{n+m}{n-m}$ semper dabit maximum; fin autem sit $n < m$, numerus $m-n$ par dabit minimum, at impar, maximum: sic $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ fiet maximum posito $x = -5$; fit enim $y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{2}$.

EXEMPLUM II.

Proponatur formula $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$.

$$\text{Erit } \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3} (3-4x-xx),$$

$$\& \frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3} (2x+4),$$

vbi cum $(1+x)^2$ & $(1+xx)^3$ semper habeant valorem affirmatiuum, iudicium relinquetur formulae $-x-2$, quae si fuerit affirmatiua minimum, fin negatiua maximum indicat. At vero ex aequatione $3-4x-xx=0$ sequitur vel $x = -2 + \sqrt{7}$ vel $x = -2 - \sqrt{7}$. Priori casu fit $-x-2 = -\sqrt{7}$, ideoque fractio proposita erit maximum, posteriori vero casu minimum ob $-x-2 = +\sqrt{7}$. Posito autem $x = -2 + \sqrt{7}$, erit $1+x = -1 + \sqrt{7}$, & $1+xx = 12 - 4\sqrt{7}$, vnde

$$G g g g 3$$

$$y =$$

$$y = \left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{12 - 4\sqrt{7}} \right)^2 (\sqrt{7} - 1) = \frac{(2 + \sqrt{7})^2 (\sqrt{7} - 1)}{16} = \frac{17 + 7\sqrt{7}}{16} \\ = 2,220.$$

Posito autem $x = -2 - \sqrt{7}$ fiet $y = \frac{17 - 7\sqrt{7}}{16} = -0,0950.$

258. Dantur etiam functiones irrationales & transcendentes, quae proprietatem functionum uniformium habent, & hancobrem maxima & minima eodem modo inueniri possunt. Radices enim cubicae & omnium imparium potestatum reuera sunt uniformes, cum nonnisi vnicum valorem realem exhibeant: radices autem quadratae atque omnium potestatum parium, etsi reuera, quoties sunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmatiuum alterum negatiuum, tamen vnusquisque seorsim spectari potest, hocque sensu etiam maxima & minima inuestigari possunt. Sic si y fuerit functio quaecunque ipsius x , etsi \sqrt{y} geminum habet valorem tamen vterque seorsim tractari poterit. Scilicet $+\sqrt{y}$ maximum vel minimum habebit valorem, si y talem habuerit, dummodo fuerit affirmatiuus; quia alioquin \sqrt{y} euaderet imaginarium. Vice versa autem $-\sqrt{y}$ fiet minimum vel maximum, iisdem casibus, quibus $+\sqrt{y}$ fit maximum vel minimum. Potestas autem quaecunque $y^{\frac{m}{n}}$, iisdem casibus fiet maximum vel minimum, siquidem n fuerit numerus impar; at si n fuerit numerus par, ii tantum casus valent, quibus y induit valorem affirmatiuum: hisque casibus ob ancipitem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

269. Quoniam aequatio differentialis, quae ex potestate functionis y^m nascitur, est $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$, cuius

radices simul casus, quibus potestas surda $y^{\frac{m}{2}}$ fit maximum vel minimum, indicant, ad hoc indagandum duplex habetur aequatio, altera $y^{m-1} = 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, atque tum solum maxima & minima exhibet, si $m-1$ fuerit numerus impar, seu si m fuerit numerus par, ob rationes §. 257. allegatas. Quare cum n sit numerus impar, si m fuerit numerus par, si numeros pares per 2μ & impares per $2\nu-1$ indicemus, functio $y^{2\mu:(2\nu-1)}$ euadet maxima vel minima tribuendis ipsi x valoribus, quos tam ex hac aequatione $y = 0$ quam ex hac $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiscitur. Sin autem m sit numerus impar, functio $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$ vel $y^{(2\mu-1):2\nu}$ tum solum fit maxima vel minima, cum loco x substituitur valor ex hac aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac posteriori quidem casu $y^{(2\mu-1):2\nu}$ maxima & minima tantum proueniunt, si y ab inuentis ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valoribus, affirmatiuos recipiat valores.

270. Sic ista formula $x^{\frac{1}{3}}$ fit minimum, ponendo $x = 0$, propterea quod hoc casu x^2 fit minimum. Nisi
au-

autem formulam $x^{\frac{2}{3}}$ ad formam x^2 reducamus, methodus ante tradita hoc minimum indicaret; propterea quod casu $x=0$, termini seriei $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$ unde iudicium peti debet, praeter primum omnes fiunt infiniti. Facto enim $y = x^{\frac{2}{3}}$ erit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}}; \quad \&c.$$

Hinc neque aequatio $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$ ostendit valorem

$x=0$, neque termini sequentes rationem maximi minimiue indicant. Cum igitur assumimus seriem

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c. \text{ fieri conuergentem,}$$

si ω statuatur quantitas valde parua; ii casus utique methodum generalem effugiunt, quibus haec series fit divergens, quod euenit exemplo hic allato $y = x^{\frac{2}{3}}$, si ponatur $x=0$. Quamobrem his casibus ea reductione, qua ante vsi sumus, erit opus, quo expressio proposita ad aliam formam reuocetur, quae huic incommodo non sit subiecta. Hoc autem tantum paucissimis casibus vsu

venit, qui in formula $y \frac{2\mu}{2\nu-1}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic si requirantur maxima mini-

maue formulae $y \frac{2\mu}{2\nu-1} z$, existente z functione quacun-

cunque ipsius x , inuestigetur forma hæc $y^{2\mu} z^{2\nu-1}$, quippe quae iisdem casibus fit maxima vel minima, quibus ipsa proposita.

271. Hoc casu excepto, qui iam facile expeditur, functiones, quae continent quantitates irrationales, eodem modo quo rationales tractari, earumque maxima & minima determinari possunt, id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Proposita sit formula $V(aa+xx)-x$, quae quibus casibus fiat maxima vel minima, quaeritur.

Posito $y = V(aa+xx) - x$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{V(aa+xx)} - 1$,
 & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{aa}{(aa+xx)^{3/2}}$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit:
 $x = V(aa+xx)$, ideoque $x = \infty$, ac fit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Si-
 mili vero modo fiunt sequentes termini $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; &c.
 omnes $= 0$; ex quo iudicium incertum relinquitur, vtrum
 fit maximum an minimum? ratio est quod reuera tam
 fiat $x = -\infty$, quam $x = +\infty$. Interim ponendo
 $x = +\infty$, ob $V(aa+xx) = x + \frac{aa}{2x}$, fit $y = 0$, qui
 valor omnium est minimus.

EXEMPLUM II.

Quaerantur casus, quibus haec forma $V(aa+2bx+mx^2)-nx$ fit maximum vel minimum.

Posito $y = V(aa+2bx+mx^2) - nx$, erit:
 $\frac{dy}{dx} = \frac{b+mx}{V(aa+2bx+mx^2)} - n$, quo facto $= 0$, erit:
 $bb+2mbx+mx^2 = nnaa+2nnbx+nnnx^2$,
 seu $xx = \frac{2bx(nn-m)+nnaa-bb}{mm-mnn}$, ideoque
 $x = \frac{(nn-m)b \pm V[mnn(m-nn)aa-nn(m-nn)bb]}{m(m-nn)}$,

siue $x = -\frac{b}{m} \pm \frac{n}{m} V \frac{maa-bb}{m-nn}$: vnde fit
 $V(aa+2bx+mx^2) = \frac{b+mx}{n} = \pm V \frac{maa-bb}{m-nn}$.

Cum igitur fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{(aa+2bx+mx^2)^{\frac{3}{2}}}$, erit:
 $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{\left(\frac{maa-bb}{m-nn}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm(m-nn)V(m-nn)}{V(maa-bb)}$.

Nisi ergo fuerit $\frac{m-nn}{maa-bb}$ quantitas affirmatiua, maximum minimumue plane non datur. Sin autem fit quantitas affirmatiua, signum superius dabit minimum si $m > nn$, maximum vero si $m < nn$: contrarium euenit, si signum inferius valeat. Si ergo fit $m=2$, $n=1$, & $b=0$, formula
 $V(aa$

$\sqrt[4]{(aa+2xx)}-x$ fit minimum ponendo $x=+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2aa}=\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$,
 at maximum ponendo $x=-\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$. Erit ergo minimum
 $=a\sqrt[4]{2}-\frac{a}{\sqrt[4]{2}}=\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$, & maximum $=a\sqrt[4]{2}+\frac{a}{\sqrt[4]{2}}=\frac{3a}{\sqrt[4]{2}}$.

EXEMPLUM III.

Quærantur casus, quibus haec expressio

$$\sqrt[4]{(1+mx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$$

fiat maximum vel minimum.

Cum fit $\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3}{(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}} - \frac{nx^3}{(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}}$, fiet

$$mx^3(1-nx^4)^{\frac{3}{4}} = nx^3(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}, \text{ ideoque } m^4(1-nx^4)^3 = n^4(1+mx^4)^3,$$

$$\text{feu } n^4 - m^4 + 3mn(n^3 + m^3)x^4 + 3m^2n^2(n^2 - m^2)x^8 + m^3n^3(n+m)x^{12} = 0.$$

Nisi ergo haec aequatio radicem positivam habeat pro x^4 , maximum minimumue prorsus non datur. Quia haec aequatio generaliter commodè resolvi nequit, fiet

$$\text{enim } x^4 = \frac{m^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})} \text{ feu } x^4 = \frac{m - \sqrt[3]{m^2n} + \sqrt[3]{mn^2} - n}{mn}$$

ponamus pro casu speciali $m = 8n$, eritque

$$-4095 + 24.513nx^4 - 3.63.64n^2x^8 + 9.512n^3x^{12} = 0$$

$$\text{feu } 512n^3x^{12} - 1344n^2x^8 + 1368nx^4 - 455 = 0$$

ponatur $8nx^4 = z$, erit $z^3 - 21z^2 + 171z - 455 = 0$
 quae diuisorem habet $z = 5$, alterque factor erit:

$$Hh h h 2 \quad \quad \quad 22-$$

$zz - 16z + 91 = 0$ radices continens imaginarias.

Erit ergo tantum $z = 8nx^4 \pm 5$, ideoque $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$

qui valor reddet expressionem $\sqrt[4]{1+8nx^4} + \sqrt[4]{1-nx^4}$ maximum vel minimum. Quorum vtrum eueniat? quaeratur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1+mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1-nx^4)^{\frac{7}{4}}}. \text{ At ob } m = 8n,$$

$$\text{posito } x^4 = \frac{5}{8n}, \text{ erit } \frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{(3:8)^{\frac{7}{4}}} \right) xx =$$

$$- \frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}} \text{ ideoque negativum, ergo fiet } \sqrt[4]{1+8nx^4}$$

$$+ \sqrt[4]{1-nx^4} \text{ maximum posito } x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}. \text{ Erit vero hoc}$$

$$\text{maximum} = \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}. \text{ Si loco } nx^4 \text{ pona-$$

mus u , patet hanc expressionem $\sqrt[4]{1+8u} + \sqrt[4]{1-u}$ fieri maximam, posito $u = \frac{5}{8}$, huncque valorem maxi-

$$\text{mum fore} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627. \text{ Quicumque ergo valor}$$

praeter $\frac{5}{8}$ pro u scribatur, expressio minorem accipiet valorem.

272. Simili modo maxima ac minima determinabuntur, si quantitates quoque transcendentes in expressione proposita insint. Nisi enim functio proposita fuerit

rit multiformis, atque aliquot eius significatus simul considerari debeant, radices aequationis differentialis ostendent maxima vel minima, nisi affuerint radices aequales, quarum numerus sit par. Hanc ergo inuestigationem in aliquot exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire numerum, qui ad suum logarithmum minimam teneat rationem.

Dari huiusmodi rationem minimam $\frac{x}{lx}$ inde patet, quod haec ratio tam posito $x = 1$, quam $x = \infty$ fiat infinita. Vicissim ergo habebit fractio $\frac{lx}{x}$ alicubi maximum valorem, eodem scilicet casu, quo $\frac{x}{lx}$ fit minimum. Ad hunc casum indagandum ponatur $y = \frac{lx}{x}$, fietque $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Quo nihilo aequali posito erit $lx = 1$, & quia hic logarithmum hyperbolicum assumimus, si e ponatur numerus cuius logarithmus hyperbolicus sit $= 1$, erit $x = e$. Cum igitur omnes logarithmi ad hyperbolicos in data sint ratione, erit in quocunque logarithmorum canone $\frac{e}{le}$ minimum, seu $\frac{le}{e}$ maximum. Quoniam in logarithmis tabularibus est $le = 0,4342944819$, fractio $\frac{lx}{x}$ perpetuo erit minor

H h h h 3

quam

quam $\frac{4342944819}{27182818284}$, seu proxime quam $\frac{47}{305}$: neque vltus datur numerus, qui ad suum logarithmum minorem teneat rationem quam 305 ad 47. Esse autem hoc casu $\frac{lx}{x}$ maximum inde patet, quod ob $\frac{dy}{dx} = \frac{1-lx}{xx}$, fiat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1-lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, propter $1-lx = 0$, ideoque negativum.

EXEMPLUM II.

Invenire numerum x , ut haec potestas $x^{1:x}$ fiat maximum.

Dari huius formulae valorem maximum inde patet, quod numeris loco x substituendis fit

$$1^{1:1} = 1,000000$$

$$2^{1:2} = 1,414213$$

$$3^{1:3} = 1,442250$$

$$4^{1:4} = 1,414213$$

Ponatur ergo $x^{1:x} = y$, eritque $\frac{dy}{dx} = x^{1:x} \left(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx} \right)$. Quo valore nihilo aequali posito, erit $1-x = 1$ & $x = e$, existente $e = 2,718281828$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = (1-lx) \frac{x^{1:x}}{xx}$,

erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{x^{1:x}}{x^3} + (1-lx) d \frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$ ob $1-lx = 0$.

Quare cum sit $\frac{ddy}{dx^2}$ quantitas negativa, fiet $x^{1:x}$ maximum casu

casu $x = e$. Cum autem sit $e = 2,718281828$, reperitur fore $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667861009764$, qui valor obtinetur facile ex serie $e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \&c.$

Hoc exemplum quoque ex praecedenti resolvitur: si enim sit $x^{1/x}$ maximum, quoque eius logarithmus, qui est $\frac{\ln x}{x}$, debet esse maximum; quod quo fiat, debet esse $x = e$, vti inuenimus.

EXEMPLUM III.

Inuenire arcum x , ut sit eius sinus maximus vel minimus.

Posito $\sin x = y$ erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$, ideoque $\cos x = 0$, vnde prodeunt sequentes valores pro x : $\pm \frac{\pi}{2}$; $\pm \frac{3\pi}{2}$; $\pm \frac{5\pi}{2}$ &c. Fit autem $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$. Cum igitur hi valores pro x substituti dent pro $\sin x$ vel $+1$ vel -1 , illi erunt maximi, hi vero minimi, vti constat.

EXEMPLUM IV.

Inuenire arcum x , ut rectangulum $x \cdot \sin x$ fiat maximum.

Dari maximum inde patet, quod posito vel $x = 0$ vel $x = 180^\circ$ utroque casu rectangulum propositum evanescat. Sit igitur $y = x \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x$,
ideo-

ideoque $\operatorname{tg} x = -x$. Sit $x = 90^\circ + u$, erit $\operatorname{tg} x = -\cot u$,
 ergo $\cot u = 90 + u$. Ad quam aequationem modo su-
 pra tradito resoluendam ponatur $z = 90 + u - \cot u$, sitque
 f valor arcus u quaesitus. Cum sit $dz = du + \frac{du}{\sin u^2}$,

$$\text{erit } p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin u^2}{1 + \sin u^2}; \quad dp = \frac{2 du \sin u \cos u}{(1 + \sin u^2)^2}; \quad \text{ideoque}$$

$$\frac{dp}{dz} = q = \frac{2 \sin u^3 \cos u}{(1 + \sin u^2)^3}; \quad dq = \frac{6 du \sin u^2 \cos u^2 - 2 du \sin u^4}{(1 + \sin u^2)^3}$$

$$- \frac{12 du \sin u^4 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^4}. \quad \text{Ergo } \frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin u^4 \cos u^2 - 2 \sin u^6}{(1 + \sin u^2)^4}$$

$$- \frac{12 \sin u^6 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^5} = \frac{6 \sin u^4 - 14 \sin u^6 + 4 \sin u^8}{(1 + \sin u^2)^5}. \quad \text{Ex qui-}$$

bus erit $f = u - pz + \frac{1}{2} qzz - \frac{1}{6} rzz^3 + \&c$. Ponatur,
 postquam aliquot tentaminibus proximus ipsius f valor
 est detectus, $u = 26^\circ, 15'$, erit $90 + u = 116^\circ, 15'$,
 & arcus cotangenti u aequalis ita definiatur:

$$A \quad 1 \cot u = 10,3070250$$

$$\text{subtrahatur} \quad 4,6855749$$

$$5,6214501$$

$$\text{Ergo } \cot u = 418263, 7''$$

$$\text{feu } \cot u = 116^\circ, 11', 31\frac{7}{8}''$$

$$\text{vnde } z = 3', 56\frac{3}{8}'' = 236, 3''.$$

Iam

Iam ad valorem termini p^z inueniendum, iste institua-
tur calculus :

$$\begin{array}{rcl}
 l \sin u & = & 9,6457058 \\
 l \sin u^2 & = & 9,2914116 \\
 1 + \sin u^2 & = & 1,19561 \\
 l(1 + \sin u^2) & = & 0,0775895 \\
 lp & = & 9,2138221 \\
 lz & = & 2,3734637 \\
 lpz & = & 1,5872858 \\
 \text{Ergo } pz & = & 38,6621 \text{ secundis} \\
 \text{feu } pz & = & 38'', 39''', 43'''' \\
 \text{ab } u & = & 26^\circ, 15' \\
 \text{fiet } f & = & 26^\circ, 14', 21'', 20''', 17''''
 \end{array}$$

& arcus quaesitus $x = 116, 14, 21, 20, 17$

Tertius vero terminus $\frac{1}{2} q^z = \frac{\sin u^3 \cos u}{(1 + \sin u^2)^3} z^z$ insuper
addi debet.

Cuius valor vt inueniatur, vnum z in partibus radii
exprimi debet, hoc modo :

$$\begin{array}{rcl}
 & l z'' & = 2,3734637 \\
 \text{add.} & & 4,6855749 \\
 \hline
 & & 7,0590386 \\
 \text{add.} & l \frac{\sin u^2}{1 + \sin u^2} z & = 1,5872858 \\
 \hline
 & & 8,6463244 \\
 \text{add.} & l \sin u & = 9,6457058 \\
 & l \cos u & = 9,9527308 \\
 \hline
 & & 8,2447600 \\
 \text{subtr.} & l(1 + \sin u^2)^2 & = 0,1551790 \\
 \hline
 & l \frac{1}{2} q z z & = 8,0895810 \\
 \text{Ergo} & \frac{1}{2} q z z & = 0,012291 \\
 \text{feu} & \frac{1}{2} q z z & = 44''''', 15'''''.
 \end{array}$$

Vnde & hoc termino adhibito fiet arcus quaesitus

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 21''', 0''''$$

maioribus autem logarithmis adhibitis reperitur

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 35''''', 47''''''.$$



CAPUT XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNC-
TIONUM MULTIFORMIUM PLURES-
QUE VARIABILES COMPLEC-
TENTIUM.

273.

Si y fuerit functio multiformis ipsius x , ita ut pro
vnoquoque valore ipsius x ea plures obtineat va-
lores reales; tum variato x plures illi ipsius y valores
ita inter se connectentur, ut plures series valorum succes-
suorum repraesentent. Si enim y tanquam applicatam
lineae curvae consideremus, x existente abscissa, quot y
habuerit valores reales diuersos, totidem diuersi eiusdem
curvae rami eidem abscissae x respondebunt: atque hinc
illi ipsius y valores successiui, qui eundem ramum con-
stituunt, cohaerere censendi sunt; valores autem ad di-
uersos ramos relati erunt inter se disiuncti. Tot igitur
series valorum cohaerentium ipsius y habebimus, quot
diuersos valores reales pro quouis ipsius x valore rece-
perit; atque in qualibet serie valores ipsius y , dum x
crescens assumitur, vel crescent vel decrescent, vel post-
quam creuerint iterum decrescent, vel vice versa. Ex
quo perspicuum est, in unaquaque valorum cohaeren-
tium serie aequae dari maxima minimaue, atque in fun-
ctionibus uniformibus.

I i i i 2

274.

274. Ad haec maxima minimaue determinanda eadem quoque methodus valebit, quam capite praecedente pro functionibus uniformibus tradidimus. Cum enim, si variabilis x incremento ω augeatur, functio y perpetuo recipiat hanc formam $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$ necesse est vt casu maximi minimiue terminus $\frac{\omega dy}{dx}$ euanescat, fiatque $\frac{dy}{dx} = 0$. Radices ergo huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipsius x valores indicabunt, quibus in singulis valorum ipsius y cohaerentium seriebus, maxima minimaue respondeant. Neque vero ambiguum erit, in quam valorum cohaerentium serie detur maximum minimumue. Cum enim in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambae insint variables x & y , valores ipsius x definiri nequeunt, nisi ope aequationis, qua relatio functionis y ab x continetur, variabilis y eliminetur; antequam autem hoc fit, peruenitur ad aequationem, qua valor ipsius y per functionem rationalem seu vniformem ipsius x exprimitur. Hinc inuentis valoribus ipsius x , cuique respondens valor ipsius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in serie valorum successiuorum cohaerentium, ad quam pertinet.

275. Iudicium autem, vtrum isti valores ipsius y sint maximi an minimi? instituetur eodem modo, quem
ante

ante indicauimus. Scilicet quaeratur valor ipsius $\frac{ddy}{dx^2}$ finitis terminis expressus, in eoque loco x substituatur vnusquisque ipsius x valor inuentus successive, simul autem pro y ponatur valor, qui ipsi pro quolibet ipsius x valore conuenit; quo facto dispiciatur, vtrum expressio $\frac{ddy}{dx^2}$ adeptura sit valorem affirmatiuum an negatiuum? priorique casu minimum, posteriori vero maximum indicabitur. Quodsi vero & $\frac{ddy}{dx^2}$ euanescat, tum procedendum erit ad formulam $\frac{d^3y}{dx^3}$, quae si eodem casu non euanescat, neque maximum habebitur neque minimum: sin autem quoque $\frac{d^3y}{dx^3}$ euanescat, iudicium formari oportebit ex formula $\frac{d^4y}{dx^4}$ eodem modo, quo ratione formulae $\frac{ddy}{dx^2}$ praecipimus. Atque si quoque $\frac{d^4y}{dx^4}$ quopiam casu euanescat, ad differentiale quintum ipsius y erit progrediendum: perpetuo autem quousque progredi necesse fuerit, iudicia ex differentialibus ordinum imparium similia sunt illi, quod de formula $\frac{d^3y}{dx^3}$ dedimus. His scilicet casibus in formulis $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. eousque erit pergendum, quoad

perueniatur ad talem, quae proposito casu non evanescat; quae si fuerit differentialis ordinis imparis, neque maximum neque minimum indicabitur, sin autem fuerit ordinis paris, eius valor affirmatiuus minimum, negatiuus vero maximum innuet.

276. Ponamus functionem y determinari ex x per aequationem quamcunque: quae aequatio si differentietur, induet huiusmodi formam $Pdx + Qdy = 0$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $\frac{P}{Q} = 0$ ideoque vel $P = 0$ vel $Q = \infty$.

Posterior quidem aequatio, si relatio inter x & y exprimitur per aequationem rationalem integram, locum habere nequit; quia vel x vel y vel vtramque fieri oporteret infinitam. Quare iudicium relinquetur aequationi $P = 0$, cuius radices, seu valores ipsius x , quos adipiscitur, postquam ope aequationis propositae variabilis y penitus fuerit eliminata, indicabunt casus, quibus valores ipsius y fiunt maximi vel minimi. Ad iudicium vero, vtrum prodeat maximum an minimum? absoluen-

dum, examinetur formula $\frac{ddy}{dx^2}$. Aequatio vero differentialis $Pdx + Qdy = 0$ denuo differentiata, si ponamus $dP = Rdx + Sdy$ & $dQ = Tdx + Vdy$, dabit (posito dx constante):

$$Rdx^2 + Sdx dy + Tdx dy + Vdy^2 + Qddy = 0.$$

Cum autem iam fit $\frac{dy}{dx} = 0$, aequatione per dx^2 divisa

$$\text{fiet } R + \frac{Qddy}{dx^2} = 0, \text{ ideoque } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}.$$

Hinc
in

in aequatione differentiali $Pdx + Qdy = 0$, differentietur tantum quantitas P , ponendo y constans, prodibitque Rdx , tum indagetur, valor fractionis $\frac{R}{Q}$, qui si fuerit affirmatiuus, maximum, sin negatiuus minimum indicabit.

277. Sit y functio biformis ipsius x , quae determinetur per hanc aequationem $yy + py + q = 0$, denotantibus p & q functiones quascunque ipsius x vniformes. Erit ergo differentiando $2ydy + pdy + ydp + dq = 0$, ideoque $Pdx = ydp + dq$. Posito igitur $P = 0$ erit $ydp + dq = 0$ prodibitque $y = -\frac{dq}{dp}$, ficque y per functionem ipsius x vniformem exprimitur, ita vt, quicunque valor pro x fuerit inuentus, ex eo & y valorem determinatum vnicum acquirat. Eliminatio vero nunc ipsius y erit facilis; nam si in aequatione proposita $yy + py + q = 0$ loco y valor $-\frac{dq}{dp}$ substituatur, habebitur $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, quae aequatio diuisa per dx^2 & resoluta praebebit valores ipsius x omnes, quibus maxima vel minima respondent: quod clarius fiet sequentibus exemplis.

EXEMPLUM I.

Proposita aequatione $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$
definire maxima vel minima functionis y .

Differentiata aequatione habebimus:

$$2ydy + mx dy + my dx + b dx + 2n x dx = 0$$

vnde

vnde fit $P = my + b + 2nx$ & $Q = 2y + mx$.

Posito ergo $P = 0$ fiet $y = -\frac{b+2nx}{m}$; qui valor in ipsa aequatione substitutus dat:

$$\frac{4nn}{mm}xx + \frac{4nb}{mm}x + \frac{bb}{mm} - 2nxx - bx + aa = 0$$

$$+ nxx + bx$$

seu $xx = \frac{4nbx + bb + mma}{mmn - 4nn}$; vnde fit

$$x = \frac{2nb \pm V[mnbb + mn(mm - 4n)aa]}{mmn - 4nn}$$

seu $x = \frac{2nb \pm mV[nbb + n(mm - 4n)aa]}{n(mm - 4n)}$

& $y = \frac{-mb \mp 2V[nbb + n(mm - 4n)aa]}{mm - 4n}$.

Tum posito solo x variabili fit $dP = 2ndx$, ideoque

$R = 2n$. At est $Q = 2y + mx = \pm \frac{V[nbb + n(mm - 4n)aa]}{n}$,

vnde $\frac{R}{Q} = \pm \frac{2nn}{V[nbb + n(mm - 4n)aa]}$, cuius numerator

$2nn$ cum sit perpetuo affirmatiuus, si signum superius valeat, prodibit pro y valor maximus, sin inferius prodibit minimus. Vbi sequentia annotari debent.

I. Si fuerit $m = 0$, ex aequatione $P = 0$ statim sequitur $x = -\frac{b}{2n}$, vt nulla eliminatione opus sit. Huicque va-

lori

lori geminus ipsius y respondet ob $y = \pm \frac{1}{2n} V(nbb - 4nnaa)$ quorum alter affirmatiuus est maximus; alter negatiuus minimus.

II. Si fit $n = 0$, fit $y = -\frac{b}{m}$, & x in infinitum excrescit, atque y per spatium infinitum eundem valorem retinet, ita vt neque maximus sit neque minimus.

III. Si fit $mm = 4n$, erit $4nbx + bb + mma = 0$ feu $x = \frac{bb + mma}{-mb}$; fietque $y = -\frac{b - 2nx}{m} = -\frac{2b - mmx}{m} = -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mma}{mb} = \frac{mma - bb}{mb}$.

Huic ergo valori ipsius $x = -\frac{mma - bb}{mb}$ alter ipsius y valor, qui respondet $\frac{mma - bb}{mb}$, erit maximus vel minimus. Quia autem, vt iste ipsius y valor prodeat, in expressione $y = -\frac{mb \mp 2V[nbb + n(mm - 4n)aa]}{mm - 4n}$ signum inferius valere debet, erit valor ipsius y minimus.

EXEMPLUM II.

Proposita aequatione $yy - xxy + x - x^3 = 0$ definire valores ipsius y maximos vel minimos.

Differentiata aequatione prodit:

$$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3xxdx = 0.$$

K k k k

Fic-

Fitque $P = 1 - 3xx - 2xy$ & $Q = 2y - xx$.

Quare posito $P = 0$, erit $y = \frac{1-3xx}{2x}$; ideoque hoc valore substituto :

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

feu $1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0$. Cuius vna radix est $x = -1$, cui respondet $y = 1$. At posito y constante fit $R = -6x - 2y$, ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$; quod casu $x = -1$ & $y = 1$ abit in -4 , ita vt valor ipsius $y = 1$ fit maximus. Ipsi $x = -1$ autem geminus valor ipsius y respondet ex aequatione $yy - y = 0$: alter ergo est $y = 0$, qui neque maximus est neque minimus. Quodsi aequatio illa quinti gradus per $x + 1$ diuidatur, prodit aequatio, cuius radices simpliciter exhiberi nequeunt.

EXEMPLUM . III.

*Sit proposita haec aequatio: $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$
ex qua maximi minimive valores ipsius y
requiruntur.*

Per differentiationem ergo prodibit haec aequatio :

$$2y dy + 2xx dy + 4xy dx + 4dx = 0$$

Factoque $\frac{dy}{dx} = 0$ erit $xy + 1 = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{x}$, qui valor substitutus in ipsa aequatione proposita oritur,

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

cuius

cuius radices sunt $x = 1$; $x = 1$; & $x = -\frac{1}{2}$.

Quia nunc est $\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy-4}{2y+2xx} = -\frac{2xy-2}{y+xx}$,

erit differentiando $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2y}{y+xx}$, posito y con-

stanti ob $dy = 0$ & facto $xy + 1 = 0$. Quare isti valores ita se habebunt

x	y	$\frac{d^2y}{dx^2}$
1	— 1	2
1	— 1	2
— $\frac{1}{2}$	2	— $\frac{16}{9}$

pro maximo.

Quoniam pro radicibus aequalibus fit $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, vtrum hoc casu maximum an minimum prodeat? non determinatur. Quia autem simul fit $y + xx = 0$; nequidem hoc casu erit $\frac{dy}{dx} = 0$; ob $P = 0$ & $Q = 0$ in fra-

ctione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$; quare cum primaria proprietas desit, neque maximum nec minimum habet locum. Indicatur autem hoc casu $x = 1$, ambos ipsius y valores inter se fieri aequales. Quam indolem infra fusius sumus exposituri, cum ad vsum calculi differentialis in doctrina de lineis curvis perueniemus. Etiam si enim haec materia & huc pertineat; tamen ne eam bis attingere opus sit, eam totam sequenti tractationi reservamus.

278. Datur vero insuper in functionibus multiformibus alia species maximorum ac minimorum, quae methodo haecenus tradita non inuenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari potest. Sit enim y functio quaecunque biformis ipsius x , ita ut, quicunque valor ipsi x tribuatur, pro y oriantur bini valores vel ambo reales vel ambo imaginarii. Ponamus hos ipsius y valores fieri imaginarios, si ponatur $x > f$, reales autem esse, si statuatur $x < f$; atque posito $x = f$ ambo ipsius y valores in vnum coalescent, qui fit $y = g$. Cum igitur si sumatur $x > f$; functio y nullum habeat valorem realem: si eveniat, ut posito $x < f$ ambo ipsius y valores fiant vel maiores quam g , vel minores quam g : priori casu valor $y = g$ erit minimus, posteriori maximus; quoniam illo casu minor est, quam ambo praecedentes, hoc vero maior. Neque hoc maximum minimumue methodo haecenus tradita reperietur, propterea quod hic non fit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sunt autem quoque haec maxima vel minima generis diuersi, cum talia non sint ratione valorum antecedentium & consequentium in serie cohaerentium; sed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum.

279. Evenit hoc si aequatio proposita fuerit huiusmodi $y = p \pm (f - x) \sqrt{(f - x)q}$, existentibus p & q functionibus ipsius x per $f - x$ non diuisibilibus; obtineatque q valorem affirmatiuum, si ponatur vel $x = f$ vel ali-

aliquanto maius minusue. Fiat $p = g$ posito $x = f$: & manifestum est, casu $x = f$ ambos ipsius y valores in vnum $y = g$ coalescere; posito autem $x > f$ ambo valores ipsius y fient imaginarii. Si igitur ponamus x aliquanto minus quam f , puta $x = f - \omega$, functio p abibit

in $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \&c.$ & q in $q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c.$

vnde hoc casu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \&c.$

$\pm \omega \sqrt{\omega \left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c. \right)}$. Ponamus ω mi-

nimum, vt prae ω altiores eius potestates euanescant, erit-

que $y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega \sqrt{\omega q}$; qui valores ambo ipsius y

minores erunt quam g , si $\frac{dp}{dx}$ fuerit affirmatiuum, maiores autem, si negatiuum. Vnde valor duplex ipsius $y = g$ illo casu erit maximus, hoc vero minimus.

280. Haec igitur maxima atque minima inde ortum suum habent, quod primo posito $x = f$ ambo ipsius y valores fiant aequales: posito autem $x > f$ imaginarii, at posito $x < f$ reales. Deinde quod posito $x = f - \omega$ alterum membrum irrationale praebet altiores potestates ipsius ω , quam membrum rationale. Hoc ergo euenit quoque si fuerit $y = p \pm (f-x)^n \sqrt{(f-x)q}$, dummodo sit n numerus integer > 0 . Cum autem non solum radix quadrata sed etiam quaecunque alia radix potestatis paris eandem ambiguitatem signorum introducat; idem eueniet, si fuerit

Kk k k 3

$y =$

$y = p \pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$, dummodo sit $2n+1 > 2m$, erit ergo
 $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} q^{2m}$ seu $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} Q$.
 Quoties ergo functio y per huiusmodi aequationem ex-
 primitur, ita ut sit $2n+1 > 2m$, toties posito $x = f$, va-
 lor ipsius y fiet maximus vel minimus: prius quidem si fue-
 rit $\frac{dp}{dx}$ quantitas affirmatiua, posterius vero si sit $\frac{dp}{dx}$ quan-
 titas negatiua posito $x = f$. Sin autem fiat hoc casu
 $\frac{dp}{dx} = 0$, tum erit $y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2 dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} q$. Nisi ergo
 sit $\frac{2n+1}{2m} > 2$, neque maximum neque minimum locum
 habebit; at si $\frac{2n+1}{2m} > 2$, tum $y = g$ erit maximum, si
 $\frac{ddp}{dx^2}$ habuerit valorem negatiuum, minimum vero, si
 affirmatiuum: sicque ulterius si quoque $\frac{ddp}{dx^2}$ euanescat,
 iudicium erit instituendum.

281. Si igitur y fuerit huiusmodi functio ipsius x ,
 fieri potest, ut praeter maxima & minima, quae prior
 methodus exhibet, etiam maxima minimaue huius alte-
 rius speciei adsint, quae modo hic exposito explorari po-
 terunt. Id quod sequentibus exemplis declarabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Determinare maxima ac minima functionis y , quae definitur hac aequatione :

$$yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0.$$

Ad maxima minimaue primae speciei inuestiganda differentietur aequatio, eritque

$$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0,$$

positoque $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx$,

qui valor in prima aequatione substitutus dat :

$$9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0, \text{ quae resol-}$$

$$\text{vitur in } 9xx - 14x + 5 = 0 \text{ \& } xx - 2x + 1 = 0.$$

Posterior bis dat $x = 1$, fitque $y = 1$, vnde hoc casu in

fractione $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3 - 4x + 3xx}{2y - 2x}$ denominator quo-

que euanescit, sicque maximum minimumue primi generis non datur: prior vero aequatio $9xx - 14x + 5 = 0$ dabit

$$x = 1 \text{ \& } x = \frac{5}{9}, \text{ quorum valorum ille eodem incommodo}$$

laborat, quo praecedentes. Posito autem $x = \frac{5}{9}$, fit

$$y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}. \text{ Et cum sit } \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x},$$

$$\text{fiet } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{+4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x} \text{ ob } dy = 0 \text{ \& nume-}$$

$$\text{ratorem } = 0. \text{ Erit ergo } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}, \text{ vnde hic valor}$$

$$x =$$

$x = \frac{5}{9}$ dat minimum primi generis. Deinde cum sit $(y-x)^2 = (1-x)^3$, erit $y = x \pm (1-x)\sqrt{1-x}$; ideoque posito $x = 1$ prodit maximum secundae speciei: facto enim $x = 1-\omega$, erit $y = 1-\omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, quorum vterque minor est quam vnitas, siquidem ω sumatur minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire maxima ac minima functionis:

$$y = 2x - xx \pm (1-x)^2\sqrt{1-x}.$$

Pro primi generis maximis & minimis differentietur aequatio; eritque

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \pm \frac{5}{2}(1-x)\sqrt{1-x}$$

qui valor positus $= 0$ prodit primo $x = 1$, & cum sit $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{1-x}$, erit y hoc casu maximum

primi generis, fitque $x = 1$. Aequatione vero $\frac{dy}{dx} = 0$ per $1-x$ diuisa erit $4 \mp 5\sqrt{1-x} = 0$ seu $16 = 25 - 25x$, vnde fit $x = \frac{9}{25}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. Quare si signum

superius valet, erit $y = \frac{2869}{3125}$ minimum; sin autem sig-

num inferius valeat, erit $y = \frac{821}{3125}$, quod maximum vi-

deatur: at vero tantum signum superius locum habere potest, quoniam $4 \mp 5\sqrt{1-x}$ nequit esse $= 0$, nisi fit

$\sqrt{1-x}$

$V(1-x) = +\frac{4}{5}$. Primi ergo generis inuenimus maxi-

mum casu $x = 1$ & $y = 1$, atque minimum casu $x = \frac{9}{25}$

& $y = \frac{2869}{3125}$. Ex genere vero altero maximum quo-

que prodit, si $x = 1$, quo casu fit $y = 1$. Nam posito

$x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega\omega \pm \omega^2 V\omega$ utroque casu < 1 .

Hic itaque, si $x = 1$, maxima duo primae & alterius spe-

ciei coalescunt, maximumque quasi mixtum constituunt.

282. Ex his exemplis non solum natura huius al-
terius speciei maximorum & minimorum elucet; sed
etiam pro lubitu istiusmodi functiones formari possunt,
quae maxima vel minima secundae speciei admittant.
Quemadmodum autem, si proposita fuerit functio quae-
cunque, explorari possit, utrum eiusmodi maximis mi-
nimisue sit praedita nec ne? id in sequenti sectione
ostendemus: propterea quod natura linearum curuarum
hac inuestigatione maxime illustratur. Ceterum vero
facile intelligitur, si fuerit y eiusmodi functio ipsius x ,
quae maximum minimumue secundae speciei recipiat,
tum quoque vicissim x eiusmodi fore functionem ipsius y .
Nam quia ex hac aequatione $(y - x)^2 = (1 - x)^3$,
facto $x = 1$, obtinet y valorem maximum secundae spe-
ciei; si variables y & x permutentur, haec aequatio
 $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ exhibet pro y quoque eiusmodi
functionem ipsius x , quae habeat maximum secundae spe-
ciei. Facto enim $x = 1$, fiet $(1 - y)^2 = (1 - y)^3$,

L I I I

hinc.

hincque erit bis $y = 1$ & semel $y = 0$. Sin autem ponatur $x = 1 + \omega$, erit $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^2$; unde si statuamus $y = 1 + \phi$ erit $(\omega - \phi)^2 = (-\phi)^2 = \phi^2$ ideoque ϕ debet esse negativum. Sit ergo $y = 1 - \phi$ erit $(\omega + \phi)^2 = \phi^2$, atque cum sumto ϕ minimo, ϕ^2 prae ϕ evanescat, debet necessario ω esse negativum: hinc valori $x = 1 + \omega$ nulli valores reales ipsius y respondent. At posito $x = 1 - \omega$, & $y = 1 - \phi$ ob $(\phi - \omega)^2 = \phi^2$, erit $\phi = \omega \pm \sqrt{\omega}$, ideoque $y = 1 - \omega \mp \sqrt{\omega}$, unde uterque valor ipsius y respondens ipsi $x = 1 - \omega$ minor est valore $y = 1$, qui respondet valori $x = 1$; eritque consequenter iste ipsius y valor maximus.

283. Haecenus tantum functiones biformes sumus contemplati, quarum maxima vel minima, quia ambo valores facile per resolutionem aequationis quadraticae exprimi possunt, ad examen reuocari possunt. Sin autem functio y per aequationem altiore exprimatur, methodus ante tradita, qua maxima minimaque primae speciei indagauimus, eodem successu adhiberi poterit. Inventionem vero maximorum ac minimorum secundae speciei sequenti sectioni reseruamus. Functiones ergo triformes ac multiformes, quemadmodum tractari oporteat, aliquot exemplis ostendamus.

EXEMPLUM I.

Definiatur functio y , cuius maxima vel minima quaeruntur, per hanc aequationem:

$$y^3 + x^3 = 3axy.$$

Differentiata hac aequatione fit $3y^2 dy + 3xx dx = 3ax dy + 3ay dx$, ideoque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$. Maximum ergo vel minimum dabitur, si fuerit $ay = xx$, seu $y = \frac{xx}{a}$, qui valor in aequatione proposita substitutus dat:

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3 \text{ seu } x^6 = 2a^3 x^3;$$

Erit ergo ter $x = 0$, quo casu quoque fit denominator $yy - ax = 0$, ob $y = \frac{xx}{a} = 0$. Vtrum ergo hoc casu maximum minimumue prodeat? patebit si ipsi x valorem tribuamus minime ab 0 discrepantem. Sit ergo $x = \omega$, & $y = \phi$, ob $\phi^3 + \omega^3 = 3a\omega\phi$, fiet vel $\phi = a\sqrt{\omega}$ vel $\phi = \epsilon\omega^2$. Priori casu erit $a^3\omega\sqrt{\omega} = 3a\omega\sqrt{\omega}$, ideoque $a = \sqrt{3a}$. Hinc posito $x = \omega$ erit $y = \pm\sqrt{3a\omega}$. Vnde etiam si ω negative accipi nequeat, tamen binorum ipsius y valorum alter maior erit quam 0, alter minor; hincque $y = 0$ neque maximum erit neque minimum. Sin autem statuatur $\phi = \epsilon\omega^2$ erit $\omega^3 = 3a\epsilon\omega^3$, ideoque $\epsilon = \frac{1}{3a}$ & $\phi = \frac{\omega^2}{3a}$. Ergo hoc casu siue x capiatur $= +\omega$ siue $= -\omega$, valor

ipſius $y = 0$ nihilo erit maior, ideoque hoc caſu $y = 0$ erit minimum. Reſtat ergo tertius caſus ex aequatione $x^3 = 2a^3$ examinandus, qui dat $x = a\sqrt[3]{2}$, & $y = a\sqrt[3]{4}$. Qui vtrum ſit maximus an minimus? ex aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$ quaeratur differentiale ſecundum, quod ob $dy = 0$ & $ay - xx = 0$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$, cuius valor praefenti caſu eſt $-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$, qui indicat valorem ipſius y eſſe maximum.

EXEMPLUM II.

Si functio y definiatur per hanc aequationem:

$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y,$$

inuenire eius maximos minimosue
valores.

Cum per differentiationem oriatur

$$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx;$$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}, \text{ ponique oportet:}$$

$b^3 = 3axx + 4x^3$. Quaestio ergo huc reducitur, vt functionis vniformis $b^3 - ax^3 - x^4$ maxima ac minima indagentur, quae ſimul erunt maxima ſeu minima functionis y . Sit $a = 2$ & $b = 3$ ſeu proponatur haec aequatio $y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$;

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27} \text{ \& } 4x^3 + 6xx - 27 = 0,$$

quae

quae diuisa per $2x-3=0$ dat $2xx+6x+9=0$,
cuius posterioris radices cum sint imaginariae, erit $x=\frac{3}{2}$

& $y^4+2y^3-27y=\frac{459}{16}$, cuius singulae radices
erunt vel maximae vel minimae. Cum autem fit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{27-6xx-4x^3}{4y^3+6yy-27}, \text{ erit } \frac{ddy}{dx^2}=\frac{-12x-12xx}{4y^3+6yy-27},$$

qui posito $x=\frac{3}{2}$, si fuerit affirmatiuus, indicabit mini-
mum, contra vero maximum.

EXEMPLUM III.

Si fuerit $y^m+ax^n=by^px^q$; definire maxima
& minima ipsius y .

Per differentiationem fit $\frac{dy}{dx}=\frac{qby^px^{q-1}-nax^{n-1}}{my^{m-1}-pby^{p-1}x^q}$,

quo posito $=0$, erit primo $x=0$, si quidem n & q
fuerint vnitae maiores; atque simul $y=0$. Quo casu
an detur maximum vel minimum, valores proximi sunt
inuestigandi, quoniam quoque denominator fit $=0$; quae
inuestigatio ab exponentibus potissimum pendeat. Prae-

terea vero aequatio $\frac{dy}{dx}=0$ dabit $y^p=\frac{na}{qb}x^{n-q}$, qui

valor in proposita substitutus ponendo $\frac{na}{qb}=g$ dabit

$$g^{\frac{m}{p}}x^{\frac{mn-mq}{p}}+ax^n=\frac{na}{q}x^n \text{ seu } g^{\frac{m}{p}}x^{\frac{mn-mq-np}{p}}=\frac{(n-q)a}{q},$$

LIII 3

vnde

vnde fit $x = \left(\frac{(n-q)a}{q} \right)^{\frac{p(mn-mq-np)}{m(mn-mq-np)}}$: g ,
 simulque valor ipsius y innotescit. Deinde dispicien-
 dum est, vtrum differentio - differentiale $\frac{ddy}{dx^2} =$
 $\frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$ obtineat valorem affirma-
 tiuum an negatiuum? vt ex priori minimum, ex poste-
 riori vero maximum pronuncietur.

EXEMPLUM. IV.

Si fuerit $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, maxima & minima
 functionis y assignare.

Differentiatione instituta fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^3}{y^3-x}$, hincque oritur
 $y = x^3$, erit ergo $x^{12} = 3x^4 - 2$ seu $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$,
 quae aequatio resoluitur in has $x^4 - 1 = 0$ & $x^8 + x^4 - 2 = 0$,
 posteriorque in $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. Hinc erit bis
 vel $x = +1$ vel $x = -1$; utroque vero casu & denomi-
 nator fractionis $\frac{dy}{dx}$ evanescit. Ad inuestigandum ergo,
 vtrum his casibus maximum minimumue locum habeat?
 ponamus $x = 1 - \omega$ & $y = 1 - \phi$; erit:

$$\begin{array}{rcl} 1 - 4\phi + 1 - 4\omega & = & 4 - 4\omega - 4\phi - 2 \\ + 6\phi^2 + 6\omega^2 & & + 4\omega\phi \\ - 4\phi^3 - 4\omega^3 & & \\ + \phi^4 + \omega^4 & & \end{array}$$

ideo-

ideoque $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2 - 4\phi^3 - 4\omega^3 + \phi^4 + \omega^4$,
 & ob ω & ϕ minima $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2$. Valor er-
 go ipsius ϕ erit imaginarius, siue ω capiatur affirmatiue
 siue negatiue. Seu si y & x designent coordinatas curuae,
 ea casu $x = 1$ & $y = 1$ habebit punctum coniugatum.
 Neque ergo hic valor pro maximo neque pro minimo
 haberi potest, propterea quod antecedentes & consequen-
 tes, cum quibus comparari deberet, sunt imaginarii.

284. Si aequatio, qua relatio inter x & y exprimi-
 tur, ita fuerit comparata, vt functio ipsius y aequetur
 functioni ipsius x , puta $Y = X$; ad maxima minimaue
 inuenienda poni debet $dX = 0$; fiet ergo y maximum
 vel minimum iisdem casibus, quibus X fit maximum vel
 minimum. Simili modo si x tanquam functio ipsius y
 consideretur, fiet x maximum vel minimum si $dY = 0$
 hoc est si Y fuerit maximum vel minimum. Neque
 tamen hinc sequitur y & x simul fieri maxima vel mini-
 ma. Nam si fuerit $2ay - yy = 2bx - xx$, erit y
 maximum vel minimum, si fuerit $x = b$; eritque
 $y = a \pm V(aa - bb)$. Contra vero x fit maximum vel
 minimum, si fuerit $y = a$, fitque $x = b \pm V(bb - aa)$, ne-
 que ergo fiet y maximum vel minimum, si $x = b \pm V(bb - aa)$,
 quo tamen casu x est maximum minimumue. Ceterum
 hoc casu, si y habeat valores maximos vel minimos, x
 hac indole prorsus carebit: namque y maximum mini-
 mumue fieri nequit, nisi sit $a > b$; quo casu maximum
 minimumue ipsius x fit imaginarium.

285. Tum vero etiam euenire potest, vt non omnes radices aequationis $dX = 0$ praebeant maximos minimosue valores pro y ; si enim illa aequatio duas habuerit radices aequales, exinde neque maximum neque minimum consequitur; hocque idem euenit, si quocunque radices numero pares fuerint inter se aequales. Sic si proponatur aequatio $b(y-a)^2 = (x-b)^3 - c^3$; quia sumtis differentialibus fit $2b dy(y-a) = 3dx(x-b)^2$, functio y neque maxima fiet neque minima posito $x = b$, propterea quod hic occurrunt duae radices aequales. Sin autem x tanquam functio ipsius y spectetur, ea fiet maxima vel minima, si statuatur $y = a$; eritque $x = b - c$ minimum. Quia denique in huiusmodi aequationibus $Y = X$ variables x & y inter se non permiscuntur, si ipsi x tribuitur valor, qui sit radix aequationis $dX = 0$, omnes valores ipsius y , quocunque fuerint reales, erunt maximi vel minimi; quod non euenit, si in aequatione ambae variables fuerint permixtae.

286. Quae praeterea supersunt de natura maximorum ac minimorum exponenda, ea in sequentem sectionem reseruamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraesentari atque explicari possunt. Pergamus ergo ad functiones, quae ex pluribus variabilibus sunt compositae, atque inuestigemus valores, quos singulis variabilibus tribui oportet, vt ipsa functio vel maximum vel minimum valorem obtineat. Ac primo quidem patet, si variables non fuerint inter se permixtae, ita vt functio proposita sit huiusmodi $X + Y$, existente
X

X functione ipsius x , & Y ipsius y tantum, tum functionem propositam $X + Y$ fore maximum, si simul X & Y maximum euadat: minimumque, si simul X & Y fiat minimum. Ad maximum ergo inueniendum inquirentur valores ipsius x , quibus X fiat maximum, similique modo valores ipsius y , quibus Y fit maximum: hique valores pro x & y inuenti efficient functionem $X + Y$ maximam, quod similiter de minimo erit tenendum. Cauendum ergo est, ne duo valores ipsarum x & y diuersae naturae combinentur, quorum ille reddat X maximum, hic vero Y minimum, aut contra. Hoc enim si fieret, functio $X + Y$ neque maximum foret neque minimum. At huiusmodi functio $X - Y$ fiet maxima, si X fuerit maximum simulque Y minimum; contra vero $X - Y$ fiet minimum, si X fuerit minimum & Y maximum. Sin autem vtraque functio X & Y statueretur vel maxima vel minima, earum differentia $X - Y$ neque foret maxima, neque minima; quae omnia sunt ex natura maximorum ac minimorum ante exposita clara & perspicua.

287. Si ergo quaerantur maximi minimiue valores functionis duarum variabilium; quaestio multo magis cautioni obnoxia est, quam si vnica fuerit variabilis. Non solum enim pro vtraque variabili casus, quibus maximum minimumue producitur, diligenter sunt distinguendi; sed etiam ex his bini eiusmodi sunt coniungendi, vt functio proposita fiat maximum vel minimum; id quod ex exemplis clarius patebit.

M m m m

EXEM-

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec duarum variabilium x & y functio:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

& quaerantur valores pro y & x substituendi, ut haec
functio maximum vel minimum obtineat valorem.

Quoniam haec expressio in duas huiusmodi partes
 $Y + X$ resolvitur, quarum illa est functio ipsius y , haec
vero ipsius x tantum; casus quibus utraque sit maxima
vel minima, inuestigentur. Cum igitur sit $Y =$

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y, \text{ erit } \frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

qua expressione nihilo aequali posita, fiet per 4 diuiso
 $y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$, cuius radices sunt $y = 2$,

$$\& y = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Cum ergo sit } \frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9;$$

casu $y = 2$, prodibit maximum. Pro reliquis binis ra-
dicibus $y = 2 \pm \sqrt{3}$, quae oriuntur ex aequatione

$$yy - 4y + 1 = 0 \text{ fiet } \frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = -2,$$

vnde utraque dat minimum. Erit autem his casibus ut
sequitur.

$$y = 2 \quad \left| \quad Y = 8 \quad \text{maximum} \right.$$

$$y = 2 - \sqrt{3} \quad \left| \quad Y = -1 \quad \text{minimum} \right.$$

$$y = 2 + \sqrt{3} \quad \left| \quad Y = -1 \quad \text{minimum} \right.$$

Simili modo cum sit $X = x^3 - 3xx - 3x$, erit $\frac{dX}{dx} =$

$$3xx - 6x - 3, \text{ vnde oritur haec aequatio } xx = 2x + 1$$

&

& $x = 1 + \sqrt{2}$. Est vero $\frac{dX}{dx} = x - 1 = \pm \sqrt{2}$.

Ergo radix $x = 1 + \sqrt{2}$ dat minimum, nempe $X = -5 - 4\sqrt{2}$

& $x = 1 - \sqrt{2}$ dat maximum, nempe $X = -5 + 4\sqrt{2}$.

Quocirca formula proposita $X + Y = y^4 - 8y^2 - 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ fiet maxima, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, prodibitque $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Eadem autem formula $X + Y$ fiet minima, si sumatur vel $y = 2 - \sqrt{3}$ vel $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, utroque casu erit $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

EXEMPLUM II.

Si proponatur hæc functio duarum variabilium:

$$y^4 - 8y^2 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

quæ quibus casibus fiat maxima vel minima inuestigetur.

Posito ut in præcedente exemplo habuimus, $Y = y^4 - 8y^2 + 18y^2 - 8y$ & $X = x^3 - 3xx - 3x$; formula proposita erit $Y - X$; ideoque fiet maxima, si Y fuerit maximum & X minimum. Cum igitur hos casus iam ante eruerimus, patet $Y - X$ obtinere valorem maximum, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$; fietque $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Minimus vero valor ipsius $Y - X$ euadet, si Y sit minimum, & X maximum, quod euenit ponendo $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, fiet autem $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Ceterum in utroque exemplo patet hos valores, quos inuenimus, neque omnium esse maximos neque minimos: nam si vtrunque poneretur verbi gratia $y = 100$ & $x = 0$, sine dubio maior prodiret valor eo,

M m m m 2

quem

quem inuenimus: similique modo ponendo $y=0$ & vel $x=-100$ vel $x=+100$ minor prodiret valor, quam sunt illi, quos pro casu minimi inuenimus. Probe ergo tenenda est idea supra exposita; quam de natura maximorum ac minimorum dedimus. Scilicet eum valorem vocari maximum, qui maior sit valoribus tam antecedentibus quam consequentibus contiguis proximis; minimum autem esse eum, qui his valoribus tam antecedentibus quam consequentibus fuerit minor. Sic in hoc exemplo est valor ipsius $Y-X$, qui prodit ponendo $y=2$ & $x=1+\sqrt{2}$ maior est iis, qui resultat si ponatur $y=2\pm\omega$ & $x=1+\sqrt{2}\pm\phi$ sumtis pro ω & ϕ quantitatibus fatis exiguis.

288. His exemplis expeditis facilius erit via ad solutionem generalem indagandam. Denotet V functionem quamcunque duarum variabilium x & y , sintque pro x & y valores inueniendi, qui functioni V inducant maximum vel minimum valorem. Cum igitur ad hoc efficiendum utrique variabili x & y determinatus valor tribui debeat; ponamus alteram y iam habere eum valorem, qui requiritur ad functionem V vel maximam vel minimam reddendam: hocque posito tantum opus erit, ut pro altera x idoneus quoque valor inuestigetur, quod fiet, dum functio V differentiatur ponenda sola x variabili, differentialeque nihilo aequale statuirur. Simili modo si fingamus variabilem x iam eum habere valorem, qui aptus sit ad functionem V vel maximam vel minimam efficiendam, valor ipsius y reperietur differen-

tian-

riando V posita sola y variabili, hocque differentiale nihilo aequali ponendo. Hinc si differentiale functionis V fuerit $\equiv P dx + Q dy$, oportebit esse & $P \equiv 0$ & $Q \equiv 0$, ex quibus duabus aequationibus valores utriusque variabilis x & y erui poterunt.

289. Quoniam vero hoc pacto sine discrimine reperiuntur valores pro x & y , quibus functio V vel maxima vel minima redditur; casus, quibus vel maximum vel minimum oritur, probe a se inuicem sunt distinguendi. Vt enim functio V fiat maxima, necesse est ut ambae variables ad hoc conspirent; namque si altera maximum exhiberet, altera minimum, ipsa functio neque maxima neque minima euaderet. Quocirca intuentis ex aequationibus $P \equiv 0$ & $Q \equiv 0$ valoribus ipsarum x & y inquirendum est, utrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant; atque tum demum, cum compertum fuerit utriusque variabilis valorem hinc erutum pro maximo valere, affirmare poterimus functionem hoc casu maximum valorem induere. Quod idem de minimo erit tenendum, ita ut functio V minimum valorem adipisci nequeat, nisi simul ambae variables x & y minimum producant. Hinc ergo omnes illi casus reiici debent, quibus altera variabilis maximum, altera vero minimum indicareprehendetur. Interdum vero etiam euenit, ut alterius vel etiam utriusque variabilis valores ex aequationibus $P \equiv 0$ & $Q \equiv 0$ oriundi neque maximum neque minimum exhibeant, qui casus proinde pariter tanquam prorsus inepti erunt reiiciendi.

M m m m 3

290.

290. Vtrum autem valores pro x & y reperti valeant pro maximo an minimo? de vtroque seorsim simili modo inuestigabitur, quo supra, cum vnica adesset variabilis, sumus vsi. Ad iudicium scilicet de variabili x instituendum consideretur altera y tanquam constans, & cum sit $dV = P dx$ seu $\frac{dV}{dx} = P$, differentietur P denuo posito y constante, vt prodeat $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$, ac dispiciatur, vtrum valor ipsius $\frac{dP}{dx}$, postquam loco x & y valores ante inuenti fuerint substituti, fiat affirmatiuus an negatiuus; priori enim casu indicabitur minimum, posteriori vero maximum. Simili modo cum posito x constante sit $dV = Q dy$ seu $\frac{dV}{dy} = Q$, differentietur Q denuo posita sola y variabili, & examinetur valor $\frac{dQ}{dy}$, substitutis loco x & y valoribus, qui ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ sunt inuenti; qui si fuerit affirmatiuus, declarabit minimum, contra vero maximum. Hinc ergo colligitur, si ex valoribus pro x & y inuentis formulae $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ induant valores diuersis signis affectos altera scilicet affirmatiuum, altera negatiuum; tum functionem V neque maximam neque minimam effici; sin autem vtraque formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiat affirmatiua, minimum resultabit: contraque, si vtraque fiat negatiua, maximum.

291. Quodsi verò altera formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$, vel etiam vtraque, si pro x & y valores inuenti substituantur, euanescat, tum progrediendum erit ad differentialia sequentia $\frac{ddP}{dx^2}$ & $\frac{ddQ}{dy^2}$, quae nisi pariter euanescant, neque maximum neque minimum habebit locum; sin autem euanescant, iudicium ex formulis differentialibus sequentibus $\frac{d^3P}{dx^3}$ & $\frac{d^3Q}{dy^3}$ erit petendum, similique modo instituendum, quò pro formulis $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ est factum. Quo autem, quibus casibus hoc vsu veniat, clarius exponamus, prodierit valor $x = a$, qui si formulam $\frac{dP}{dx}$ reddat euanescentem, necesse est vt $\frac{dP}{dx}$ factorem habeat $x - a$; qui factor si fuerit solitarius, neque simul alium sibi habeat aequalem socium, neque maximum neque minimum indicabitur, quod idem euenit si $\frac{dP}{dx}$ factorem habuerit $(x - a)^3$, vel $(x - a)^5$, &c. Sin autem factor fuerit $(x - a)^2$, vel $(x - a)^4$, &c. tum quidem maximum vel minimum indicabitur; at insuper videndum erit, vtrum cum casu, per y indicato consentiat.

292. Labor autem his casibus ad differentialia vltiora progrediendi mirifice subleuari poterit: si enim ponamus, vt rem generalius complectamur, inuentum esse

esse $ax + \epsilon = 0$, atque formulam $\frac{dP}{dx}$ factorem habere $(ax + \epsilon)^2$, ita ut sit $\frac{dP}{dx} = (ax + \epsilon)^2 T$, quia est $ax + \epsilon = 0$, fiet $\frac{d^3P}{dx^3} = 2a^2 T$, hincque ob $2a^2$ affirmatiuum, ex ipsa quantitate T iudicium absolui poterit; quae si induet valorem affirmatiuum, pro minimo, contra vero pro maximo pronunciabit. Hocque idem subsidium in maximorum minimorumque inuestigatione, si vnica insit variabilis adhiberi poterit, ita ut nunquam opus sit ad altiora differentialia ascendere. Quin etiam nequidem ad differentialia secunda procedere opus erit: si enim ex aequatione $P = 0$, fiat $ax + \epsilon = 0$, necesse est ut P factorem habeat $ax + \epsilon$; sit $P = (ax + \epsilon) T$, & cum sit $\frac{dP}{dx} = aT + (ax + \epsilon) \frac{dT}{dx}$, ob $ax + \epsilon = 0$, erit $\frac{dP}{dx} = aT$, hincque iam ipse alter factor T , prout valor ipsius aT fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, statim vel minimum vel maximum indicabit.

293. His igitur traditis praeceptis haud difficile erit, si functio quaecunque duas variables inuoluens fuerit proposita, casus inuestigare, quibus haec functio fiat vel maxima vel minima. Si quae insuper notanda fuerint, ea ipsa exemplorum euolutio suggeret, quamobrem aliquot exemplis regulas datas illustrari expediet.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista functio duarum variabilium

$$V = xx + xy + yy - ax - by, \text{ quae}$$

quibus casibus fiat vel maxima vel minima inquiratur.

Cum sit $dV = 2x dx + y dx + x dy + 2y dy - a dx - b dy$,
si comparetur cum forma generali $dV = P dx + Q dy$
erit $P = 2x + y - a$ & $Q = 2y + x - b$: unde for-
mabuntur istae aequationes $2x + y - a = 0$ & $2y + x - b = 0$,
quibus coniunctis eliminando y fiet $x - b = 4x - 2a$,
ideoque $x = \frac{2a - b}{3}$, & $y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$.

Cum igitur sit $\frac{dP}{dx} = 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 2$, vtraque
ostendit minimum; ex quo concludimus formulam
 $xx + xy + yy - ax - by$ fieri minimam, si pona-
tur $x = \frac{2a - b}{3}$ & $y = \frac{2b - a}{3}$, prodibitque hoc
modo $V = -\frac{3aa + 3ab - 3bb}{9} = -\frac{aa + ab - bb}{3}$,
qui cum sit vnicus, omnium erit minimus. Vnico ergo
modo fieri potest $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3}$,
& quia minor fieri nequit, erit haec aequatio
 $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3} - cc$
impossibilis.

N n n n

EXEM-

EXEMPLUM II.

Si proponatur formula $V = x^3 + y^3 - 3axy$, quaerantur casus, quibus V adipiscatur valorem maximum vel minimum.

Ob $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$ erit $P = 3xx - 3ay$ & $Q = 3yy - 3ax$, unde fit $ay = xx$ & $ax = yy$. Cum ergo sit $yy = x^2$: $aa = ax$ erit $x^4 - a^3x = 0$; ideoque vel $x = 0$ vel $x = a$. Priori casu fit $y = 0$, posteriori vero $y = a$. Quoniam ergo est $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$ & $\frac{dQ}{dy} = 6y$ atque $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$; priori ergo casu, quo $x = 0$ & $y = 0$, neque maximum neque minimum resultat. Posteriori vero casu quo & $x = a$ & $y = a$ minimum prodit, si quidem a fuerit quantitas affirmatiua, fietque $V = -a^3$, qui autem valor tantum minor est proximis antecedentibus & consequentibus: nam sine dubio V multo minorem induere potest valorem, si utrique variabili x & y valores negatiui tribuantur.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec functio $V = x^3 + ayy - bxy + cx$, cuius valores maximi seu minimi inquirantur.

Quia est $dV = 3xxdx + 2aydy - bxdx - bxdy + cdx$ erit $P = 3xx - by + c$ & $Q = 2ay - bx$, quibus valoribus nihilo aequalibus positus erit $y = \frac{bx}{2a}$, ideoque

3xx

$$3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0 \text{ seu } xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a} \text{ vnde}$$

$$\text{fit } x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}. \text{ Nisi ergo sit } b^4 - 18aac > 0,$$

neque maximum neque minimum habet locum. Pona-

$$\text{mus ergo esse } b^4 - 48aac = bbff, \text{ vt fit } c = \frac{bb(bb - ff)}{48aa};$$

$$\text{erit } x = \frac{bb \pm bf}{12a} \text{ \& } y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}. \text{ Quoniam porro}$$

$$\text{est } \frac{dP}{dx} = 6x \text{ \& } \frac{dQ}{dy} = 2a, \text{ fiet } \frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2}. \text{ Ni-}$$

$$\text{si ergo } 2a \text{ \& } \frac{b(b \pm f)}{2a} \text{ sint quantitates eiusdem signi,}$$

neque maximum neque minimum habet locum. At si

sint ambae vel affirmatiuae vel ambae negatiuae, quod euenit, si earum productum $b(b \pm f)$ fuerit affirmatiuum; tum functio V euadet minimum, si a sit quantitas affirmatiua; contra vero maximum, si a sit quantitas negatiua.

Hinc si fuerit $f = 0$ seu $c = \frac{b^4}{48aa}$, ob bb quantitatem affirmatiuam, functio V euadet minima, si a sit

$$\text{quantitas positia, ponaturque } x = \frac{bb}{12a} \text{ \& } y = \frac{b^3}{24aa};$$

contra vero si a sit negatiuum, istae substitutiones producent maximum. Si sit $f < b$, duobus casibus oritur vel maximum vel minimum: at si $f > b$, tum casus tan-

$$\text{tum } x = \frac{b(b \pm f)}{12a} \text{ \& } y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa} \text{ praebebit maxi-}$$

mun minimumue, prout a fuerit vel negatiuum vel af-

firmatiuum. Sit $a = 1$, $b = 3$ & $f = 1$, vt habeatur haec formula $V = x^3 + yy - 3xy + \frac{3}{2}x$, haec fiet minima ob a affirmatiuum, si ponatur vel $x = 1$ & $y = \frac{3}{2}$ vel $x = \frac{1}{2}$ & $y = \frac{3}{4}$. Priori casu oritur $V = \frac{1}{4}$, posteriori vero $V = \frac{5}{8}$. Interim tamen patet loco x numeris negatiuis ponendis multo minores valores pro V oriri posse. Ita ergo intelligi debet valor ipsius $V = \frac{1}{4}$ minor esse, quam si ponatur $x = 2 + \omega$ & $y = 3 + \phi$; dummodo sint ω & ϕ numeri parui, siue affirmatiui siue negatiui; limes autem quem ω transgredi non debet est $-\frac{1}{4}$; nam si $\omega < -\frac{1}{4}$ fieri poterit vt V fiat minor quam $\frac{1}{4}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire maxima vel minima huius functionis:

$$V = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccy.$$

Sumto differentiali erit $P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx$ & $Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis, si a se inuicem subtrahantur erit: $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$, quae cum sit diuisibilis per $x - y$, erit primo $y = x$, atque $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$, quae dat $x = 0$ & $4xx = 3ax - 2cc$ seu $x = \frac{3a \pm \sqrt{9aa - 32cc}}{8}$. Si sumamus $x = 0$, erit quoque $y = 0$; & ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2ay + 2cc$, atque $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$, fiet functio V minima $= 0$.

Sin

Sin statuamus $x=y=\frac{3a\pm V(9aa-32cc)}{8}$, si quidem

fuerit $9aa > 32cc$, ob $4xx=3ax-2cc$, erit $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=$

$$12xx-2ax+2cc=7ax-4cc=\frac{21aa-32cc\pm 7aV(9aa-32cc)}{8},$$

qui valor cum sit semper affirmatiuus ob $32cc < 9aa$,
valor V hoc quoque casu fit minimus, eritque $V=$

$$\frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 + \frac{a}{256}(9aa-32cc)^{\frac{3}{2}}.$$

Diuida-
mus autem aequationem $4x^3-4y^3+axx-ayy+2ccx-2ccy=0$
per $x-y$ fietque $4xx+4xy+4yy+ax+ay+2cc=0$.

At ex aequatione $P=0$, erit $yy=-2xy+\frac{4}{a}x^3+\frac{2ccx}{a}$,

quo valore in illa substituto fit

$$y=\frac{16x^3+4axx+axx+8ccx+2acc}{4ax-aa}.$$

Verum illa dat $y=-x\pm V\frac{4x^3+axx+2ccx}{a}$, vnde efficitur:

$$16x^3+8axx+4ccx+2acc=(4x-a)V(4ax^3+axxx+2accx);$$

quae ad rationalitatem perducta, dat

$$\begin{aligned} 256x^6+192ax^5+80aa^4+4a^3x^3-a^4x^2-2a^3ccx \\ +128ccx+96accx+48aaccx+16ac^4x+4a^2c^4=0 \\ +16c^4 \end{aligned}$$

cuius radices, si quas habet, reales indicabunt maxima
vel minima functionis V, si quidem $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiant
quantitates eodem signo affectae.

Nnn 3

EXEM-

EXEMPLUM . V.

Inuenire maxima & minima huius expressionis :

$$x^4 + mxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = V.$$

Facta differentiatione erit :

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$

$$Q = 4y^3 + 2mxyy + 2aay + naax = 0$$

quae aequationes inuicem vel subtractae vel additae dant :

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$

$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

quae diuisae per $x - y$ & $x + y$, & denuo vel additae vel subtractae dant :

$$4xx + 4yy + 2aa = 0 \quad \& \quad 4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Ex quarum posteriori fit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, prior autem reales valores non admittit. Tres igitur habemus casus :

I. Si $y = x$, eritque $4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$, unde fit vel $x = 0$ vel $2(2+m)xx + (2+n)aa = 0$. Sit

$x = 0$, erit quoque $y = 0$, atque ob $\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa$

& $\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$, hoc casu fiet $V = 0$ minimum, si quidem coefficientis aa fuerit affirmatiuus. Al-

ter casus dat $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, quae realis esse nequit

nisi sit $\frac{n+2}{m+2}$ numerus negatiuus. Sit $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$

feu

feu $n = 2kk - 4kk + 2$, erit $x = \pm ka$ & $y = \pm ka$. At
 $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$,
 quae cum sint aequales, erit V vel minimum vel maxi-
 mum, prout istae quantitates fuerint vel affirmatiuae vel
 negatiuae.

II. Sit $y = -x$, eritque $2(m+2)x^3 = (n-2)aa$
 ergo vel $x = 0$ vel $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Prior radix
 $x = 0$ recidit in praecedentem. Posterior vero erit
 realis si $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ fuerit quantitas affirmatiua: & cum
 fiat $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ prodibit vel maximum vel minimum.

III. Sit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, erit $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x}$
 $+ 2aax + \frac{nn^4}{2(2-m)x} = 0$ seu $4x^4 + 2aaxx + \frac{nn^4}{(2-m)^2} = 0$,
 cuius aequationis nulla radix est realis, nisi sit aa quanti-
 tas negatiua.

EXEMPLUM VI.

Proposita sit haec functio determinata:

$$V = x^4 + y^4 - xx + xy - yy,$$

cuius valores maximi vel minimi

inuestigentur.

Cum hinc fiat $P = 4x^3 - 2x + y = 0$ & $Q = 4y^3 - 2y + x = 0$
 erit ex priori $y = 2x - 4x^3$, qui in altera substitutus
 dat $256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$.

Cuius

Cuius una radix est $x = 0$, unde fit quoque $y = 0$.
 Ergo hoc casu ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$
 prodit maximum $V = 0$.

Diuisa autem aequatione inuenta per x erit:

$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40xx + 3 = 0$,
 quae factorem habet $4xx - 1$, unde fit $4xx = 1$
 & $x = \pm \frac{1}{2}$; atque $y = \pm \frac{1}{2}$, tum vero erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$,
 utroque ergo casu oritur minimum $V = -\frac{1}{8}$.

Diuidatur illa aequatio per $4xx - 1$, atque obtinebitur:

$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0$,
 quae denuo bis continet $4xx - 1 = 0$; ita ut praecedens casus oriatur. Praeterea vero inde fit $4xx - 3 = 0$,
 & $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$; cui respondet $y = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. Erit igitur quoque $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, ideoque fiet V minimum $= -\frac{9}{8}$;
 qui est valor omnium minimus, quos quidem functio V
 recipere potest: & hanc ob rem ista aequatio $V = -\frac{9}{8} - cc$
 semper est impossibilis. Hinc autem patet via determinandi maxima & minima functionum, quae tres pluresue variables inuoluunt.



CAPUT XII.

DE VSU DIFFERENTIALIUM IN
INVESTIGANDIS RADICIBUS REALIBUS
AEQUATIONUM.

294.

Natura maximorum ac minimorum viam nobis patefacit ad indolem radicum aequationum, vtrum sint reales an imaginariae, cognoscendam. Sit enim proposita aequatio cuiuscunque ordinis:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

cuius radices ponamus esse $p, q, r, s, t, \&c.$ ita vt p sit minima, q ea quae ratione magnitudinis sequitur, sicque & reliquae radices secundum ordinem quantitatis sint dispositae: scilicet sit $q > p; r > q; s > r; t > s \&c.$ Assumamus autem omnes radices aequationis esse reales, eritque exponens maximus n simul numerus radicum $p, q, r, \&c.$ Consideremus quoque has radices omnes tanquam inter se inaequales; hinc tamen aequales radices non excluduntur, propterea quod radices inaequales, si earum differentia abeat in infinite paruam, fiant aequales.

295. Quoniam proposita expressio $x^n - Ax^{n-1} + \&c.$ tum solum fit nihilo aequalis, cum loco x aliquis valor ex $p, q, r, \&c.$ substituitur, reliquis vero casibus omnibus non euanescit, ponamus generatim:

O o o o

 $x^n -$

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = z$$

ita ut z spectari possit tanquam functio ipsius x . Fingamus nunc pro x successive substitui valores determinatos, incipiendo a minimo $x = -\infty$, atque continuo maiores in locum ipsius x collocari; perspicuumque est z nacturum hinc esse valores vel nihilo maiores vel nihilo minores, neque prius esse euaniturum, quam ponatur $x = p$; quo casu fiet $z = 0$. Augeantur valores ipsius x ultra p , atque valores ipsius z vel affirmatiui vel negatiui fient, donec perueniatur ad valorem $x = q$; quo casu iterum erit $z = 0$. Necesse ergo est, ut cum valores ipsius z ab 0 iterum ad 0 accesserint, interea z habuerit valorem vel maximum vel minimum; maximum scilicet si valores ipsius z , dum x intra limites p & q versabatur, fuerint affirmatiui, minimum, si fuerint negatiui. Simili modo dum x ultra q ad r vsque augetur, functio z maximum vel minimum attinget: maximum nimirum si ante fuerit minimum, & contra. Supra enim vidimus maxima & minima se mutuo alternatim excipere.

296. Quare cum inter binas quasuis radices ipsius x existat casus, quo functio z fit maximum vel minimum; erit numerus maximorum & minimorum, quae in functione z implicantur, vnitatem minor, quam numerus radicum realium; atque ita quidem alternatim se excipient, ut maximus ipsius z valores sint affirmatiui, minimi negatiui. Quod si vicissim functio z habeat maximum vel saltem valorem affirmatiuum casu $x = f$, atque minimum seu saltem negatiuum casu

casu $x = g$; quoniam dum valores ipsius x ab f ad g transeunt, functio z ab affirmatiuo abit in negatiuum necesse, est vt interea per 0 transierit, & hancobrem dabitur radix ipsius x intra limites f & g contenta. Nisi autem haec conditio adsit, vt valores maximi minimique ipsius z fiant alternatim affirmatiui & negatiui, illa conclusio non sequitur. Si enim dentur functionis z minima, quae quoque sint affirmatiua, fieri potest vt valor ipsius z a maximo ad sequens minimum transeat, cum tamen interea non euanescat. Ceterum ex dictis intelligitur, etiamsi aequationis propositae non omnes radices fuerint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum; etiamsi propositio conuersa generatim non valeat, vt inter bina quaeuis maxima seu minima radix realis contineatur: valet autem adiecta conditio, si alter valor ipsius z fuerit affirmatiuus, alter negatiuus.

297. Quoniam ergo supra vidimus, valores ipsius x , quibus functio:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c.$$

fit maximum vel minimum, esse radices aequationis differentialis huius:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

manifestum est, si aequationis $z = 0$ omnes radices, quarum numerus est $= n$ fuerint reales, tum quoque omnes radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fore reales. Cum

O o o o 2

enim

enim functio z tot habeat maxima vel minima, quot numerus $n-1$ continet vnitates, necesse est vt aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ totidem habeat radices reales; ideoque omnes eius radices erunt reales. Ex quo simul perspicitur, functionem z plura maxima minimaue habere non posse, quam $n-1$. Habemus ergo hanc regulam latissime potentem; si aequationis $z = 0$ omnes radices fuerint reales, tum quoque aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices habebit reales.

Vnde vicissim sequitur, si aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ non omnes radices fuerint reales, tum quoque non omnes aequationis $z = 0$ radices reales fore.

298. Quia inter binas quasvis aequationis $z = 0$ radices reales datur vnus casus, quo functio z fit maximum vel minimum; sequitur si aequatio $z = 0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx} = 0$ necessario vnam radicem habituram esse realem. Pariter si aequatio $z = 0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ certo duas habebit radices reales. Atque generatim si aequatio $z = 0$ habeat m radices reales, necesse est vt aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ ad minimum sint $m-1$ radices rea-

les. Quare si aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ pauciores habeat radices reales quam $m-1$, tum vicissim aequatio $z = 0$ certo pauciores quam m habebit radices reales. Cauendum autem

tem est, ne propositio conuersa pro vera habeatur; etiam si enim aequatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ aliquot vel adeo omnes radices suas habeat reales, tamen non sequitur, aequationem $z = 0$ ullam habituram esse radicem realem. Fieri enim potest, vt aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices sint reales, cum tamen aequationis $z = 0$ omnes radices sint imaginariae.

299. Interim tamen, si conditio supra memorata adiiciatur, propositio conuersa ita proponi poterit, vt ex radicibus realibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, numerus radicum realium aequationis $z = 0$ certo cognosci possit. Ponamus enim $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. esse radices reales aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, inter quas α sit maxima, reliquae vero ordine magnitudinis se inuicem sequantur. His igitur valoribus loco x substitutis functio z obtinebit vel maximos vel minimos valores alternatim. Cum autem functio z fiat $= \infty$, si ponatur $x = \infty$, patet eius valores continuo decrescere debere, dum valores ipsius x ab ∞ vsque ad α diminuuntur; ex quo, casu $x = \alpha$, fiet z minimum. Quod si ergo hoc casu $x = \alpha$ functio z valorem induat negatiuum, necesse est vt ante alicubi fuerit $= 0$, sicque aequationis $z = 0$ radix dabitur realis $x > \alpha$; sin autem posito $x = \alpha$ functio z adhuc retineat valorem affirmatiuum, ante nusquam potuit esse

minor, alias enim quoque daretur minimum antequam x ad a vsque diminueretur, quod esset contra hypothesin; hinc aequatio $z = 0$ nullam habere poterit radicem realem maiorem quam a . Si ergo ponamus posito $= a$ fieri $z = A$, hoc modo iudicari poterit: si fuerit A quantitas affirmatiua, tum aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem a maiorem; sin autem A fuerit quantitas negatiua, tum aequatio $z = 0$ vnā perpetuo habebit radicem realem a maiorem, neque plures.

300. Ad hoc iudicium vltius persequendum

si ponatur	fiat
$x = a$	$z = A$
$x = \epsilon$	$z = B$
$x = \gamma$	$z = C$
$x = \delta$	$z = D$
$x = \epsilon$	$z = E$
&c.	&c.

Quia ergo A fuit minimum, erit B maximum, & quidem si A fuerit affirmatiuum, erit quoque B affirmatiuum, neque ergo inter limites a & ϵ dabitur radix realis aequationis $z = 0$. Quare si haec aequatio nullam habeat radicem realem a maiorem, neque vllam habebit, quae esset maior quam ϵ . Sin autem A fuerit quantitas negatiua, quo casu vna datur aequationis radix $x > a$; dispiciatur vtrum valor ipsius B sit affirmatiuus an negatiuus? priori casu dabitur radix $x > \epsilon$, posteriori vero nulla dabitur radix intra limites a & ϵ contenta. Simili modo cum B fuerit maximum, erit C minimum; quare si B habuerit valorem negatiuum, mul-

to magis \mathcal{C} erit negatium, nullaque hoc casu dabitur radix intra limites \mathcal{E} & γ contenta. Ad si \mathcal{B} fuerit affirmatium, radix dabitur realis inter limites \mathcal{E} & γ , si \mathcal{C} fiat negatium: sin autem \mathcal{C} quoque sit affirmatium, tum nulla dabitur radix inter limites \mathcal{E} & γ contenta, similique modo iudicium ulterius erit instituendum.

301. Quo haec iudicia facilius intelligantur, ea in sequenti tabella complexus sum:

Aequatio $x = 0$ vnam
habebit radicem rea-
lem, quae continetur
intra limites

$x = \infty$	&	$x = a$
$x = a$	&	$x = \mathcal{E}$
$x = \mathcal{E}$	&	$x = \gamma$
$x = \gamma$	&	$x = \delta$
$x = \delta$	&	$x = \varepsilon$
&c.		

Si fuerit

$\mathcal{A} = -$	
$\mathcal{A} = -$	& $\mathcal{B} = +$
$\mathcal{B} = +$	& $\mathcal{C} = -$
$\mathcal{C} = -$	& $\mathcal{D} = +$
$\mathcal{D} = +$	& $\mathcal{E} = -$
&c.	

Harumque propositionum conuersae & in negantes transmutatae pariter in omni rigore locum obtinent. Scilicet

Aequatio $x = 0$
nullam habeat radicem
realem, quae contineatur
inter limites:

$x = \infty$	&	$x = a$
$x = a$	&	$x = \mathcal{E}$
$x = \mathcal{E}$	&	$x = \gamma$
$x = \gamma$	&	$x = \delta$
$x = \delta$	&	$x = \varepsilon$
&c.		

si non fuerit

$\mathcal{A} = -$	
$\mathcal{A} = -$	& $\mathcal{B} = +$
$\mathcal{B} = +$	& $\mathcal{C} = -$
$\mathcal{C} = -$	& $\mathcal{D} = +$
$\mathcal{D} = +$	& $\mathcal{E} = -$
&c.	

Ope

Ope harum ergo regularum ex radicibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, si eae fuerint cognitae, non solum numerus radicum realium aequationis $z = 0$ colligitur, sed etiam limites innotescunt, intra quos singulae istae radices contineantur.

EXEMPLUM.

Sit proposita ista aequatio: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$
 quae an habeat radices reales & quot
 quaeritur.

Aequatio differentialis erit $4x^3 - 28x + 24 = 0$
 seu $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuius radices sunt 1, 2, & -3,
 quae secundum ordinem magnitudinis dispositae dabunt
 vnde erit

$a = 2$	$A = 4$
$b = 1$	$B = 1$
$\gamma = -3$	$C = -129$

Ob A negativum ergo aequatio proposita habebit radicem realem > 2 , at ob B negativum, neque inter limites 2 & 1, neque inter limites 1 & -3 radicem habebit realem. Cum autem posito $x = -3$ fiat $z = C = -129$, ac si statuatur $x = -\infty$, fiat $z = +\infty$ necesse est, ut radix detur realis inter limites -3 & $-\infty$ contenta. Habebit ergo aequatio proposita duas radices reales, alteram $x > 2$, alteram $x < -3$; ex quo duae radices erunt imaginariae. Simili modo ergo ex ultimo aequationis propositae maximo vel minimo iudicari debet,

bet, quo ex primo solo. Scilicet si aequatio proposita fuerit ordinis paris, ultimum siue maximum siue minimum (erit autem hoc casu minimum), si fuerit negativum radicem realem, sin affirmativum radicem imaginariam indicat. At pro aequationibus imparium graduum, quia posito $x = -\infty$ fit $z = -\infty$, si ultimum maximum fuerit affirmativum, radix realis, sin negativum, imaginaria indicatur.

302. Regula ergo pro cognoscendis radicibus realibus & imaginariis hoc modo commode exprimi poterit. Proposita aequatione quacunque $z = 0$, consideretur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$, cuius radices reales se-

cundum ordinem quantitatis dispositae sint $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$, &c. tum posito $x = \alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, &c.

fiat $z = A, B, C, D, E, F$, &c.

Iam si signa sint: $- + - + - +$ &c.

tot aequatio $z = 0$ habebit radices reales, quot habentur litterae α, ϵ, γ , &c. & insuper vnam. Sin autem vna ex his literis maiusculis non habeat signum infra scriptum, tum binae radices imaginariae indicabuntur. Ita si A haberet signum $+$, tum nulla daretur radix intra limites ∞ & ϵ contenta. Si B habeat signum $-$, nulla dabitur radix inter limites α & γ ; & si C habeat signum $+$, nulla erit radix inter limites ϵ & δ , & ita porro. Generatim autem praeter radices imaginarias hoc modo indicatas, aequatio $z = 0$ insuper tot habebit imaginarias, quot aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$.

303. Si eueniat, vt valorum A, B, C, D , &c. aliquis euaneſcat, tum eo loco aequatio $z = 0$ duas habebit radices aequales. Scilicet ſi fuerit $A = 0$, tum habebit duas radices ipſi z aequales; ſi ſit $B = 0$, duae erunt radices $= C$. Hoc enim caſu aequatio $z = 0$ vnā habebit radicem communem cum aequatione differentiali $\frac{dz}{dx} = 0$; ſupra autē demonſtrauiſus, hoc eſſe indicium duarum radicum aequalium. Sin autem aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ duas pluresue radices habeat aequales, tum ſi earum numerus fuerit par, neque maximum neque minimum indicabitur: vnde pro praefenti inſtituto radices aequales numero pares negligi poterunt. Sin autem numerus radicum aequalium aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fuerit impar, tum omnes praeter vnā in formatione iudicii reiiciendae ſunt; niſi forte hoc caſu ipſa quoque functio z euaneſcat. Si enim hoc eueniat aequatio $z = 0$ quoque habebit radices aequales & quidem vna plures, quam aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$. Sic ſi fuerit $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, ita vt haec aequatio habeat n radices aequales ipſi ζ , ſi poſito $x = \zeta$ quoque euaneſcat z , tum aequatio $z = 0$ habebit $n + 1$ radices aequales ipſi ζ .

304. Applicemus haec praecepta ad aequationes simpliciores, ac primo quidem a quadratica incipiamus. Sit igitur proposita haec aequatio: $x^2 + Ax + B = 0$: erit eius differentialis $\frac{dx}{dx} = 2x + A$, qua facta $= 0$, erit $x = -\frac{1}{2}A$, seu $a = -\frac{1}{2}A$. Substituatur hic valor loco x , fietque $x^2 + Ax + B = \frac{1}{4}AA + B = \mathcal{A}$; unde colligimus, si iste valor ipsius \mathcal{A} fuerit negatiuus, hoc est si sit $AA > 4B$, aequationem $x^2 + Ax + B = 0$ habituram esse duas radices reales, alteram maiorem quam $-\frac{1}{2}A$ alteram minorem. Sin autem valor ipsius \mathcal{A} fuerit affirmatiuus seu $AA < 4B$, tum ambae aequationis propositae radices erunt imaginariae. At si fuerit $\mathcal{A} = 0$ seu $AA = 4B$, tum aequatio proposita habebit duas radices aequales, vtramque scilicet $= -\frac{1}{2}A$. Quae cum ex natura aequationum quadraticarum sint notissima, veritas horum principiorum non mediocriter illustratur, simulque eorum utilitas in hoc negotio perspicitur.

305. Progrediamur ergo ad aequationes cubicas simili modo inquirendas. Sit ergo proposita aequatio $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$: cuius differentialis cum sit $3x^2 + 2Ax + B = \frac{dx}{dx}$, si haec ponatur $= 0$, fiet $3x^2 + 2Ax + B = 0$, cuius aequationis vel ambae radices sunt imaginariae, vel aequales, vel reales inaequales. Cum igitur hinc sit $x = \frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 - 12B}}{6}$, ambae radi-

ces erunt imaginariae, si fuerit $AA <_3 B$: hoc ergo casu aequatio cubica proposita vnicam habebit radicem realem, cuius alii limites non patent praeter $+\infty$ & $-\infty$. Sint iam ambae radices inter se aequales, seu $AA =_3 B$, erit $x = \frac{A}{3}$. Nisi ergo simul fiat $z = 0$, hae duae radices pro nulla reputari debebunt, habebitque aequatio vt ante vnicam radicem realem; sin autem casu $x = \frac{A}{3}$ simul fiat $z = 0$, quod euenit, si fuerit $-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = 0$, seu $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$; hoc est si fuerit $B = \frac{1}{3}A^2$ & $C = \frac{1}{27}A^3$, aequatio habebit tres radices aequales, singulas scilicet $= \frac{1}{3}A$. Euoluamus nunc tertium casum, quo ambae radices aequationis differentialis sunt reales & inter se inaequales, quod euenit si $AA >_3 B$. Sit ergo $AA =_3 B + ff$, seu $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, erunt ambae illae radices $x = \frac{A \pm f}{3}$. Fiet ergo $a = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $b = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Quaerantur ergo valores ipsius z his respondentes \mathcal{A} & \mathcal{B} ; & cum ambae radices contineantur in haec aequatione $xx = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, fiet $z = -\frac{1}{3}Axx + \frac{2}{3}Bx - C = -\frac{2}{9}AAx + \frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}Bx - C$. Hinc itaque oritur:

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^2f + \frac{2}{9}Bf - C = -\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 - C$$

$$\mathcal{B} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^2f - \frac{2}{9}Bf - C = -\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 - C$$

ob $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Si igitur fuerit \mathcal{A} quantitas negativa, quod euenit, si fuerit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, aequatio $z = 0$ vniam habebit radicem realem $> a$, hoc est

est maiorem quam $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Ponamus ergo esse $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ seu esse $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 + gg$; atque, ut vidimus, aequatio proposita cubica habebit radicem realem $> \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Quales autem futurae sint reliquae radices, ex valore \mathfrak{B} intelligitur: erit autem $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3 - gg$; qui si fuerit affirmatiuus, aequatio insuper duas habebit radices reales, priorem intra limites α & ϵ , hoc est intra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ contentam, alteram vero minorem quam $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Sin autem fuerit $gg > \frac{4}{27}f^3$, seu \mathfrak{B} negatiuum, tum aequatio habebit duas radices imaginarias. At si fuerit $\mathfrak{B} = 0$ seu $\frac{4}{27}f^3 = gg$ tum duae radices euadent aequales, vtraque $= \epsilon = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Denique si sit valor ipsius \mathfrak{A} affirmatiuus seu $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, tum aequatio duas habebit radices imaginarias, tertiaque erit realis & $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Atque si sit valor ipsius $\mathfrak{A} = 0$, duae erunt radices aequales $= \alpha$, manente tertia $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306. Quo igitur aequationis cubicae $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ omnes tres radices sint reales, requiruntur tres conditiones. Primo ut sit $B < \frac{1}{3}AA$: sit ergo $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Secundo ut sit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$. Tercio ut sit $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Quae duae posteriores conditiones eo redeunt, ut C contineatur intra hos limites $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$ seu intra hos limites $\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f)$ & $\frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$. Quod si ergo harum conditionum vnica desit, aequatio duas habebit radices imaginarias. Sic si fuerit $A = 3$,
Pp pp 3
B = 2,

$B=2$, erit $\frac{1}{3}ff=\frac{1}{3}AA-B=1$ & $ff=3$; unde ista
 aequatio: $x^3-3xx+2x-C=0$ omnes radices
 reales habere nequit, nisi C contineatur intra limites
 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ & $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Quare si fuerit vel $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$
 seu $C < -0,3849$, vel $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C > 0,3849$
 aut coniunctim $CC > \frac{4}{27}$, aequatio vnicam habebit radi-
 cem realem.

307. Quoniam in omni aequatione secundus ter-
 minus tolli potest, ponamus esse $A=0$, ita vt habea-
 mus hanc aequationem cubicam $x^3+Bx-C=0$.
 Vt igitur huius aequationis omnes tres radices sint rea-
 les, necesse est vt primo sit $B < 0$, seu B debet esse
 quantitas negatiua. Sit ergo $B=-kk$, erit $ff=3kk$,
 atque insuper requiritur, vt quantitas C contineatur in-
 tra hos limites $-\frac{2}{27}f^3$ & $+\frac{2}{27}f^3$; hoc est inter
 hos $-\frac{2}{27}kk\sqrt{3}kk$ & $+\frac{2}{27}kk\sqrt{3}kk$. Erit ergo
 $CC < \frac{4}{27}k^6$ seu $CC < -\frac{4}{27}B^3$. Vnica ergo condi-
 tione natura aequationum cubicarum, quae omnes tres
 radices habeant reales comprehendi poterit, dum dice-
 mus esse oportere $4B^3+27CC$ quantitatem negati-
 uam. Sic enim iam postulatur, vt sit B quantitas
 negatiua, quia alioquin $4B^3+27CC$ negatiuum fieri
 non posset. Quocirca generatim affirmamus, aequatio-
 nem $x^3+Bx\pm C=0$ omnes tres radices habituram
 esse reales, si fuerit $4B^3+27CC$ quantitas negatiua.
 Sin autem haec quantitas fuerit affirmatiua, tum vnicam
 fore realem, reliquas binas imaginarias; at si fiat
 $4B^3$

$4B^3 + 27CC = 0$, tum omnes quidem radices futuras esse reales, at binas inter se aequales.

308. Progrediamur ad aequationes biquadratas, in quibus etiam secundum terminum deesse ponamus. Sit ergo $x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$. Statuamus $x = \frac{1}{u}$, eritque $1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$, cuius aequatio differentialis est $2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0$, quae unam habet radicem $u = 0$, tum vero erit $uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$ & $u = \frac{3C \pm \sqrt{9CC - 32BD}}{8D}$. Vt igitur om-

nes quatuor radices sint reales, primo requiritur, ut sit $9CC > 32BD$. Ponamus ergo esse $9CC = 32BD + 9ff$, erit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Hic C semper pro quantitate affirmatiua sumere poterimus, nisi enim talis fuerit, ponendo $u = -v$ talis euadet. Mox autem demonstrabimus omnes radices reales esse non posse, nisi sit B quantitas negatiua. Sit ergo $B = -gg$, eritque $9CC = 9ff - 32ggD$, & $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Atque duo casus erunt perpendendi, prout D sit quantitas affirmatiua vel negatiua.

I. Sit D quantitas affirmatiua, eritque $f > C$, ac tres ipsius u radices secundum quantitatis ordinem dispositae erunt 1^o; $u = \frac{3C + 3f}{8D}$, 2^o; $u = 0$, 3^o; $u = \frac{3C - 3f}{8D}$.

Aequa-

Aequatio autem $u^4 - \frac{C u^3}{D} + \frac{B u^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$, his valoribus loco u substitutis dabit sequentes tres valores.

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

quorum primus ac tertius debet esse negativus: vterque quidem ob C affirmativum & $C < f$ fit minor quam $\frac{1}{D}$.

Oportet itaque esse $\frac{1}{D} < \frac{27(C+f)^3(3f-C)}{4096 D^4}$ &

$$\frac{1}{D} < \frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096 D^4}, \text{ seu } 4096 D^3 < 27(f+C)^3(3f-C)$$

& $4096 D^3 < 27(f-C)^3(C+3f)$. At prior quantitas semper longe maior est posteriori; vnde sufficit, si fuerit $D^3 < \frac{27}{4096} (f-C)^3 (C+3f)$, existente

$$B = \frac{9CC-9ff}{32 D} \text{ \& } f > C, \text{ atque } D > 0. \text{ Si igitur}$$

fuerit D quantitas affirmativa, C affirmativa, B negativa, vt fit $f > C$, atque $D^3 < \frac{27}{4096} (f-C)^3 (C+3f)$,

hoc est $D < \frac{3}{16} (f-C) \sqrt[3]{(3f+C)}$, tum aequatio

omnes

omnes radices habebit reales. Sin autem fuerit $D > \frac{3}{16} (f-C) \sqrt[3]{(3f+C)}$, attamen $D < \frac{3}{16} (f+C) \sqrt[3]{(3f-C)}$; tum duae radices erunt reales & duae imaginariae. At si adeo fuerit $D > \frac{3}{16} (f+C) \sqrt[3]{(3f-C)}$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

II. Sit D quantitas negatiua puta $= -F$, manente C affirmatiua ac B negatiua, ob $B = \frac{9CC - 9ff}{32D} = \frac{9ff - 9CC}{32F}$, erit $C > f$. Cum igitur sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \pm 3f}{8F}$, tres valores ipsius u secundum ordinem magnitudinis dispositi erunt 1^o, $u = 9$; 2^o, $u = -\frac{3C+3f}{8F}$; 3^o, $u = -\frac{3C-3f}{8F}$, qui dabunt sequentes valores

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathcal{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096F^4} = \frac{1}{F}$$

$$\mathcal{C} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096F^4} = \frac{1}{F}$$

Cum igitur \mathcal{A} sit quantitas negatiua, aequatio iam certo vnam, ac propterea quoque duas habebit radices reales. Vt autem omnes radices sint reales, oportet vt \mathcal{B} sit
Qq qq quan-

quantitas affirmatiua, ideoque $27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$:
 tum vero necesse est, vt sit \mathcal{C} quantitas negatiua seu
 $27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$. Quocirca vt om-
 nes radices fiant reales, requiritur vt F^3 contineatur in-
 tra hos limites $\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f)$ & $\frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$
 seu vt F contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{3}{16}(C+f)} \sqrt[3]{(C-3f)}$
 & $\sqrt[3]{\frac{1}{16}(C-f)} \sqrt[3]{(C+3f)}$; & nisi F contineatur in-
 tra hos limites, duae radices erunt imaginariae.

III. Ponamus iam B esse quantitatem affirmatiuam,
 & D pariter affirmatiuam, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32D}$, erit $C > f$,
 & cum fit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$, radices ordine magnitudinis
 dispositae erunt $1^\circ, u = \frac{3(C+f)}{8D}$; $2^\circ, u = \frac{3(C-f)}{8D}$
 & $3^\circ; u = 0$, vnde sequentes oriuntur valores:

$$\mathcal{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathcal{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{D}$$

vbi cum \mathcal{C} sit quantitas affirmatiua, certo duae radices
 erunt imaginariae. Sin autem fuerit \mathcal{A} negatiuum,
 quod

quod euenit, si $4096 D^3 < 27(C+f)^3(3f-C)$, duae radices erunt reales: sin fuerit $4096 D^3 > 27(C+f)^3(3f-C)$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

IV. Maneat B affirmatiuum, sit autem D negatiuum $= -F$, ob $B = \frac{9ff-9CC}{32 F}$, erit $f > C$ & ob $u = -\frac{3C+3f}{8F}$, tres ipsius u radices secundum ordinem magnitudinis dispositae erunt $1^\circ, u = \frac{3(f-C)}{8F}$; $2^\circ, u = 0$; & $3^\circ, u = -\frac{3(C+f)}{8F}$, vnde isti valores nascuntur.

$$\mathfrak{A} = -\frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{27(C+f)^3(3f-C)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

vbi ob \mathfrak{A} & \mathfrak{C} negatiua aequatio certo duas habet radices reales, at ob \mathfrak{B} negatiuum, duae radices erunt imaginariae.

309. Si igitur ponamus litteras B, C, D quantitates affirmatiuas denotare, sequentes oriuntur casus diuersi diiudicandi, qui ob $f = \sqrt[3]{(CC - \frac{32}{9}BD)}$ huc redeunt.

I. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Omnes radices erunt reales, si fuerit

$$D < \frac{1}{18} [\sqrt[3]{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C] \sqrt[3]{[3\sqrt[3]{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C]}$$

Qq qq 2 Duae

Duae radices erunt reales, duaeque imaginariae, si fuerit

$$D > \frac{3}{16} [V(CC + \frac{3}{9}BD) - C] \sqrt[3]{[3V(CC + \frac{3}{9}BD) + C]}$$

$$\text{at } D < \frac{3}{16} [V(CC + \frac{3}{9}BD) + C] \sqrt[3]{[3V(CC + \frac{3}{9}BD) - C]}$$

Omnes autem radices erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \frac{3}{16} [V(CC + \frac{3}{9}BD) + C] \sqrt[3]{[3V(CC + \frac{3}{9}BD) - C]}.$$

II. Si aequatio fit $x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$.
Duae radices semper sunt reales, reliquae binae quoque erunt reales, si quantitas D contineatur intra hos limites.

$$D > \frac{3}{16} [V(CC + \frac{3}{9}BD) + C] \sqrt[3]{[C - 3V(CC - \frac{3}{9}BD)]}$$

$$D < \frac{3}{16} [C - V(CC - \frac{3}{9}BD)] \sqrt[3]{[C + 3V(CC + \frac{3}{9}BD)]}$$

nisi autem D contineatur intra hos limites, duae reliqua radices erunt imaginariae.

III. Si aequatio fit $x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$.
Duae radices semper erunt imaginariae. Reliquae vero duae erunt reales, si fuerit

$$D < \frac{3}{16} [V(CC - \frac{3}{9}BD) + C] \sqrt[3]{[3V(CC - \frac{3}{9}BD) - C]}$$

Reliquae vero duae quoque erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \frac{3}{16} [V(CC - \frac{3}{9}BD) + C] \sqrt[3]{[3V(CC - \frac{3}{9}BD) - C]}$$

IV. Si aequatio fit $x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$.
Huius aequationis duae radices semper erunt reales, duae reliquae vero semper imaginariae.

EXEMPLUM I.

Si proponatur haec aequatio $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$
quaeratur natura radicum, vtrum sint reales an
imaginariae.

Quia hoc exemplum ad casum primum pertinet, est
 $B = +2$; $C = 3$ & $D = 4$; vnde $CC + \frac{3^2}{9}BD$
 $= 9 + \frac{32 \cdot 8}{9} = \frac{337}{9}$ & $\sqrt{CC + \frac{3^2}{9}BD} = \frac{\sqrt{337}}{3}$
vnde conditiones vt omnes radices sint reales, sunt

$$4 < \frac{3}{16} \left(3 + \frac{\sqrt{337}}{3} \right)^3 \sqrt{V_{337}-3} = \frac{1}{16} (9 + \sqrt{337}) \sqrt{V_{337}-3}$$

$$4 < \frac{3}{16} \left(\frac{\sqrt{337}}{3} - 3 \right)^3 \sqrt{V_{337}+3} = \frac{1}{16} (\sqrt{337}-9) \sqrt{V_{337}+3}$$

Adhibitis, approximationibus examinari debet ergo, vtrum
fit $4 < \frac{69}{16}$ & $4 < \frac{24}{16}$; quare cum prior tantum condi-
tio locum habeat, aequatio habebit duas radices reales,
& duas imaginarias.

EXEMPLUM II.

Proposita sit haec aequatio:

$$x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0.$$

Quae cum pertineat ad casum secundum, duas habe-
bit radices reales. Ad reliquarum naturam inuestigan-
dam

dam, ob $B=9$, $C=12$ & $D=4$, erit $V(CC - \frac{3^2}{9}BD)$
 $=V(144 - 32.4)=4$. Ideoque videndum est, vtrum sit

$$4 > \frac{3}{16} \cdot 16 \sqrt[3]{0}, \quad \text{hoc est } 4 > 0$$

$$\& 4 < \frac{3}{16} \cdot 8 \sqrt[3]{24} \quad \text{hoc est } 4 < 3 \sqrt[3]{3}$$

quorum vtrumque cum eueniat, aequatio proposita quatuor habebit radices reales.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec aequatio:

$$x^4 + xx - 2x + 6 = 0.$$

Quae cum pertineat ad casum tertium, duae radices certo erunt imaginariae. Tum vero est $B=1$; $C=2$ & $D=6$, ideoque $V(CC - \frac{3^2}{9}BD) = V(4 - \frac{6^2}{3})$, quae quantitas cum sit imaginaria, & duae reliquae radices certo erunt imaginariae.

EXEMPLUM. IV.

Sit proposita aequatio haec:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0.$$

Eliminetur primo secundus terminus, substituendo $x = y + 1$ fiet

$$\begin{array}{rcl} x^4 & = & y^4 + 4y^3 + 6yy + 4y + 1 \\ - 4x^3 & = & - 4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 \\ + 8x^2 & = & + 8y^2 + 16y + 8 \\ - 16x & = & - 16y - 16 \\ + 20 & = & + 20 \end{array}$$

$$\text{Ergo } y^4 + 2yy - 8y + 9 = 0 \quad \text{quae}$$

quae cum pertineat ad casum tertium, duas radices habebit imaginarias. Tum vero ob $B=2$, $C=8$, $D=9$, erit $V(CC - \frac{32}{9} \cdot BD) = V(64 - 64) = 0$. Comparetur ergo $D=9$ cum $\frac{3}{16} \cdot 8 \sqrt[3]{-8} = -3$. Cum ergo sit $D=9 > -3$, etiam duae reliquae radices erunt imaginariae.

EXEMPLUM V.

Sit proposita haec aequatio: $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$
cuius radices constat esse, 1, 2, 4. & -3.

Quod si autem regulas applicemus, sublato secundo termino ponendo $x=y+1$ fiet: $y^3 - 13yy + 12y + 0 = 0$ quae cum casu secundo comparata dat $B=13$, $C=12$, $D=0$. Debet ergo esse $D > \frac{3}{16} \cdot 24 \cdot \sqrt[3]{-24}$; seu $0 > -9\sqrt[3]{3}$ & $D < 0$; cum igitur D non sit maius quam 0, aequatio quatuor radices reales habere indicatur. Si enim sit $D=0$, altera aequatio abit in $D < \frac{3}{16} \left(\frac{16BD}{9C} \right) \sqrt[3]{4C}$ ideoque $1 < \frac{B}{3C} \sqrt[3]{4C}$, seu $27CC < 4B^3$: est vero $27 \cdot 144 < 4 \cdot 13^3$ seu $36 \cdot 27 < 13^3$.

310. Opus foret maxime difficile, si simile iudicium ad aequationes altiorum graduum transferre vellemus, propterea quod aequationum differentialium radices plerumque exhiberi non possunt; quoties autem has radices assignare licet, ex traditis principiis facile colli-

colligitur, quot aequatio proposita habeat radices reales & imaginarias. Hinc omnis aequationis, quae tantum ex tribus terminis constat, radices, vtrum sint reales an imaginariae? definiri poterunt. Sit enim proposita haec aequatio generalis:

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0 = z$$

Sumatur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$, qua nihilo aequali posita, erit primo $x^{n-1} = 0$; vnde si n fuerit impar numerus, nulla radix maximum minimumue exhibens oritur: sin autem sit n numerus par, vna radix in computum ducenda erit $x = 0$. Tum vero erit $(m+n)x^m + nA = 0$; quae aequatio, si m sit numerus par, & A affirmatiua quantitas, nullam habet radicem realem. Hinc sequentes casus erunt expendendi.

I. Sit m numerus par & n numerus impar, & radix $x = 0$ non valebit. Si igitur fuerit A quantitas affirmatiua, nulla prorsus habebitur radix maximum minimumue exhibens; vnde ob $m+n$ numerum imparem aequatio proposita vnicam habebit radicem realem. Sin autem fuerit A quantitas negatiua; puta $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m+n]{\frac{nE}{m+n}}$: vnde $\alpha = +\sqrt[m+n]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = -\sqrt[m+n]{\frac{nE}{m+n}}$.

Ex quibus valoribus fit:

$$\mathcal{A} = (x^m - E)x^n + B = -\frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

atque $\mathcal{B} = +\frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Si igitur fuerit

fuerit igitur \mathcal{A} quantitas negatiua, seu $\frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n} \right)^{n:m} > B$,
 aequatio vnā habebit radicem realem $> a$. Si insuper
 fuerit $B > -\frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n} \right)^{n:m}$, hoc est ambas
 conditiones in vnā complectendo, si fuerit
 $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$, tum aequatio tres
 habebit radices reales: &, nisi haec conditio locum ha-
 beat, aequationis vnica radix erit realis. Valent haec
 de aequatione $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, si fuerit m
 numerus impar: vbi si E fuerit numerus negatiuus,
 aequatio semper vnica radicem habebit realem.

II. Sint ambo numeri m & n impares, vt sit $m+n$
 numerus par, nullaue radix $x = 0$ in computum ve-
 niat. Quia est $(m+n)x^m + nA = 0$, erit
 $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$, quae vnica radix si sit $= a$, fiet

$\mathcal{A} = \frac{mA}{m+n} x^n + B = -\frac{mA}{m+n} \left(\frac{nA}{m+n} \right)^{n:m} + B$. Qui
 valor si fuerit negatiuus, aequatio proposita duas habebit
 radices reales, contra nullam. Aequatio ergo proposita
 $x^{m+n} + Ax^n + B = 0$ duas habebit radices reales,
 si fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$; sin fuerit
 $m^m n^n A^{m+n} < (m+n)^{m+n} B^m$, nulla prorsus radix
 erit realis.

III. Sint ambo numeri m & n pares, erit $m+n$ pa-
 riter numerus par: vnaue radix $x = 0$ maximum mi-
 nimum.

Rr rr

nimumue praebebit: quae erit vnica, si A fuerit quantitas affirmatiua, vnde facto $\alpha = 0$, erit $\mathfrak{A} = B$. Quare si fuerit B quoque quantitas affirmatiua, aequatio nullam habebit radicem realem; sin autem B sit quantitas negatiua, duae habebuntur radices reales, neque plures, si quidem A fuerit quantitas affirmatiua. At ponamus esse A quantitatem negatiuam seu $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; habebimusque tria maxima vel mi-

nima: nempe $\alpha = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; $\beta = 0$; $\gamma = - \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$.

Quibus ipsius $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$ respondent

valores $\mathfrak{A} = - \frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n} \right)^{\frac{n}{m+n}} + B$; $\mathfrak{B} = B$;

$\mathfrak{C} = - \frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n} \right)^{\frac{n}{m+n}} + B$. Si igitur B sit

quantitas negatiua, ob \mathfrak{A} & \mathfrak{C} negatiuas, aequatio duas tantum habebit radices reales, propterea quod quoque $\mathfrak{B} = B$ sit negatiuum. At si B fuerit quantitas affirmatiua, aequatio quatuor habebit radices reales, si sit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$. Nullam autem habebit radicem realem, si fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$.

IV. Sit m numerus impar & n numerus par: atque radix $x = 0$ dabit maximum vel minimum. Praeterea

vero erit $x = - \sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Si ergo A sit numerus

affir-

affirmatiuus, fiet $\alpha = 0$ & $\xi = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$; hincque

$\mathfrak{A} = B$, & $\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n} \left(\frac{nA}{m+n} \right)^{\frac{n}{m}} + B$. Quare si sit B

quantitas negatiua, puta $B = -F$, atque insuper fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} F^m$, aequatio tres habebit radices reales; contra vnica tantum erit realis. Sin autem sit A quantitas negatiua puta $A = -E$, fiet

$x = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\xi = 0$, qui-

bus respondent $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n} \left(\frac{nE}{m+n} \right)^{\frac{n}{m}} + B$ & $\mathfrak{B} = B$.

Quare aequatio tres habebit radices reales, si fuerit B quantitas affirmatiua, & $m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$, quae proprietas nisi locum inueniat, aequatio vnicam habebit radicem realem.

311. Sint omnes coefficientes $= 1$, atque denotantibus μ & ν numeros integros, aequationes sequentes ita diiudicabuntur:

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ vnicam habebit radicem realem:

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$, tres habebit radices reales, si fuerit

$(2\mu+2\nu-1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu} (2\nu-1)^{2\nu-1}$,
Rr rr 2 quod

quod cum nunquam fieri possit, aequatio semper unicam radicem realem habebit :

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0 \quad \text{duas habet radices reales.}$$

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0 \quad \text{nullam habet radicem realem.}$$

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0 \quad \text{nullam habet radicem realem.}$$

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0 \quad \text{duas habet radices reales.}$$

$$x^{2\mu+2\nu+1} \pm x^{2\nu} \pm 1 = 0 \quad \text{unicam habet radicem realem.}$$

$$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0 \quad \text{unicam habet radicem realem.}$$

Ceterum quia in casu tertio ambo exponentes sunt pares, is ponendo $xx = y$ ad formam simpliciore reduci potest, ideoque hic casus praetermitti posset. Quo facto affirmari poterit, nullam aequationem tribus terminis constantem plures tribus habere posse radices reales.

EXEMPLUM.

Quaerantur casus, quibus aequatio haec $x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$ tres habeat radices reales.

Quia haec aequatio pertinet ad casum quartum, patet quantitates A & B, esse debere signis contrariis affectas. Quare nisi huiusmodi habeat formam, unicam habebit radicem realem: sin autem aequatio proposita fuerit huiusmodi

modi $x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0$, quo ea habeat tres radices reales, necesse est ut sit $3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3$ seu $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$.

Quodsi ergo fuerit $B = 1$, oportet esse, $A^5 > \frac{3125}{108}$, seu $A > 1,960132$. Si ergo sit $A = 2$ ista aequatio $x^5 - 2x^2 + 1 = 0$ tres habet radices reales, quarum cum una sit $x = 1$; sequitur hanc aequationem biquadratam $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, duas habere radices reales. Quod quidem tum ex his datis praeceptis intelligi potest, tum ex iis, quae in libro superiori sunt demonstrata, manifestum est, ubi ostendimus, quamuis aequationem paris gradus, cuius terminus absolutus sit numerus negatiuus, habere semper duas radices reales.

312. Ex his principiis quoque aequationes, quae constant quatuor terminis, diiudicari poterunt, dummodo aequationis differentialis radices commode exhiberi queant, quod euenit, si exponentes ipsius x vel in tribus anterioribus, vel in tribus posterioribus terminis sint in arithmetica progressionem. Cum autem haec diiudicatio in genere suscepta ad plures perducatur casus, eam in nonnullis exemplis absoluiamus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Facto $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, erit $\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$,
quo valore nihilo aequali posito fiet primo $xx = 0$,
Rr rr 3 qui

qui duplex valor pro nullo reputandus. Tum vero erit
 $7x^4 = 10x^2 - 3$, vnde fit $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$; & quatuor
 valores pro x emergent, qui secundum magnitudinem
 ordinati, sequentes pro z praebebunt valores:

$\alpha = 1$	$\mathcal{A} = -a$
$\epsilon = +\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$	$\mathcal{B} = \frac{48}{343}\sqrt[3]{\frac{48}{343}} - a$
$\gamma = -\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$	$\mathcal{C} = -\frac{48}{343}\sqrt[3]{\frac{48}{343}} - a$
$\delta = -1$	$\mathcal{D} = -a$

Si ergo fit a numerus affirmatiuus, erit vel $a > \frac{48}{343}\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$,
 vel $a < \frac{48}{343}\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$, priori casu ob \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , omnes
 negatiuas, aequatio proposita vnicam habebit radicem
 realem $x > 1$. Posteriori casu si $a < \frac{48}{343}\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$ aequatio
 tres habebit radices reales, primam > 1 , secundam con-
 tentam inter limites 1 & $\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$, & tertiam intra limites
 $+\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$ & $-\sqrt[3]{\frac{48}{343}}$.

Sin a fit quantitas negatiua ponendo $x = -y$, ac-
 quatio perducetur ad formam priorem. Quo ergo ae-
 quatio proposita tres habeat radices reales, necesse est
 vt sit $a < 0,0916134$ vel $a < \frac{1}{11}$.

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec aequatio :

$$ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0.$$

Quia hic exponentes trium posteriorum terminorum sunt in arithmetica progressionem, ponatur $x = \frac{1}{y}$ atque aequatio transmutabitur in hanc :

$$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0, \text{ ponatur ergo } z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0, \text{ eritque differen-}$$

$$\text{tiando } \frac{dz}{dy} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0, \text{ ex qua aequa-}$$

$$\text{tione primo fit } y = 0; \text{ tum vero erit } y^6 = \frac{50y^3 - 6}{96}$$

$$\& y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}, \text{ ideoque vel } y = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \text{ vel } y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}.$$

His ergo tribus radicibus secundum magnitudinem dispositis, respondentes ipsius z valores ita se habebunt :

$a = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$
$\epsilon = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64} \sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a.$

Quodsi ergo fuerit $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, aequatio proposita duas habebit radices reales, alteram $> \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, alteram < 0 :

at praeter has insuper habebit duas radices reales, si simul fuerit \mathfrak{B} quantitas affirmatiua, hoc est, si fuerit $a < \frac{99}{256} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Quamobrem aequatio proposita quatuor habebit radices reales, si quantitas a contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ & $\frac{99}{256} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; qui limites proxime sunt: 0,48075 & 0,50674. Posito ergo $a = \frac{1}{2}$, haec aequatio $x^6 - 6x^5 + 20x^3 - 24 = 0$ quatuor habet radices reales intra limites ∞ ; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$; 0; $-\infty$; ergo tres erunt affirmatiuae & vna negatiua.

* o *

CAPUT XIII.

DE CRITERIIS RADICUM IMAGINARIARUM.

313.

In capite praecedenti modum exhibuimus naturam radicum cuiusque aequationis explorandi, ita ut eius beneficio, si proponatur aequatio quaecunque, inueniri possit, quot ea radices habeat reales, & quot imaginarias. Plerumque quidem haec inuestigatio difficillime instituitur, cum aequatio differentialis ita est comparata, ut eius radices exhiberi nequeant. Quanquam autem his casibus eadem operatio ad aequationem differentialem ipsam accommodari, eiusque radicum natura ex ipsius differentiali indagari, hincque illius radices proxime assignari possent; tamen labor nimium saepissime fieret molestus. Quamobrem in hoc negotio saepenumero sufficit eiusmodi criteria nosse, ex quorum praesentia tuto concludi possit, inesse in aequatione proposita radices imaginarias; etiam si ex eorum absentia vicissim inferri nequeat, omnes prorsus radices esse reales. Quae cognitio etsi est imperfecta, tamen frequenter usu non destituitur: quocirca his criteriis explicandis praesens caput destinauimus.

314. In capite igitur praecedenti vidimus, si aequatio quaecunque:

S s s s

x =

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum etiam eius differentialem

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

omnes suas radices habituram esse reales. Simul vero ostendimus, etiamsi aequatio differentialis omnes habeat radices reales; tamen inde non sequi, ipsius aequationis propositae omnes radices futuras esse reales. Interim tamen, si aequatio differentialis habeat radices imaginarias, tum semper recte concludimus, aequationem ipsam propositam ad minimum totidem habere debere radices imaginarias. Ad minimum dico: fieri enim potest, ut ipsa aequatio plures habeat radices imaginarias. Hoc ergo modo ex aequatione differentiali plus concludi non potest, quam, si ea habeat radices imaginarias, ipsam propositam aequationem eiusmodi radices quoque habere debere, & quidem ad minimum totidem.

315. Si aequatio proposita multiplicetur per potestatem quamcunque x^m , denotante m numerum integrum affirmativum; tum quia haec nova aequatio omnes radices habebit reales, si quidem propositae radices omnes fuerint reales: tum quoque eius differentialis, postquam per x^{m-1} fuerit diuisa, radices erunt reales omnes. Hinc si haec aequatio:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque ista aequatio

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

om-

omnes radices habebit reales. Ob eandem rationem, si haec multiplicetur per x^k & denuo differentietur, aequatio resultans:

$$(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

omnes adhuc radices habebit reales: ficque quousque libuerit, ulterius progredi licet. Sin autem huiusmodi aequatio radices imaginarias habere deprehendatur, tum simul certum erit, ipsam aequationem propositam saltem totidem radices imaginarias esse habituram.

316. Si aequatio proposita, antequam differentietur, per nullam potestatem ipsius x multiplicetur, tum iudicium ad aequationem vno gradu inferiorem deducitur. Ita si aequatio proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque eius differentiales omnium ordinum omnes radices habebunt reales. Quare & sequentium aequationum omnium radices erunt reales:

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

$$n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-2)(n-3)Bx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4} + \&c. = 0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5} + \&c. = 0$$

&c.

quae aequationes ad sequentes formas reuocantur:

S s s s 2

x^{n-1}

$$x^{n-1} - \frac{(n-1)}{n} Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{(n-2)}{n} Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-5} + \&c. = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{(n-3)}{n} Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-6} + \&c. = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{(n-4)}{n} Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-7} + \&c. = 0$$

&c.

317. Hoc igitur modo iudicium ad aequationem dati gradus inferioris, quam est ipsa proposita, reduci potest. Sic si m fuerit numerus quicumque minor quam n , tum si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque huius aequationis gradus m omnes radices erunt reales:

$$x^m - \frac{m}{n} Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{m-3} + \&c. = 0.$$

Quare si ponatur $m = 2$, prodibit ista aequatio:

$$x^2 - \frac{2}{n} Ax + \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} B = 0,$$

cuius radices debebunt esse reales, si quidem aequatio proposita $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$, omnes habeat radices reales. Cum autem ista aequatio quadratica radices reales habere nequeat, nisi sit $\frac{AA}{nn} > \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} B$, sequitur, aequationis propositae radi-

ces omnes reales esse non posse, nisi sit $AA > \frac{2n}{n-1} B$.

Quamobrem si fuerit $AA < \frac{2n}{n-1} B$, hoc certum erit signum, aequationis propositae ad minimum duas radices fore imaginarias.

318. Hinc ergo affecti sumus affectionem necessariam, qua coefficientes trium primorum terminorum affecti esse debent, si quidem aequationis propositae omnes radices fuerint reales. Hocque est eiusmodi criterium, vti initio meminimus: scilicet etiamsi casu

$AA > \frac{2n}{n-1} B$, nihil pro realitate radicum sequatur, at si

fit $AA < \frac{2n}{n-1} B$, hoc tamen certum sit signum duarum saltem radicum imaginariarum. Sic ut omnes radices sint reales, successive pro n numero 2, 3, 4, 5, &c. substituendo requiritur; ut sequitur:

$$\begin{aligned} x^2 - Ax + B &= 0 \dots\dots\dots A^2 > 4B \\ x^3 - Ax^2 + Bx - C &= 0 \dots\dots\dots A^2 > \frac{5}{2}B \\ x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D &= 0 \dots\dots\dots A^2 > \frac{8}{3}B \\ x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E &= 0 \dots\dots\dots A^2 > \frac{10}{4}B \end{aligned}$$

Hinc si terminus secundus desit, tertique coefficientis B sit affirmatiuus, ut aequatio sit huiusmodi:

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0,$$

haec omnes radices reales habere nequit, sed ad minimum duae erunt imaginariae.

319. Huiusmodi vero criteria pro coefficientibus sequentium terminorum erui possunt, si perpendamus aequationem hanc:

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$$

totidem habere radices tam reales quam imaginarias, quot ipsa aequatio proposita contineat. Haec enim aequatio ex illa oritur, si ponatur $x = \frac{1}{y}$, ita ut ex radicibus huius aequationis simul radices illius habeantur. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque reciprocae istius differentialis, scilicet huius $A - 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 - \&c. = 0$ radices omnes erunt reales. Substituatur in hac iterum x pro $\frac{1}{y}$, atque emerget ista aequatio:

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \&c. = 0,$$

cuius radices propterea omnes erunt reales, si radices aequationis propositae fuerint tales. Hinc iam patet, si fuerit $n = 3$, necesse esse ut sit $BB > 3AC$.

320. Differentietur autem ista aequatio ulterius, atque prodibunt:

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1} Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)} Cx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1} Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)} Cx^{n-5} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1} Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)} Cx^{n-6} - \&c. = 0$$

&c.

Gene.

Generaliter ergo, si m fit numerus minor quam n , erit:

$$Ax^m - \frac{2m}{n-1} Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)} Cx^{m-2} - \&c. = 0.$$

Si iam ponatur $m=2$, habebitur ista aequatio:

$$Ax^2 - \frac{4}{n-1} Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)} C = 0,$$

cuius radices vt sint reales, oportet esse $\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$.

Quare si aequatio proposita omnes habeat radices reales erit $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$. Atque si fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, hoc certum est signum, aequationem propositam ad minimum duas habere radices imaginarias. Si igitur sit $n=3$, criterium erit $BB > 3AC$; si sit $n=4$; erit $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} AC$; si $n=5$, erit $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} AC$, & ita porro.

321. Vt haec criteria ad sequentes coefficientes transferamus, resumamus aequationem differentialem in y inuentam:

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \&c. = 0$$

hancque denuo differentiemus, vt habeamus:

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \&c. = 0$$

quae restituto $\frac{1}{x}$ loco y dabit:

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

ex cuius vltioris differentiatione sequuntur hae aequationes:

$$Bx^{n-3}$$

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2} Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)} Dx^{n-5} - \&c. = 0$$

& generaliter

$$Bx^m - \frac{3m}{n-2} Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)} Dx^{m-2} - \&c. = 0$$

Quod si igitur ponamus $m=2$ prodibit aequatio quadrata:

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2} Cx + \frac{6 \cdot 2}{(n-2)(n-3)} D = 0$$

cuius radices erunt reales, si fuerit $\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6 \cdot 2 BD}{(n-2)(n-3)}$

feu $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$. Quare si aequatio proposita

omnes radices habeat reales, erit $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, at-

que si haec conditio deficiat, aequatio certo duas ad minimum habebit radices imaginarias.

322. Si aequationem superiorem $2B - 6Cy + 12Dy^2 - \&c. = 0$ denuo differentiemus, prodibit:

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \&c. = 0, \text{ siue}$$

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \&c. = 0,$$

quae restituto x loco $\frac{1}{y}$ abibit in hanc:

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

ex cuius ulteriori differentiatione sequuntur:

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{(n-3)} Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)} Ex^{n-6} - \&c. = 0$$

$$Cx^{n-5}$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)Dx^{n-6}}{n-3} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-7} - \&c.$$

& generaliter

$$Cx^m - \frac{4mD}{n-3}x^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{m-2} - \&c. = 0.$$

Ponamus $m=2$, eritque $Cx^2 - \frac{2 \cdot 4}{n-3}Dx + \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}E = 0$

ex qua si eius radices sint reales sequitur fore:

$$\frac{4 \cdot 4}{(n-3)^2}DD > \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}CE \text{ seu } DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE.$$

323. Ex his iam satis perspicitur relatio omnium coefficientium. Generatim ergo si aequatio haec:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales; erit

$$A A > \frac{2n}{1(n-1)} B$$

$$B B > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} A C$$

$$C C > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} B D$$

$$D D > \frac{5(n-3)}{4(n-4)} C E$$

$$E E > \frac{6(n-4)}{5(n-5)} D F$$

&c.

T t t t Quarum

Quarum conditionum si vna desit, aequatio ad minimum duas habebit radices imaginarias. Atque si ista criteria a se-inuicem non pendeant, facile perspicitur, quotquot eorum non conueniant, totidem dari paria radicum imaginariarum. Quamuis autem hae conditiones omnes in quapiam aequatione locum habeant, tamen inde non sequitur, nullas dari radices imaginarias; quin potius euenire potest, vt hoc non obstante omnes radices sint imaginariae. Cauendum ergo est, ne his criteriis plus tribuatur, quam ipsis vi principiorum, vnde sunt deducta, tribui potest.

324. Facile autem apparet non singula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare posse; in aequatione enim n dimensionum, quia habentur $n-1$ termini, atque ex singulis praeter primum & vltimum criterium desumi potest, omnino criteria habebuntur $n-1$; neque tamen si singula deficiant, aequatio $2n-2$ radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices. Vnum autem criterium semper duas radices imaginarias patefacit, & quia fieri potest, vt duo criteria huiusmodi radicum non plures ostendant, videndum est vtrum haec duo criteria sint contigua nec ne; priori casu numerus radicum imaginariarum non augebitur, posteriori vero, quia criteria litteras prorsus diuerfas inuoluunt, vnum quodque binas radices imaginarias monstrabit. Ita etiamsi fuerit

$$A A \leq \frac{2n}{1(n-1)} B \quad \& \quad B B \leq \frac{3(n-1)}{2(n-2)} A B, \quad \text{ta-}$$

men

men hinc non necessario quatuor radices imaginariae indicantur, sed vtrumque fortasse easdem binas indicat.

Quodsi vero fuerit $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$

existente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, quatuor radices imaginariae indicabuntur.

325. Ex criteriis ergo radicum imaginariarum se immediate insequentibus plus non sequitur, quam ex vno; sin autem ea ordine interrupto procedant, vt inter bina quaeque criterium vnum vel plura contraria interiaceant, tum ex vnoquoque binae radices imaginariae concludi poterunt. Quae consideratio sequentem regulam suppeditat. Aequationis propositae singulis terminis, praeter primum & vltimum, inscribantur coefficientes criteriorum ante inuenti, hoc modo:

$$\frac{2n}{1(n-1)} \quad \frac{3(n-1)}{2(n-2)} \quad \frac{4(n-2)}{3(n-3)} \quad \frac{5(n-3)}{4(n-4)} \quad \&c.$$

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$+ \dots \dots \dots \&c.$$

Tum examinetur quadratum cuiusque coefficientis, vtrum sit maius an minus, quam fractio inscripta per productum adiacentium coefficientium multiplicata, priori casu termino subscribatur signum +, posteriori signum —; primo vero termino & vltimo perpetuo signum + subscribatur, Quo facto, quot signorum

T t t t 2

horum

horum subscriptorum variationes occurrunt, totidem radices imaginarias aequatio ad minimum habere censenda erit.

326. Haec est regula a *Newtono* inuenta ad radices imaginarias cuiusque aequationis explorandas; de qua autem probe tenendum est, quod iam annotauimus, saepenumero fieri posse, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam hac methodo deteguntur. Hinc alii operam dederunt, vt similes regulas alias inuenirent, quae numerum radicum imaginariarum exactius praebere, ita vt verus istiusmodi radicum numerus minus saepe eum, quem regula ostendat, excederet. In hoc genere imprimis prostat regula *Campbelli* Arithmeticae *Newtoni* vniuersali subiuncta, quam propterea hic explicari conueniet, etiam si non sit perfecta. Nititur autem hoc lemmate: Si fuerint $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \&c.$ quantitates, earumque numerus sit m , ponatur summa harum quantitarum $\alpha + \epsilon + \gamma + \delta + \&c. = S$, summa quadratorum $\alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = V$, erit vtique $V > 0$. Sed cum sit productum ex binis $\alpha\epsilon + \alpha\gamma + \alpha\delta + \epsilon\gamma + \epsilon\delta + \&c. = \frac{SS - V}{2}$; erit $(m-1)V > SS - V$ seu $mV > SS$. Nam si differentiarum inter binas quantitates quadrata sumantur, erit eorum summa

$$= (\alpha - \epsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2 + (\epsilon - \gamma)^2 + (\epsilon - \delta)^2 + \&c.$$

$$= (m-1)(\alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c.) - 2(\alpha\epsilon + \alpha\gamma + \alpha\delta + \epsilon\gamma + \&c.)$$

$$= (m-1)V - 2 \frac{(SS - V)}{2} = mV - SS. \quad \text{Cum}$$

igitur

igitur summa quadratorum realium fit semper affirmatiua, erit $mV - SS > 0$ ideoque $mV > SS$.

327. Hoc lemmate praemisso si habeatur haec aequatio :

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0,$$

eiusque omnes radices fuerint reales numero n , quae sint $a, b, c, d, e, \&c.$ erit vti constat ex natura aequationum :

$$A = a + b + c + d + \&c.$$

$$B = ab + ac + ad + bc + bd + \&c.$$

$$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \&c.$$

$$D = abcd + abce + abde + \&c.$$

$\&c.$

numerus termin.

n

$\frac{n(n-1)}{1. 2}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1. 2. 3. 4. 5}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1. 2. 3. 4. 5. 6}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}$

Sumantur iam singulorum harum serierum terminorum quadrata, ac ponatur :

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.$$

$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \&c.$$

$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \&c.$$

$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \&c.$$

$\&c.$

T t t t 3

erit

erit ex natura combinationum :

$$P = A^2 - 2B$$

$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$

$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H \text{ \&c.}$$

328. Vi igitur lemmatis praemissi habebimus :

$$n \quad P > AA$$

$$\frac{n(n-1)}{1. 2} Q > BB$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3} R > CC$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4} S > DD \quad \&c.$$

Quodsi ergo loco P, Q, R, &c. valores ante inuenti substituantur, obtinebimus sequentes radicum realium proprietates :

$$nAA - 2nB > AA \text{ seu } AA > \frac{2n}{n-1} B$$

$$\frac{n(n-1)}{1. 2} BB - \frac{2n(n-1)}{1. 2} AC + \frac{2n(n-1)}{1. 2} D > BB,$$

siue

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1. 2}}{\frac{n(n-1)}{1. 2} - 1} (AC - D)$$

fimi-

similique modo aequationes sequentes praebent:

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1. \quad 2. \quad 3.}}{n(n-1)(n-2)} (BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} (CE - BF + AG - H)$$

Hinc ergo cuiusque coefficientis quadratum non solum cum producto proxime adiacentium comparatur, sed etiam cum rectangulis binorum quorumque vtrinque aequae distantium; ita tamen vt horum rectangulorum signa alternatim mutantur.

329. Singulis igitur aequationis terminis praeter primum & vltimum inscribi debent fractiones, quarum numeratores sint vnciae binomii ad similem dignitatem eleuati duplicatae, denominatores vero eadem vnciae vnitae minutae. Ita considerando aequationes quadratas, cubicas, biquadratas &c. si earum radices omnes fuerint reales, erit:

$$x^2 - \frac{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0; \quad A^2 > 4B$$

Pro aequatione cubica:

$$x^3 - \frac{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \frac{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

$$\text{erit } A^2 > 3B \quad \& \quad B^2 > 3AC.$$

Pro

Pro aequatione biquadrata :

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

erit $A^2 > \frac{8}{3} B$; $B^2 > \frac{1}{3} (AC - D)$; $C^2 > \frac{8}{3} BD$

Pro aequatione potestatis quintae :

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

erit $AA > \frac{1}{4} B$; $B^2 > \frac{2}{9} (AC - D)$; $C^2 > \frac{2}{9} (BD - AE)$
& $D^2 > \frac{1}{9} CE$.

Pro aequatione potestatis sextae :

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F = 0$$

erit $A^2 > \frac{1}{3} B$; $B^2 > \frac{3}{4} (AC - D)$; $C^2 > \frac{4}{9} (BD - AE + F)$;
 $D^2 > \frac{3}{4} (CE - BF)$; $E^2 > \frac{1}{3} DF$. &c.

330. Si igitur quodpiam criterium fallat, id erit indicium duas ad minimum inesse radices imaginarias in aequatione proposita. Cum autem si singula fallant, aequatio ideo non duplo plures habere queat radices imaginarias, simili modo iudicium his casibus erit absolvendum, quem ante pro Neutroniana regula indicaui-
mus. Scilicet si cuiusque termini quadratum maius fue-
rit quam fractio inscripta per producta terminorum adia-
centium & vtrinque aequidistantium multiplicata, tum isti
termino subscribatur signum +, contra vero signum
— ; primo vero & ultimo termino constanter subscri-
batur signum +. Quo facto inspiciatur ordo signo-
rum

rum horum subscriptorum, & quoties occurrit variatio, toties radix imaginaria indicabitur. Quoties ergo haec regula plures radices imaginarias indicat, quam Neutoniana, toties quoque ad veritatem magis accedit. Interim tamen fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam per utramque regulam indicantur.

331. Falleremur ergo, si his criteriis tanquam perfectis signis radicum realium & imaginarium uti vellemus; propterea quod fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant: error autem eo maior esse posset, quo altioris gradus fuerit aequatio proposita. Nam in aequatione quadrata haec criteria ita veritati sunt consentanea, ut si nullas radices imaginarias indicent, etiam aequatio nullas sit habitura. Aequatio autem cubica duas radices imaginarias habere potest, etiam si neutra regula, (ambae autem hoc casu adhuc conveniunt) eas exhibeat. Hos igitur casus investigaturi, sit proposita haec aequatio cubica generalis:

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

in qua si fuerit $AA >_3 B$ & $BB >_3 AC$ neutra regula radices imaginarias indicat. Supra autem (306) vidimus ad id, ut nullae radices imaginariae adsint requiri primo ut sit $B < \frac{1}{3}AA$, quam conditionem quoque ambae regulae requirunt. Sit igitur $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, atque necesse est ut C contineatur intra hos limites:

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 \quad \& \quad \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3.$$

V v v v

Vtra-

Vtraque autem regula tantum postulat, ut sit $C < \frac{BB}{3A}$,
hoc est $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$. Quae condi-
tio locum habere potest, etiam si C non intra dictos li-
mites contineatur.

332. Sit enim $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$;
atque regulae nullas radices imaginarias indicabunt. Inter-
rim tamen in erunt duae radices imaginariae, si fuerit vel
 $\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$

vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3.$$

Si igitur fuerit vel $gg > \frac{(ff + Af)^2}{27A}$ vel $gg < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$,

aequatio cubica duas habebit radices imaginarias, etiam si
neutra regula eas indicet. Sumimus autem hic esse A
quantitatem affirmatiuam, si enim esset negatiua, ponen-
do $x = -y$ aequatio in eiusmodi formam transmutare-
tur, in qua A esset affirmatiua. Hinc infinitae aequatio-
nes cubicae formari possunt, quae habeant duas radices
imaginarias, etiam si per regulam non indicentur. Sit

$$\text{enim } gg = \frac{(ff + Af)^2}{27A} + hh, \text{ erit } C = \frac{(ff - AA)^2}{27A} - gg$$

$$= \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 - hh, \text{ \& } B = \frac{1}{27}AA - \frac{1}{3}ff. \text{ Vel}$$

$$\text{fit } gg = \frac{(Af - ff)^2}{27A} - hh \text{ existente } hh < \frac{(Af - ff)^2}{27A}; \text{ erit}$$

$$C =$$

$C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 + hh$ & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$.
 Vtroque casu prodibit aequatio duas habens radices ima-
 ginarias, neutra regula indicandas. Ponamus verbi gra-
 tia $A = 4$, $f = 1$, erit $B = 5$; & ob $gg = \frac{25}{8} + hh$;
 erit $C = \frac{225}{8} - \frac{25}{8} - hh = \frac{5}{2} - hh$. Quare si sit
 $C < \frac{5}{2}$, aequatio $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ semper
 habebit duas radices imaginarias. At sumto $gg = \frac{1}{2} - hh$
 debebit esse $hh < \frac{1}{2}$, fietque $C = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} + hh = 12 + hh$.
 Sit $hh = \frac{1}{2}$; atque aequatio $x^3 - 4xx + 5x - \frac{25}{2} = 0$
 duas habebit radices imaginarias, etiam si nulla regulis
 prodatur.

333. Quin etiam eiusmodi aequationes generales
 formari possunt, in quibus neutra regula radices imagi-
 narias exhibeat, etiam si tamen saepissime duae pluresue
 insint. Euenit hoc si perpetuo duo signa similia se mu-
 tuo excipiant, vti:

$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$
 vel $x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \&c. = 0$,
 hic vtraque regula nullam vnquam radicem imagina-
 riam prodit. Quod autem saepissime huiusmodi radi-
 ces continere queant, vel ex aequatione cubica elucet
 $x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$, quae posito $ff = AA - 3B$
 semper habet duas radices imaginarias, si fuerit
 vel $-C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ vel $-C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$.
 Interim tamen & hos casus ex regulis elicere licet, si
 aequatio ope substitutionis in aliam formam transfor-
 metur. Ponatur $x = y + k$, fietque:

VVVV 2

$y^3 +$

$$\begin{array}{r}
 y^3 + 3ky^2 + 3kk y + k^3 - Ayy - 2Aky - A kk - By - Bk + C \\
 \hline
 \hline
 0
 \end{array}$$

quae secundum regulas examinata dabit primo quidem sponte $(3k - A)^2 > 3(3kk - 2Ak - B)$; at quo fit $(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - A kk - Bk + C)$, quod est alterum criterium, necesse est ut sit: $BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0$, quicunque valor ipsi k tribuatur. Sumatur ergo k ita, ut haec expressio minimum valorem adipiscatur, quod

fiet ponendo $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$, & si ista expressio ad-

huc fuerit > 0 , probabile erit aequationem propositam nullas habere radices imaginarias. Fiet autem

$$BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0 \text{ seu}$$

$$BB + 3AC > \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)}. \text{ Cum ergo sit } B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA,$$

erit $4ff(\frac{1}{3}f^4 - \frac{2}{3}AAff + \frac{1}{3}A^4 + 3AC) > (\frac{1}{3}Aff - \frac{1}{3}A^3 - 9C)^2$ seu

$$4f^6 - A8^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff > A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

$$\text{vel } 4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

vnde factoribus sumtis esse debet:

$$(2f^3 + A^3 - 3Af + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Af - 27C) > 0.$$

Hincque regulae radices imaginarias ostendent, si fuerit vel

$$C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3 \text{ \& } C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3 \text{ vel}$$

$$C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3 \text{ \& } C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3.$$

Quae

Quae sunt eadem conditiones, quas supra inuenimus. Patet ergo idonea aequationis propositae transmutatione regulas hoc capite traditas ita perfici posse, ut a veritate non diffideant, etiamsi conuertantur.

334. Ex his principiis quoque regula Harriotti, qua quaelibet aequatio tot radices affirmatiuas habere praedicatur, quot dentur signorum variationes, tot vero negatiuas, quot dentur eiusdem signi successiones, demonstrari potest, quae quidem regula pro radicibus tantum realibus valet. Ponamus ergo aequationem $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$ omnes radices habere reales atque affirmatiuas, atque eius differentialis $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c. = 0$ non solum omnes suas radices quoque habebit reales & affirmatiuas, sed etiam huius radices constituent limites radicum illius aequationis. Praeterea vero posito $x = \frac{1}{y}$ haec aequatio $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$ omnes quoque radices habebit reales affirmatiuas, sed reciprocas illius, ita ut quae radices in illa aequatione sint maximae, hae in ista fiant minimae. His positis si illa aequatio proposita continuo differentietur, donec ad aequationem primi ordinis perueniatur, quae erit $x - \frac{1}{n}A = 0$, (317) huius radix adhuc erit affirmatiua, ideoque coefficientis secundi termini habebit signum — uti assumimus. Sin autem iste coefficientis haberet signum +, tum certo sequeretur, aequationem

V v v v 3

pro-

propositam non omnes radices habere affirmatiuas, sed vnam ad minimum fore negatiuam, & quidem eam, quae limitibus hucusque perductis respondeat.

335. Si aequatio proposita in sui reciprocam convertatur & differentietur, tum vero iterum x restituatur, atque differentiationes continuentur, donec perueniatur ad aequationem simplicem, quae ex §. 320. erit huiusmodi $Ax - \frac{2}{n-1} B = 0$, cuius propterea radix

quoque debet esse affirmatiua, si quidem proposita omnes suas radices habeat reales affirmatiuas, hincque secundus & tertius terminus diuersa signa habebunt. Quodsi ergo hi duo termini similia habeant signa, ad minimum vna radix negatiua indicabitur, respondens limiti hac aequatione signato, qui diuersus erit a limite praecedente aequatione indicato, propterea quod hic radices semel sunt in suas reciprocas conuersae: unde concluditur, si tres termini aequationis initiales paria habuerint signa, tum duas radices negatiuas indicari.

336. Simili modo si conuersiones & differentiationes secundum §. 321. instituantur, atque eousque continuentur, donec ad aequationem simplicem $Bx - \frac{3}{n-2} C = 0$ perueniatur, & huius aequationis radix esse debet affirmatiua, si quidem propositae aequationis omnes radices fuerint tales; unde si termini tertius & quartus paria habeant signa, indicabitur vna radix negatiua. Sicque perpetuo, si duo quicunque termini contigui aequalibus signis

signis fuerint affecti, vna radix negatiua proditur; ideoque quocunque fuerint eiusdem signi successiones, totidem ad minimum aequatio proposita habebit radices negatiuas, quoniam haec singula criteria ad diuersos limites referuntur. Quod si autem aequatio proposita omnes radices negatiuas habere ponatur, tum quia radices omnium aequationum differentialium ex ea deductarum debent esse pariter negatiuae, omnes termini aequalibus signis affecti esse debebunt. Quare si duo termini contigui diuersa habeant signa, ex iis vna ad minimum radix affirmatiua concludetur. Atque simili modo, quocunque in aequatione occurrant binorum terminorum variationes signorum, totidem ad minimum radices affirmatiuae inesse dicendae sunt. Cum igitur aequatio omnis tot habeat radices, quot dantur duorum signorum contiguorum combinationes, neque plures, sequitur quamuis aequationem, cuius omnes radices sint reales, tot habere radices affirmatiuas, quot fuerint signorum contiguorum variationes, tot vero negatiuas, quot fuerint eiusdem signi successiones.

CAPUT XIV.
DE DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM
IN CERTIS TANTUM
CASIBUS.

337.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x , atque haec quantitas variabilis x augeatur incremento ω , ut x abeat in $x + \omega$, tum functio y induet hunc valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque capiet hoc incrementum:

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

vti supra demonstrauius. Quare si fiat $\omega = dx$, ita vt x suo differentiali dx crescat, tum functio y incrementum accipiet $= dy + \frac{1}{2} ddy + \frac{1}{6} d^3y + \frac{1}{24} d^4y + \&c.$

quod erit verum differentiale ipsius y . Quoniam vero huius seriei quilibet terminus ad sequentes habet rationem infinitam, prae primo omnes euanescent, ita vt dy more consueto sumtum praebeat verum differentiale ipsius y . Simili modo vera differentialia secunda, tertia, quarta, &c. ipsius y ita se habebunt:

$dd.y$

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3} d^3y + \frac{7}{3.4} d^4y + \frac{15}{3.4.5} d^5y + \frac{31}{3.4.5.6} d^6y + \&c.$$

$$d^3.y = d^3y + \frac{6}{4} d^4y + \frac{25}{4.5} d^5y + \frac{90}{4.5.6} d^6y + \frac{301}{4.5.6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^4.y = d^4y + \frac{10}{5} d^5y + \frac{65}{5.6} d^6y + \frac{350}{5.6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^5.y = d^5y + \frac{15}{6} d^6y + \frac{140}{6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^6.y = d^6y + \frac{21}{7} d^7y + \&c.$$

quae sequuntur ex §. 56. si loco ω ponatur dx . Erunt ergo haec differentialia ipsius y completa, quippe in quibus ne ii quidem termini, qui respectu primi evanescent, negliguntur. Inveniuntur autem singuli isti termini, si functio $y = ax - xx$ ob $dy = adx - 2x dx$ & $ddy = -2dx^2$; erunt ipsius y differentialia completa: $dy = adx - 2x dx - dx^2$; $ddy = -2dx^2$; sequentia autem sunt nulla.

338. Quanquam autem generatim in his expressionibus differentialium sequentes termini prae primis pro nihilo reputantur; tamen in casibus specialibus, quibus ipse terminus primus evanescit, haec ratio cessat, neque terminus secundus amplius negligi poterit. Sic in exemplo praecedente etiamsi formulae $y = ax - xx$ differentiale in genere est $= (a - 2x)dx$ reiecto termino $-dx^2$, quippe qui est infinites minor quam pri-

X x x x

mus

mus $(a-2x)dx$; hic tamen ista conditio manifesto subintelligitur, nisi primus terminus per se evanescat. Quocirca si ipsius $y = ax - xx$ quaeratur differentiale, casu quo $x = \frac{1}{2}a$, tum id dicendum erit esse $= -dx^2$; scilicet si variabilis x differentiali dx crescat, tum functionis y casu $x = \frac{1}{2}a$ decrementum erit dx^2 . Hoc autem solo casu excepto perpetuo functionis y differentiale erit $=(a-2x)dx$; nisi enim sit $x = \frac{1}{2}a$, terminus secundus $-dx^2$ prae primo semper recte negligitur. Neque vero neglectio termini dx^2 etiam in casu $x = \frac{1}{2}a$ in errorem inducere potest: comparari enim differentialia prima inter se solent; unde quia $dy = -dx^2$ casu $x = \frac{1}{2}a$, prae differentialibus primis dx evanescit, perinde est siue hoc casu habeamus $dy = 0$ siue $dy = -dx^2$.

339. Denotante y functionem quamcunque ipsius x , sit differentialibus continuis sumtis:

$$dy = p dx; dp = q dx; dq = r dx; dr = s dx; \&c.$$

Hinc ergo differentialia completa, in quibus nihil negligatur, ipsius y erunt:

$$d.y = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 + \&c.$$

$$d^2.y = q dx^2 + r dx^3 + \frac{1}{2} s dx^4 + \frac{1}{6} t dx^5 + \&c.$$

$$d^3.y = r dx^3 + \frac{3}{2} s dx^4 + \frac{5}{6} t dx^5 + \&c.$$

$$d^4.y = s dx^4 + 2 t dx^5 + \&c.$$

$$d^5.y = t dx^5 + \&c.$$

Nisi ergo primi termini harum expressionum evanescant, in soli differentialia ipsius y exhibebunt; sin autem quopiam

piam casu primus terminus fiat $\equiv 0$, tum sequens differentiale quaesitum exprimet. Atque si etiam secundus terminus evanescat, tum tertius terminus valorem differentialis quaesiti praebebit, sin autem & hic evanescat, quartus & ita deinceps. Vnde intelligitur nullius functionis ipsius x differentiale primum vnquam penitus evanescere; etiamsi enim fiat $p \equiv 0$, quo casu vulgo dy evanescere censetur, tum hoc differentiale per altiore ipsius dx potestatem exprimetur. Vti vel per $\frac{1}{2}qdx^2$, vel si etiam sit $q \equiv 0$, per $\frac{1}{6}rdx^3$, & ita porro.

340. Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saepenumero eius veram expressionem nosse iuvat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat maximum vel minimum. Si enim fuerit:

$$d.y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \&c.$$

quo y nanciscatur maximum minimumue valorem, necesse est vt sit $p \equiv 0$; erit ergo hoc casu $dy \equiv \frac{1}{2}qdx^2$, & functio y , si loco x ponatur $x \pm dx$, abit in $y + \frac{1}{2}qdx^2$, eritque propterea minima, si q habeat valorem affirmativum, at maxima si q habeat valorem negativum. At si simul fiat $q \equiv 0$, erit $dy \equiv \frac{1}{6}rdx^3$, & functio y ponendo $x \pm dx$ loco x abibit in $y \pm \frac{1}{6}rdx^3$, neque hoc casu maximum neque minimum prodit; sin autem fiat & $r \equiv 0$, tum posito $x \pm dx$ loco x functio y euadet $\equiv y + \frac{1}{24}sdx^4$, quae maximum exhibet, si s fuerit quan-

titas negatiua, minimum vero, si s sit quantitas affirmatiua. Aliae occasiones, quibus differentialium completa expressio vsum habet, infra occurrent.

341. Ponamus p euanescere casu $x = a$, quod euenit si fuerit $p = (x-a)P$. Talis autem valor prodit, si fuerit $y = (x-a)^2 P + C$, denotante C quantitatem constantem quamcunque. Cum enim sit $p dx = (x-a)^2 dP + 2(x-a)P dx$, erit utique $p = 0$, posito $x = a$. Tum ergo ob $dp dx = q dx^2 = (x-a)^2 ddP + 4(x-a)dP dx + 2P dx^2$, posito $x = a$, fiet $q dx^2 = 2P dx^2$, atque differentiale completum hoc casu $x = a$, erit $d.y = P dx^2$, nisi forte & P euanescat posito $x = a$, quos casus postea contemplanus. Praesens autem casus generalius hoc modo exhiberi potest. Sit $z = (x-a)^2 P + C$, atque y sit functio quaecunque ipsius z , ita ut fiat $dy = Z dz$, denotante Z functionem quamcunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$. Erit ergo $dz = (x-a)^2 dP + 2(x-a)P dx$; & $p dx = Z(x-a)^2 dP + 2Z(x-a)P dx$, quod membrum fit $= 0$ si $x = a$; eodemque casu neglectis terminis, qui continent factorem $x-a$, erit $q dx^2 = 2PZ dx^2$, ideoque casu $x = a$, fiet $dy = PZ dx^2$; postquam in PZ vbique loco x positum fuerit a . Quare si fuerit y functio quaecunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$, ita ut sit $dy = Z dz$, erit casu $x = a$, differentiale $dy = PZ dx^2$. Fiet ergo haec functio y maxima casu $x = a$, si eodem casu fiat PZ quantitas negatiua, minima vero, si PZ fiat quantitas affirmatiua.

342. Si fuerit $p = (x-a)^2 P$, casu $x = a$ quoque q evanescit; talis autem expressio pro p oritur, si fuerit $y = (x-a)^3 P + C$. Erit ergo $p dx = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 P dx$; $q dx^2 = (x-a)^3 ddP + 6(x-a)^2 dP dx + 6(x-a) P dx^2$, quorum vtrumque membrum casu $x = a$ evanescit; at vero sequens erit $r dx^3 = (x-a)^3 d^3 P + 9(x-a)^2 ddP dx + 18(x-a) dP dx^2 + 6P dx^3 = 6P dx^3$, posito $x = a$. Quare cum & p & q casu $x = a$ evanescat, fiet $dy = \frac{r}{6} r dx^3 = P dx^3$. Simili modo si ponatur $z = (x-a)^3 P + C$, fueritque y functio quaecunque ipsius z , ita ut sit $dy = Z dx$, ob $dz = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 P dx$, fiet quoque $p = 0$ & $q = 0$, eritque $r dx^3 = 6P Z dx^3$; unde casu $x = a$, erit $dy = P Z dx^3$. Quare ista functio y , etiam si casu $x = a$, fiat $p = 0$, tamen neque maximum neque minimum valorem recipit.

343. Haec differentialia facilius inueniri possunt ex ipsa differentialium natura. Cum enim differentiale ipsius y oriatur, si y a statu sequenti proximo subtrahatur, qui prodit, si loco x ponatur $x + dx$; ponamus casu primo quo erat, $y = (x-a)^2 P + C$, $x + dx$ loco x , eritque $y^1 = (x-a+dx)^2 P^1 + C$, unde fiet $dy = (x-a+dx)^2 P^1 - (x-a)^2 P$. Casu igitur quo $x = a$, erit $dy = P^1 dx^2$, & cum P^1 ad P rationem aequalitatis habeat, erit $dy = P dx^2$. Simili modo si fuerit $z = (x-a)^2 P + C$, erit $dz = P dx^2$; quare si sit y functio quaecunque ipsius z , ita ut sit $dy = Z dz$, erit $dy = P Z dx^2$ casu, quo ponitur $x = a$. Deinde si sit $z = (x-a)^3 P + C$, erit $z^1 = (x-a+dx)^3 P^1 + C$, & propterea casu $x = a$, fiet $z^1 - z = dz = P dx^3$. Hinc

X x x x 3

fi

si fuerit y functio quaecunque ipsius z , atque $dy = Zdz$, erit quoque casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^3$, si quidem in functionibus P & Z loco x vbique substituitur a . Quoniam vero hoc casu fit $z = C$, atque Z est functio ipsius z , euadet Z quantitas constans, talis scilicet functio ipsius C , qualis ante erat ipsius z .

344. Si igitur generaliter fuerit $y = (x-a)^n P + C$, quia est $y^1 = (x-a+dx)^n P^1 + C$, casu $x = a$, fiet $dy = Pdx^n$; vnde si fuerit $n > 1$, hoc differentiale respectu aliorum differentialium primorum, quae ipsi dx sunt homogenea, euanesceat. Ex praecedentibus ergo manifestum est, functionem y fieri casu $x = a$, vel maximam vel minimam, si fuerit n numerus par: tum enim si posito $x = a$ fiat P quantitas affirmatiua, fiet y minimum, sin autem P sit quantitas negatiua, fiet y maximum. Hocque ergo modo ratio maximorum & minimorum multo facilius inuenitur, quam methodo supra exposita, quia non opus est ad differentialia altiora progredi. Quod si vero sit $z = (x-a)^n P + C$, atque y fuerit functio quaecunque ipsius z , vt sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$ differentiale $dy = PZdx^n$. Notandum autem est, hic n sumi pro numero affirmatiuo seu 0 maiore, si enim n esset numerus negatiuus, tum posito $x = 0$, non euanesceat $(x-a)^n$, vti assumimus, sed adeo fieret infinite magnum.

345. Iam vidimus hoc pacto differentiale multo expeditius inueniri, quam ope seriei, qua ante differentiale

tiale completum expressimus; si enim sit n numerus integer, tot seriei illius termini perlustrari deberent, quot n contineat unitates. Verum si n sit numerus fractus, tum series ista nequidem verum differentiale vnquam exhibebit. Ponamus enim esse $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, si seriem $dy = p dx + \frac{1}{2}q dx + \frac{3}{8}r dx^3 + \frac{1}{24}s dx^4 + \&c.$ spectemus, fiet $p = \frac{3}{2}\sqrt{x - a}$, $q = \frac{3}{4\sqrt{x - a}}$, $r = \frac{3}{8(x - a)\sqrt{x - a}}$, $s = \frac{9}{16(x - a)^2\sqrt{x - a}}$, &c. Quare si ponatur $x = a$ fiet quidem $p = 0$, at sequentes termini omnes $q, r, s, \&c.$ euadent infiniti; vnde valor differentialis dy hoc casu omnino definiri non potest. At vero methodus ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium relinquit. Cum enim sit $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, posito $x + dx$ loco x fiet $y = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, eritque, si $x = a$ ponatur, $dy = dx\sqrt{dx}$. Euanescent ergo hoc differentiale prae dx , at vero differentialia secunda cum dx^2 homogenea prae eo euanescent.

346. Euoluamus hos casus, quibus exponens n est numerus fractus aliquanto accuratius, fitque $y = PV(x - a) + C$, ob $y = P^1V(x - a + dx) + C$, fiet $dy = PV dx$ casu $x = a$; vnde hoc differentiale ad dx , & ad differentialia cum dx homogenea rationem tenebit infinitam. Hinc etiam patet, quid hoc casu de ratione maximi ac minimi sit tenendum. Cum enim posito $x + dx$ loco x , abeat y in $PV(x - a) + C + PV dx$, ob $V dx$

an-

ambiguum, functio y geminum induet valorem, alterum maiorem quam C , quem recipit posito $x = a$, alterum minorem; unde casu $x = a$ neque maximum neque minimum fiet. Praeterea si dx capiatur negatiue tum valor ipsius y adeo fiet imaginarius. Idem tenendum est si sit $z = PV(x-a) + C$, & y functio quaecunque ipsius z , vt fit $dy = Zdz$, tum enim erit $dy = PZVdx$ casu $x = a$.

347. Si proposita fuerit ista functio $y = (x-a)^{\frac{m}{n}}P + C$, cuius differentiale quaeritur casu $x = a$, erit vti ex antecedentibus colligitur $dy = Pdx^{\frac{m}{n}}$. Quocirca si fuerit $m > n$ hoc differentiale prae dx euanescat, sin autem sit $m < n$, ratio $\frac{dy}{dx}$ erit infinite magna. Praeterea vero si n fit numerus par, differentiale dy geminum habebit valorem, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum; sicque functio y , quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$ binos habebit valores alterum maiorem quam C alterum vero minorem; sin autem poneretur $x = a - dx$, tum y adeo fieret imaginarium; unde hoc casu y neque maximum fit neque minimum. Ponamus nunc denominatorem n esse numerum imparem, erit numerator m vel par vel impar. Sit primo m numerus par; quia dy eundem valorem retinet, siue dx sumatur affirmatiue siue negatiue, perspicuum est, functionem y casu $x = a$ fieri siue maximam siue minimam, prout hoc casu fuerit P vel quantitas negatiua vel affirmati-

matia. Sin autem vterque numerus m & n fuerit impar, differentiale dy in sui negatiuum abibit; posito dx negatiuo; hocque ergo casu functio y neque maximum erit neque minimum, si ponatur $x = a$.

348. Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis, quorum singuli sint diuisibiles per $x - a$, constet, ita vt fit $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$, tum eius differentiale casu $x = a$ erit $dy = P dx^m + Q dx^n$; in qua expressione, si fuerit $n > m$, terminus secundus praeprimo euanescit, ita vt tantum prodeat $dy = P dx^m$. Sin autem n sit fractio denominatorem habens parem, tum etiam si $Q dx^n$ prae $P dx^m$ euanescat, tamen omnino negligi non potest. Ex eo enim apparet, si capiatur dx negatiue, valorem ipsius dy fieri imaginarium, quod ex solo termino primo $P dx^m$ non patet. Cum ergo si n sit fractio denominatorem habens parem, dx negatiue accipi nequeat, sin autem affirmatiue capiatur, terminus $Q dx^n$ geminum praebeat valorem: functio $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$ quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$, erit $y = C + P dx^m + Q dx^n$, quorum valorum vterque cum vel maior sit vel minor quam C , prout P fuerit quantitas vel affirmatiua vel negatiua, erit functio y casu $x = a$ vel minimum vel maximum secundae speciei.

349. His igitur casibus differentialia functionum vera non per regulas differentiationis consuetas inueniri possunt; quippe quae tantum valent, quamdiu differen-

Y y y y

tiale

tiale functionis est homogeneous cum dx . Sin autem casu quopiam singulari differentiale functionis exprimitur per eius potestatem dx^n , tum regula praebeet pro hoc differentiali 0, si n fuerit numerus unitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, si n sit exponentis unitate minor. Sic si ipsius $y = V(a-x)$ differentiale quaeratur casu $x=a$, quia est $dy = -\frac{dx}{V(a-x)}$, facto $x=a$ prodit $dy = -\frac{dx}{0}$. Atque si differentia-
lia sequentia in subsidium vocare velimus, omnia pariter ob denominatores $= 0$ in infinitum excrescunt, ita ut inde nihil concludi possit. At vero hoc casu vidimus esse $dy = V-dx$, atque adeo imaginarium. Sin autem loco x ponatur $x-dx$, erit $dy = Vdx$, atque adeo erit infinities maius quam dx , ita ut dx prae dy evanescat. Quare regula consueta etiam hoc casu in errorem non inducit, cum valorem ipsius dy infinitum exhibeat.

350. A regula ergo consueta differentiationis recedendum est, quoties in serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{3}rdx^3 + \&c.$ qua differentiale completum functionis y exprimitur, primus terminus p vel fit $= 0$ vel in infinitum excrescit, eoque casu differentiale ex primis principiis deriuari debet. Quoties ergo functionis y differentiale quaeritur dato ipsius x valori respondens, quo littera p vel infinite parua euadit vel infinite magna, toties recurrendum est ad ipsa prima differentiationis principia. Omnibus
vero

vero reliquis casibus, quibus fit neque $p=0$ neque $p=\infty$, consueta regula veros differentialis valores praebebit. Interim tamen casus ante (348) memoratus non est negligendus; si functio y contineat huiusmodi membrum $(x-a)^n Q$ existente n fractione denominatorem parem habente; etiamsi enim adsint differentialia inferiora quam Qdx^n , prae quibus hoc evanescat; tamen quoniam Qdx^n si sit dx negativum, fit imaginarium, hoc membrum Qdx^n reliqua omnia, prae quibus evanescit, quoque transmutat in imaginaria; cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda. Huiusmodi ergo casus particulares, quibus verum differentiale communi regula non indicatur, in adiunctis exemplis explicabo.

EXEMPLUM I.

Quaeratur differentiale functionis

$$y = a + x - \sqrt{xx + ax - x\sqrt{2ax - xx}}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Differentiali istius functionis casu $x = a$ per regulam receptam non reperiri, ex differentiatione patet, fit enim:

$$dy = dx - \frac{x dx - \frac{1}{2} a dx + \frac{1}{2} dx \sqrt{2ax - xx} + (ax dx - xx dx) : \sqrt{2ax - xx}}{\sqrt{xx + ax - x\sqrt{2ax - xx}}}$$

posito enim $x = a$ erit $dy = dx - \frac{a dx}{a} = 0$. Ordia-

mur ergo a principiis differentiationis, ac primo quidem posito $x + dx$ loco x fiet:

$$y = a + x + dx - \sqrt{xx + 2x dx + dx^2 + ax + a dx - (x + dx)\sqrt{2ax - xx + 2a dx - 2x dx - dx^2}}$$

Y y y 2

Posito

Posito autem $x = a$ erit :

$$y' = 2a + dx - V[2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)V(aa - dx^2)]$$

Jam cum sit $V(aa - dx^2) = a - \frac{dx^2}{2a}$, sequentes enim termini tuto negligi poterunt, quia non omnes, qui sunt infinites maiores, destruentur, ut mox patebit: erit $y' = 2a + dx - V(aa + 2adx + \frac{3}{2}dx^2)$, porroque radicem extrahendo fiet $y' = 2a + dx - \left(a + dx + \frac{dx^2}{4a}\right) = a - \frac{dx^2}{4a}$. At casu $x = a$, erit $y = a$; vnde cum sit $y' = y + dy$ obtinebitur $dy = -\frac{dx^2}{4a}$: ex quo simul perspicitur functionem propositam y fieri maximum, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis :

$$y = 2ax - xx + aV(aa - xx)$$

casu, quo ponitur $x = a$.

Facta differentiatione more consueto fit $dy = 2adx - 2x dx - \frac{ax dx}{V(aa - xx)}$, quod posito $x = a$ in infinitum abit, neque ergo hoc modo indicatur. Differentialia vero sequentium ordinum pariter omnia fient infinita, ita ut ex iis nequidem ex serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{3}rdx^3 + \&c.$ verus valor differentialis inueniri queat. Ponamus ergo $x + dx$ loco x , atque habebimus

$$y' = 2ax - xx + 2adx - 2x dx - dx^2 + aV(aa - xx - 2x dx - dx^2)$$

&c

& posito $x = a$ erit:

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{-2adx - dx^2}$$

At eodem casu fit $y = aa$; unde erit $dy = -dx^2 + a\sqrt{-2adx}$, & cum dx^2 prae $\sqrt{-2adx}$ evanescat, erit $dy = a\sqrt{-2adx}$. Quare si differentiale dx affirmatiue capiatur, erit dy imaginarium; sin autem pro x scribatur $x - dx$, erit $dy = a\sqrt{2adx}$, cuius cum duplex sit valor alter affirmatiuus, alter negatiuus, functio y casu $x = a$ neque maxima fiet neque minima.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a - x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Quoniam haec functio in istam formam transformatur $y = a^3 - (a - x)^3 + (a - x)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, posito $x = a + dx$ fit $y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, eodemque casu est $y = a^3$. Erit ergo $dy = dx^3 - dx^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, & cum dx^3 evanescat prae $dx^{\frac{2}{3}}$, erit $dy = -dx^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{3aa}$. casu ergo $x = a$ functio y neque maximum fit neque minimum.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x}$$

casu $x = 0$.

Quoniam casus $x = 0$ proponitur, eoque sit $y = 0$, loco x
 $\begin{matrix} Y & y & y & y & 3 & \end{matrix}$ tantum

tantum dx scribatur, & habebitur $dy = dx^{\frac{3}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$,
 seu $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$; unde primum patet dx
 negative accipi non posse. Tum vero etiam si alias \sqrt{dx}
 geminum valorem prae se ferat, alterum affirmatiuum al-
 terum negatiuum, tamen hoc casu, quia eius radix $\sqrt[4]{dx}$
 occurrit, non nisi affirmatiue accipi potest. At vero $\sqrt[4]{dx}$
 vtrumque significatum recipit, eritque $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$
 & $y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, ob $y = 0$. Cum igitur
 uterque ipsius y' valor maior sit, quam ipsius y , se-
 quitur casu $x = 0$ fieri y minimum. Quod autem func-
 tio $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ non complectatur hanc $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$,
 vtramque ad rationalitatem perducendo patebit. Prior
 enim fusa in hanc formam $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, & quadrata
 dat, $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ seu $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$,
 quae denuo quadrata praebet $y^4 - 2y^2x - 4xxy + xx - x^3 = 0$.
 Altera vero $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ dabit $y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$
 & porro $y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$
 quae ab illa est diversa. At vero alterum membrum
 $\sqrt[4]{x^3}$ ambiguitatem signi retinet. Quamobrem ista cir-
 cumstantia probe est notanda, quod etiam si communi-
 ter radices potestatum parium vtrumque signum $+$ & $-$
 includant, tamen haec ambiguitas cesset, si in eadem
 expressione earundem radicum vltiores radices potesta-
 tum

tum parium occurrant; quippe quae fierent imaginariae, si radices priores negative acciperentur. Atque ex hoc fonte maxima & minima secundae speciei sequuntur, quando talia non locum habere videantur.

EXEMPLUM V.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = a + \sqrt{x-f} + (x-f)^{\frac{4}{3}} \sqrt{x-f} + (x-f)^2 \sqrt[8]{x-f}$$

casu quo ponitur $x=f$.

Ponamus $x-f=t$, & cum sit $y=a+\sqrt{t}+t^{\frac{4}{3}}\sqrt{t}+t^2\sqrt[8]{t}$ huius differentiale quaeritur casu $t=0$, quo fit $y=a$. Posito ergo $t+dt$ seu $0+dt$ loco t fiet $y'=y+dy=a+\sqrt{dt}+dt^{\frac{4}{3}}\sqrt{dt}+dt^2\sqrt[8]{dt}$, ideoque habebitur $dy=\sqrt{dt}+dt^{\frac{4}{3}}\sqrt{dt}+dt^2\sqrt[8]{dt}$. Vbi primo patet differentiale dt negative accipi non posse, quin dy fiat imaginarium. Tum verum non solum \sqrt{dt} , sed nequidem $\sqrt[8]{dt}$ negative accipi potest; fieret enim $\sqrt[8]{dt}$ imaginarium: vnde differentiale dy geminum tantum habet valorem, $dy=\sqrt{dt}+dt^{\frac{4}{3}}\sqrt{dt}+dt^2\sqrt[8]{dt}$, quorum cum vterque maior sit nihilo, sequitur functionem y fieri minimum secundae speciei posito $t=0$ seu $x=f$. Quanquam ergo his casibus termini $dt^{\frac{4}{3}}\sqrt{dt}$ & $dt^2\sqrt[8]{dt}$ prae primo \sqrt{dt} euanescant; tamen eorum ratio est habenda, si multiplicitas valorum spectetur, ut imaginaria euitentur.

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = ax + bxx + (x-f)^n + (x-f)^{m+\frac{1}{2}n}$$

casu $x = f$.

Si ponatur $x = f$ fiet $y = af + bff$, & si loco x ponatur $x + dx$ seu $f + dx$, prodibit valor proximus $y' = af + bff + adx + 2bfx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$, ita vt sit $dy = adx + 2bfx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n} \sqrt{dx^n}$. Nisi ergo sit n numerus par, differentiale dx negatiue sumi nequit. Vltimus autem terminus $dx^m \sqrt{dx^n}$ signum habet ambiguum; vnde valor ipsius y' erit duplex vterque maior quam ipsius y , si quidem $a + 2bf$ fuerit quantitas affirmatiua, atque exponentes n & $m + \frac{1}{2}n$ vnitatem fuerint maiores. Fiet ergo valor functionis y casu $x = f$ minimus: hocque euenit siue n sit numerus integer siue fractus, dummodo numerator hoc casu, & ipse numerus illo casu non fuerit par.

351. Imprimis autem haec methodus differentialia ex ipsis principiis deducendi vsum habet in functionibus transcendentibus, cum quibusdam casibus differentiale more consueto inuentum vel euanescit, vel in infinitum ex crescere videtur. Occurrunt autem hic eiusmodi infinitorum & infinite paruorum species, quae in algebraicis nunquam inueniuntur. Cum enim si i denotet numerum infinitum, li sit quoque infinitus quidem, sed tamen ad ipsum numerum i , eiusque adeo potestatem quamcunque i^n , quantumvis exiguus statuatur exponens n ,
ratio-

rationem tenens infinite parvam, erit fractio $\frac{lz}{z^n}$ infinite parva, neque ante finita esse poterit, quam exponens n fiat infinite parvus. Erit ergo lz homogeneous cum z^n , si exponens n fuerit infinite parvus. Ponamus nunc $z = \frac{1}{\omega}$, existente ω quantitate infinite parva, erit $l\omega$ homogeneous cum $\frac{1}{\omega^n}$, si exponens n sit infinite parvus, ideoque $-\frac{1}{l\omega}$ homogeneous erit cum ω^n ; hincque $-\frac{1}{l dx}$, erit infinite paruum comparandum cum dx^n , existente n fractione infinite parva. Ita si fuerit $y = -\frac{1}{lx}$ differentiale ipsius y casu $x = 0$, erit $-\frac{1}{l dx} = dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcunque ipsius dx potestatem tenebit rationem infinitam: atque prae $-\frac{1}{l dx}$ evanescunt omnes omnino potestates ipsius dx , quantumvis exigui fuerint earum exponentes.

352. Deinde quoque vidimus, si a fuerit numerus unitate maior, & z infinitus, tum a^z fore infinitum tam excelsi gradus, ut prae eo non solum z , sed etiam quacuis ipsius z potestas evanescat; neque z^n ante homogeneous cum a^z euadet, quam exponens n in infinitum fuerit auctus. Sit nunc $z = \frac{1}{\omega}$, ita ut ω infinite par-

Z z z z

vum

vum denotet, erit $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, existente
 n numero infinite magno: ideoque $a^{\frac{-1}{\omega}}$ seu $\frac{1}{a^{\frac{1}{\omega}}}$, erit
 infinite paruum comparandum cum ω^n . Hinc $\frac{1}{a^{\frac{1}{\omega}} dx}$,
 erit infinite paruum, quod autem prae omnibus ipsius
 dx potestatibus evanescit; cum homogeneum sit cum
 potestate dx^n existente n numero infinite magno. Qua-
 re si quaeratur differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{\frac{1}{\omega} x}}$ casu $x=0$;
 quoniam fit $y=0$, erit $dy = \frac{1}{a^{\frac{1}{\omega} dx}}$, ideoque infinites
 minus est quam potestas quantumvis alta ipsius dx .

353. Sin autem a fit numerus vnitate minor, tum
 quia $\frac{1}{a}$ fit vnitate maior, quaestio ad casum praece-
 dentem reducitur. Scilicet si habeatur expressio $a^{\frac{1}{\omega}}$, ea
 ponendo $a = 1:b$ transmutabitur in $b^{\frac{1}{\omega}}$, seu $\frac{1}{b^{\frac{1}{\omega}}}$,
 quae homogenea erit ob $b > 1$ cum ω^n , existente n nu-
 mero infinite magno. His igitur praemissis sequentia
 exempla resolvere poterimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale functionis: $y = xx - \frac{1}{1x}$,

casu $x = 0$.

Quoniam posito $x = 0$ fit $y = 0$, si ponamus $x + dx$,
seu $0 + dx$ loco x , fiet: $y' = dy = dx^2 - \frac{1}{1dx}$.

Cum autem $-\frac{1}{1dx}$ homogeneous fit cum dx^n , deno-
tante n numerum infinite paruum, prae eo dx^2 euanes-
cet, eritque $dy = -\frac{1}{1dx} = dx^n$. At vero quia
logarithmi numerorum negatiuorum sunt imaginarii,
 dx negatiue accipi non poterit; eritque adeo casu
 $x = 0$ functio y minimum, sed neque ad primam
neque ad secundam speciem pertinens. Ad primam sci-
licet speciem non pertinet, quia y nullos habet valores
antecedentes proximos, sed tantum minus est valoribus
sequentibus, si x nihilo maius statuatur. Ad secundam
autem speciem ideo non pertinet, quia valores sequen-
tes, quibuscum comparatur, non sunt gemini: sic ita-
que prodit tertia species maximorum minimorumue,
quae in functionibus logarithmicis & transcendentibus
tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam oc-
currit; de qua in sequente parte de lineis curuis fu-
sus agetur.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale functionis: $y = (a-x)^n - x^n (la-lx)^n$
casu quo $x = a$.

Differentiale hoc si n fit numerus integer, ex formula generali $dy = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \&c.$ inueniri potest, erit enim:

$$p dx = -n(a-x)^{n-1} dx - nx^{n-1} dx (la-lx)^n + nx^{n-1} (la-lx)^{n-1} dx$$

qui valor posito $x = a$ vtique euanescit: nam etiam si fit $n = 1$, erit $p dx = -dx + dx = 0$. Si igitur ulterius progrediamur, erit: $\frac{1}{2} q dx^2 =$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-x)^{n-2} dx^2 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^n + \frac{n^2}{2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-2}$$

Hinc ergo si fuerit $n = 1$, erit $\frac{1}{2} q dx^2 = \frac{dx^2}{2a}$ posito $x = a$

Simili modo si fit $n = 2$, ad terminum tertium $\frac{1}{6} r dx^3$ esset pergendum, & ita porro. Facilius ergo utemur ipsis differentiationis principiis, & cum posito $x = a$ fiat $y = 0$, si ponamus $x + dx$ seu $a + dx$ loco x , erit $y' = (-dx)^n - (a+dx)^n [la-l(a+dx)]^n = y + dy = dy$ ob $y = 0$.

Est vero $l(a+dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \&c.$

vnde fit

$$dy = (-dx)^n - \left(a^n + na^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} dx^2 \right) \left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3} \right)^n = \frac{n}{2a} (-dx)^{n+1}$$

Casu

Casu igitur $x = a$ erit formulae propositae differentiale quaesitum dy , vt. sequitur:

fi $n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$	vt. ante inuenimus
fi $n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$	
fi $n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$	
fi $n = 4$	$dy = -\frac{4dx^5}{2a}$	
&c.	&c.	

Si ergo n fuerit numerus impar, functio y casu $x = a$ fit minimum, sin autem n fit numerus par, neque maximum neque minimum: quod idem valet, si n fuerit fractio denominatorem habens imparem. Sin autem n fuerit fractio denominatorem habens parem, tum dx negatiue accipi debet, ne in imaginaria incidamus; & ob ambiguitatem significationis functio quoque neque maxima neque minima euadet.

EXEMPLUM III.

*Inuenire differentiale functionis: $y = x^x$ casu $x = \frac{1}{e}$
denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$.*

Quia fit in genere $dy = x^x dx (lx + 1)$, hoc differentiale casu $x = \frac{1}{e}$ seu $lx = -1$ euanescit. Compa-

Z z z z 3

retur

retur ergo hoc differentiale cum forma generali $p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \&c.$ erit $p = x^x (lx + 1)$. & $q = x^x (lx + 1)^2 + x^{x-1}$,

& posito $lx = -1$ seu $x = \frac{1}{e}$, erit $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$.

Quare differentiale quaesitum erit $dy = \frac{1}{2} e^{(e-1)} dx^2$, euaditque ergo functio $y = x^x$ minimum casu $x = \frac{1}{e}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentiale functionis huius: $y = x^n + e^{-1/x}$ casu quo $x = 0$.

Quia facto $x = 0$ fit $y = 0$, si ponatur $x = 0 + dx$, erit $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1/dx}}$. Vidimus autem $\frac{1}{e^{1/dx}}$

homogeneum esse cum potestate ipsius dx infinita, seu cum dx^∞ , ideoque prae dx^n euanescet; ita ut fit $dy = dx^n$.

354. Quod in differentialibus primis certis casibus vsu venit, ut consueta differentiationis regula non prodeant, idem quoque in differentialibus secundi ac tertii superiorumque ordinum euenit, iis casibus, quibus in forma differentiali completa:

$$d.y = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 + \&c.$$

quantitatum $q, r, s, \&c.$ nonnullae vel euanescent, vel in infinitum abeunt. Scilicet cum sit:

$$d.d.y = q dx^2 + r dx^3 + \frac{1}{12} s dx^4 + \&c.$$

si

si quo casu fiat $q = 0$, tum erit $ddy = r dx^3$; si autem eodem casu & r euanescat, tum erit $ddy = \frac{1}{12} s dx^4$, & ita porro. Sin autem vel q vel r vel s &c. fiat infinitum, tum ex ista serie differentiale secundum prorsus inueniri nequit, sed confugiendum erit ad principia differentialium: scilicet ponendo $x + dx$ loco x quaeratur valor y' , & ponendo $x + 2dx$ loco x valor ipsius y'' , quo facto erit verus valor differentialis secundi $ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y$. Simili modo si de differentiali tertio quaestio proponatur, tum praeterea in y loco x scribatur $x + 3dx$, inuentoque valore y''' erit $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$, ficque deinceps. Quos casus sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale secundum functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$

casu quo ponitur $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Quaerendo differentiale completum ipsius y , ex forma $dy = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 + \&c.$ prodibunt pro p , q , r , s , &c. sequentes valores:

$$p = -\frac{4aax}{(aa+xx)^2}; \quad q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa+xx)^3}; \quad \text{atque}$$

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}.$$

Cum nunc sit $ddy = q dx^2 + r dx^3 + \frac{1}{12} s dx^4 + \&c.$

ob

ob $q = 0$ casu $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eodemque casu fit $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$,
fiet differentiale secundum quaesitum $ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale tertium functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$
casu $x = a$.

Quaerendo ut ante differentiale completum

$$dy = \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 + \&c.$$

quia est differentiale tertium $d^3y = r dx^3 + \frac{3}{2} s dx^4$, ob

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}, \text{ fiet } r = 0 \text{ casu } x = a; \text{ quare}$$

ad valorem s est progrediendum, qui erit:

$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa + xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa + xx)^5}$$

$$\text{facto ergo } x = a, \text{ erit } s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}; \text{ vnde}$$

$$\text{hoc casu erit } d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}.$$

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiaalia cuiusque gradus functionis

$$y = ax^m + bx^n \text{ casu } x = 0.$$

Ponendo successiue $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; &c.
loco x valores sequentes functionis y erunt:

$$y' = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$

$$y'' = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$

$$y''' = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n \text{ \&c.}$$

Posito

Posito ergo $x=0$, erit $y=0$, eiusque differentialia erunt:

$$dy = a dx^m + b dx^n$$

$$ddy = (2^m - 2) a dx^{m-2} + (2^n - 2) b dx^{n-2}$$

$$d^3y = (3^m - 3 \cdot 2^m + 3) a dx^{m-3} + (3^n - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^m + 3) b dx^{n-3}$$

$$d^4y = (4^m - 4 \cdot 3^m + 6 \cdot 2^m - 4) a dx^{m-4} + (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) b dx^{n-4}$$

&c.

Si igitur exponens n fuerit maior quam m , termini secundi in his expressionibus euanescunt prae primis. Interim tamen eorum ratio erit habenda, si n fuerit numerus fractus; ut casus, quibus haec differentialia vel fiunt imaginaria, vel ambigua, diiudicari queant. Ulteriore vero horum casuum evolutionem in doctrinam de lineis curvis referuari conuenit.



CAPUT XV.
DE VALORIBUS FUNCTIONUM,
QUI CERTIS CASIBUS VIDENTUR
INDETERMINATI.

355.

Si functio ipsius x quaecunque y fuerit fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator posito loco x certo quodam valore simul evanescent; tum isto casu fractio $\frac{P}{Q}$ valorem functionis y exprimens euadet $= \frac{0}{0}$, quae expressio cum cuique quantitati siue finitae siue infinitae siue infinite parvae possit esse aequalis, ex ea prorsus valor ipsius y hoc casu colligi nequit, atque ideo videtur indeterminatus. Interim tamen facile perspicitur, quia praeter hunc casum functio y perpetuo valorem determinatum recipit, quicquid pro x substituatur, etiam hoc casu valorem ipsius y indeterminatum esse non posse. Manifestum hoc fiet vel ex hoc exemplo, si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, quo facto $x = a$ fit utique $y = \frac{0}{0}$. Cum autem numeratore per denominatorem diuiso fiat $y = a + x$, evidens est si ponatur $x = a$ fore $y = 2a$, ita ut hoc casu fractio illa $\frac{0}{0}$ aequiualeat quantitati $2a$.

356. Quoniam ergo supra ostendimus, inter cyphras rationem quamcunque intercedere posse, in huiusmodi exem-

exemplis ratio determinata, quam numerator ad denominatorem teneat, inuestigari debet. Cum autem in cyphris absolutis ista diuersitas perspicere nequeat, earum loco quantitas infinite paruae introduci debent, quae etsi ratione significationis a cyphra non differunt, tamen ex diuersis earum functionibus, quae numeratorem & denominatorem constituunt, valor fractionis sponte elucet. Sic si habeatur ista fractio $\frac{a dx}{b dx}$, etiamsi reuera numerator & denominator sit $= 0$, tamen patet valorem huius fractionis esse determinatum nempe $= \frac{a}{b}$. Sin autem habeatur haec fractio $\frac{a dx^2}{b dx}$, huius valor erit nullus, quemadmodum huius valor $\frac{a dx}{b dx^2}$ est infinite magnus. Si igitur loco nihilorum, quae saepenumero in calculum ingrediuntur, infinite parua introducamus, hunc inde fructum percipiemus, ut rationem, quam illa nihila inter se tenent, mox cognoscamus, nullumque amplius dubium circa significationem huiusmodi expressionum supersit.

357. Quo haec planiora reddantur, ponamus fractionis $y = \frac{P}{Q}$ tam numeratorem quam denominatorem evanescere, si statuatur $x = a$. Ad haec autem nihila, quae inter se comparari non possunt, euitanda, ponamus $x = a + dx$, quae positio reuera in priorem $x = a$ recidit ob $dx = 0$. Cum vero, si loco x ponatur $x + dx$, functiones P & Q abeant in $P + dP$ & $Q + dQ$; po-

Aaa a a 2

fitio-

fictioni $x = a + dx$ satisfiet, si in his valoribus vbique statuatur $x = a$, quo quidem casu P & Q evanescere assumuntur. Hinc si loco x ponatur $a + dx$, fractio $\frac{P}{Q}$ transmutabitur in hanc $\frac{dP}{dQ}$, quae propterea valorem functionis $y = \frac{P}{Q}$ exprimit casu $x = a$. Haecque expressio indeterminata amplius esse non poterit, siquidem functionum P & Q differentialia vera sumantur, uti in capite praecedente docuimus. Hoc enim pacto differentialia dP & dQ nunquam in nihilum absolutum abeunt, sed nisi per differentiale dx ipsum exprimantur, saltem per eius potestates exhibebuntur. Quodsi igitur reperiatur $dP = Rdx^m$ & $dQ = Sdx^n$, erit functionis $y = \frac{P}{Q}$ casu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui propterea erit finitus & $= \frac{R}{S}$, si fuerit $m = n$; sin autem sit $m > n$, tum valor fractionis propositae reuera erit $= 0$: at si sit $m < n$, iste valor in infinitum excrescit.

358. Quoties ergo huiusmodi fractio occurrit $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator certo casu puta $x = a$ simul evanescant, valor istius fractionis hoc casu $x = a$ per sequentem regulam inuenietur:

Quaerantur quantitates P & Q differentialia casu $x = a$, eaque loco ipsarum P & Q substituantur, quo facto frac-

fractio $\frac{dP}{dQ}$ exhibebit valorem fractionis $\frac{P}{Q}$ quaesitum.

Si differentialia dP & dQ methodo consueta inuenta neque infinita fiant neque evanescant casu $x = a$, tum ea retineri poterunt; sin autem ambo vel $= 0$ fiant vel $= \infty$, tum modo in praecedente Capite exposito haec differentialia completa casu $x = a$ inuestigari debent. Plerumque etiam calculus mirifice contrahitur, si antea ponatur $x - a = t$ seu $x = a + t$, quo prodeat fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator evanescunt casu $t = 0$; tum enim differentialia dP & dQ habebuntur, si ubique dt loco t substituatur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor fractionis huius $\frac{b - \sqrt{bb - tt}}{tt}$
casu $t = 0$.

Quoniam hoc casu $t = 0$ & numerator & denominator evanescit, loco t tantum scribatur dt , atque valor quaesitus exprimetur hac fractione $\frac{b - \sqrt{bb - dt^2}}{dt^2}$.

Cum vero fit $\sqrt{bb - dt^2} = b - \frac{dt^2}{2b}$, ista fractio

abit in hanc $\frac{\frac{dt^2}{2b}}{dt^2} = \frac{1}{2b}$. Hinc fractio proposita

$\frac{b - \sqrt{bb - tt}}{tt}$ casu $t = 0$ recipit hunc valorem $\frac{1}{2b}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor huius fractionis :

$$\frac{V(aa + ax + xx) - V(aa - ax + xx)}{V(a + x) - V(a - x)}$$

casu $x = 0$.

Hic iterum statim dx loco x substitui potest; quo facto cum sit:

$$V(aa + adx + dx^2) = a + \frac{1}{2} dx + \frac{3 dx^2}{8a}$$

$$V(aa - adx + dx^2) = a - \frac{1}{2} dx + \frac{3 dx^2}{8a}$$

atque $V(a + dx) = Va + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$

$$V(a - dx) = Va - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

fiet numerator $= dx$ & denominator $= \frac{dx}{\sqrt{a}}$, ex quo fractionis propositae valor quaesitus erit $= \sqrt{a}$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor huius fractionis :

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2V(2ax - aa)}{xx - 2ax - aa + 2aV(2ax - xx)}$$

casu $x = a$.

Si more consueto differentia sumantur & in loca numeratoris ac denominatoris substituantur, habebitur:

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : V(2ax - aa)}{2x - 2a + 2a(a - x) : V(2ax - xx)}, \text{ cuius fractio-}$$

nis

nis numerator ac denominator denuo euenescunt, si ponatur $x = a$. Quare ob eandem rationem eorum loco denuo ipsorum differentialia substituantur, prodibitque:

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}; \text{ cuius numerator ac}$$

denominator iterum casu $x = a$ euanescunt. Pergamus ergo eorum loco ipsorum differentialia substituere:

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

Verum & hic posito $x = a$ denuo tam numerator quam denominator euanescunt. Porro igitur differentialibus ipsorum loco substitutis, orietur:

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

Nunc denique loco x ponatur, a prodibitque haec fractio determinata $\frac{5:a}{-1:a^2} = -5a$, qui est valor quae situs fractionis propositae:

Quodsi autem antequam haec inuestigatio suscipiatur, ponatur $x = a + t$, fractio proposita transmutabitur in hanc:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2V(aa + 2at)}{-2aa + tt + 2aV(aa - tt)}$$

quae cum recipiat formam $\frac{0}{0}$, si ponatur $t = 0$, ponatur dt loco t , & erit:

$$2a^3 +$$

$$\frac{2a^3 + 2a^2 dt - a dt^2 + dt^3 - 2a^2 \sqrt{aa + 2adt}}{-2aa + dt^2 + 2a \sqrt{aa - dt^2}}$$

Conuertantur iam formulae irrationales in series, quae eousque continuentur, quoad termini a membro rationali non amplius destruantur:

$$\sqrt{aa + 2adt} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$\sqrt{aa - dt^2} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$$

quibus valoribus substitutis prodibit fractio haec:

$$\frac{5dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a,$$

qui est valor fractionis propositae iam ante inuentus.

EXEMPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{a + \sqrt{2aa - 2ax} - \sqrt{2ax - xx}}{a - x + \sqrt{aa - xx}}$$

casu $x = a$.

Substitutis in loca numeratoris & denominatoris eorum differentialibus prodibit haec fractio, quae casu $x = a$ ipsi propositae erit aequalis:

$$\frac{a : V(aa - 2ax) - (a - x) : V(2ax - xx)}{-1 - x : V(aa - xx)}$$

cuius numerator ac denominator casu $x = a$ fiunt infiniti. Verum si vterque per $-V(a - x)$ multiplicetur, habebitur

$a :$

$$\frac{a: V2a + (a - x)^{\frac{3}{2}}: V(2ax - xx)}{V(a - x) + x: V(a + x)}$$

quae posito $x = a$ dabit hunc valorem determinatum,

$\frac{a: V2a}{a: V2a} = 1$, qui propterea aequalis est fractioni propositae casu $x = a$.

359. Si igitur habeatur fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator casu $x = a$ evanescat, eius valor per consuetas differentiandi regulas assignari poterit, neque opus erit ad differentialia, quae capite praecedente tractauimus, recurrere. Sumtis enim differentialibus fractio proposita $\frac{P}{Q}$ casu $x = a$ aequalis erit fractioni $\frac{dP}{dQ}$; cuius si numerator & denominator posito $x = a$ induant valores finitos, cognoscerur valor fractionis propositae; sin autem alter fiat $= 0$, manente altero finito, tum fractio erit vel $= 0$ vel $= \infty$, prout vel numerator evanescat vel denominator. At si alteruter vel vterque fiat $= \infty$, quod euenit, si diuidantur per quantitates casu $x = a$ evanescentes, tum multiplicando vtrumque per hos diuifores, istud incommodum tolletur, vti in exemplo postremo euenit. Quodsi vero tam numerator quam denominator casu $x = a$ denuo evanescat, tum iterum, vti initio factum est, differentialia erunt capienda, ita vt haec fractio $\frac{d d P}{d d Q}$ prodeat, quae casu $x = a$ propositae adhuc erit aequalis; & si idem rursus in hac fractione

B b b b b

vfu

vsu veniat, vt fiat $\frac{0}{0}$, tum in eius locum surrogetur haec $\frac{d^3 P}{d^3 Q}$, atque ita porro, donec ad fractionem perveniatur, quae valorem determinatum exhibeat, siue finitum siue infinite magnum siue infinite paruum. Sic in exemplo tertio oportebat ad fractionem $\frac{d^4 P}{d^4 Q}$ progredi, antequam valorem fractionis propositae $\frac{P}{Q}$ assignari licuerit.

360. Vfus huius inuestigationis elucet in definiendis summis serierum, quas supra capite II. §. 22. erui-
mus, si ponatur $x=1$. Ex iis enim, quae ibi tradita sunt, sequitur fore;

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \dots + (2n-1)x^{2n-1} = \frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2 x^n = \frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

&c.

Quod si nunc harum serierum summae desiderentur ca-
li

su quo $x = 1$, in expressionibus istis tam numerator quam denominator evanescunt. Valores ergo harum summarum casu $x = 1$ methodo hic exposita definiri poterunt. Quoniam vero eadem summae aliunde constant, ex consensu veritas huius methodi magis elucebit.

EXEMPLUM I.

Definire valorem huius fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ casu $x = 1$, qui exhibebit summam seriei $1 + 1 + 1 + \dots + 1$ ex n terminis constantis, quae propterea erit $= n$.

Quoniam casu $x = 1$ numerator ac denominator evanescit, substituantur differentialia in eorum locum, habebiturque $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$, quae posito $x = 1$ dat n pro summa seriei quaesita.

EXEMPLUM II.

Definire valorem fractionis $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2}$ casu $x = 1$, qui exhibebit summam seriei $1 + 1 + 1 + \dots + 1$ ex n terminis constantis, quae propterea erit $= n$.

Sumtis differentialibus fractio proposita transmutatur in hanc: $\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2n}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= n$.

EXEMPLUM III.

Inuenire valorem huius fractionis: $\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$
casu $x=1$, *qui exprimet summam seriei* $1+2+3+\dots+n$,
quam constat esse $= \frac{nn+n}{2}$.

Sumtis differentialibus peruenietur ad hanc fractionem
 $\frac{1 - (n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$, cuius adhuc tam
 numerator quam denominator casu $x=1$ euanescit. Hinc
 denuo differentialia sumantur, ut prodeat haec fractio:
 $\frac{n(n+1)^2 x^{n-1} + n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, quae posito
 $x=1$ abit in $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$ summam seriei
 propositae.

EXEMPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:
 $\frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$
casu $x=1$, *qui exprimet summam seriei*
 $1+3+5+\dots+(2n-1)$
quam constat esse $= nn$.

Substitutis differentialibus in loca numeratoris & denominatoris prouenit haec fractio:

$$\frac{1 + 3xx - (2n+1)^2 x^{2n} + (2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$$

quae

quae cum adhuc idem incommodum habeat, ut posito
 $x=1$ abeat in $\frac{0}{0}$, denuo differentialia sumantur,

$$\frac{6x - 2n(2n+1)^2 x^{2n-1} + (2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4 + 12xx}$$

quae posito $x=1$ abit in:

$$\frac{6 - 2n(2n+1)^2 + (2n-1)(2n+2)(2n+2)}{8} = nn.$$

EXEMPLUM. V.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

casu $x=1$, qui dabit summam seriei

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2, \text{ quam constat}$$

$$\text{esse} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Sumtis numeratoris ac denominatoris differentialibus,
 fiet

$$\frac{1 + 2x - (n+1)^3 x^n + (n+2)(2nn + 2n - 1)x^{n+1} - nn(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}$$

in qua cum numerator ac denominator posito $x=1$ de-
 nuo euanescat, differentialia secunda sumantur:

$$\frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + (n+1)(n+2)(2nn + 3n - 1)x^{n-2} - (n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}$$

Eodem vero adhuc subsistente incommodo, ad differen-
 tialia tertia procedatur, ut prodeat haec fractio:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 x^{n-2} + n(n+1)(n+2)(2nn + 2n - 1)x^{n-1} - n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6}$$

B b b b b 3

quae

quae tandem posito $x = 1$ abit in hanc formam determinatam:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 + n(n+1)(n+2)(m-n-1)}{-6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ = \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n; \text{ qui est ille ipse valor, quo} \\ \text{seriem memoratam exprimi inuenimus.}$$

EXEMPLUM VI.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, cuius valorem casu $x = 1$ assignari oporteat.

Quoniam haec fractio est productum ex his duabus: $\frac{x^m}{1 - x^p} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^p}$, prioris autem factoris casu $x = 1$ valor est $= \frac{1}{2}$, tantum opus est vt alterius factoris $\frac{1 - x^n}{1 - x^p}$ valor eodem casu quaeratur, qui sumtis differentialibus erit $= \frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$: vnde fractionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= \frac{n}{2p}$. Idem valor prodit, si immediate differentialia in fractione proposita capiantur: fiet enim $\frac{mx^{m-1} - (m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= \frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, vt ante.

361. Eadem methodo erit vtendum, si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ vel numerator vel denominator vel vterque

utrumque fuerit quantitas transcendens. Quae operationes, quo clarius explicentur, sequentia exempla adiacere visum est.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{a^n - x^n}{1a - 1x}$, cuius valor quaeratur casu $x = a$.

Sumtis differentialibus statim peruenitur ad hanc fractionem $-\frac{nx^{n-1}}{-1:x} = nx^n$, cuius valor posito $x = a$, erit na^n .

EXEMPLUM II.

Sit proposita ista fractio $\frac{1x}{V(1-x)}$, cuius valor quaeritur casu $x = 1$.

Sumtis differentialibus numeratoris & denominatoris prodit $\frac{1:x}{-1:2V(1-x)} = \frac{-2V(1-x)}{x}$, cuius valor posito $x = 1$, cum sit $= 0$, sequitur fractionem $\frac{1x}{V(1-x)}$ casu $x = 1$ evanescere.

EXEMPLUM III.

Sit proposita ista fractio $\frac{a - x - ala + alx}{a - V(2ax - xx)}$, cuius valor quaeratur posito $x = a$, quo casu numerator & denominator evanescunt.

Differentiatis secundum regulam numeratore ac denominatore

minatore erit $\frac{-1 + a:x}{-(a-x):V(2ax-xx)} = \frac{(a-x)V(2ax-xx)}{-x(a-x)}$.
 vbi etsi numerator ac denominator casu $x = a$ adhuc
 euanescent, tamen quia vterque diuisibilis est per $a-x$,
 habebitur ita fractio $-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, cuius valor casu $x = a$
 est determinatus atque $= -1$; abiturque igitur fractio pro-
 posita in -1 , si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM IV.

Sit proposita ista fractio $\frac{e^x - e^{-x}}{1(1+x)}$, cuius valor quaeritur
 posito $x = 0$.

Sumtis differentialibus habebitur ista functio $\frac{e^x + e^{-x}}{1:(1+x)}$,
 quae posito $x = 0$ dat 2 pro valore quaesito.

EXEMPLUM V.

Inuenire valorem huius fractionis $\frac{e^x - 1 - 1(1+x)}{xx}$, casu
 quo ponitur $x = 0$.

Si loco numeratoris ac denominatoris eorum differen-
 tialia substituantur, orietur haec fractio $\frac{e^x - 1:(1+x)}{2x}$,
 quae cum adhuc abeat in $\frac{0}{0}$, si ponatur $x = 0$, denuo
 differentialia sumantur, vt habeatur $\frac{e^x + 1:(1+x)^2}{2}$, quae
 posito $x = 0$ praebet $\frac{1+1}{2} = 1$. Quod idem patet si
 loco

loco x statim $0 + dx$ substituatur: cum enim sit
 $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2} dx^2 + \&c.$ & $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2} dx^2 + \&c.$

$$\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1.$$

EXEMPLUM VI.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{1x}$, casu quo ponitur $x = \infty$.

Quo ista fractio ad formam, quae hoc casu transeat
in $\frac{0}{0}$ reducatur, ita repraesentetur $\frac{1:lx}{1:x^n}$: sic enim ca-
su $x = \infty$, tam numerator quam denominator euanes-
cet. Ponatur vero porro $x = \frac{1}{y}$, ita ut casu $x = \infty$,
fiat $y = 0$, atque proponetur ista fractio $-\frac{1:ly}{y^n}$, cuius
valor casu $y = 0$ inuestigari debet. Sumtis autem diffe-
rentialibus erit $\frac{1:y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$, quae posito $y = 0$,
cum abeat in $\frac{0}{0}$, sumantur denuo differentialia, erit-
que $\frac{-2:(ly)^3}{n^2 y^n}$; vbi quia idem incommodum adest, si
porro differentialia sumantur prodibit $\frac{6:(ly)^4}{n^3 y^n}$, sicque
quousque procedamus, perpetuo idem incommodum oc-
curret. Quamobrem ut hoc non obstante valorem quae-
situm eruamus, sit s valor fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ casu, quo

C c c c c

poni-

ponitur $y=0$, & cum eodem casu fit quoque $s = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$;
 erit ex illa aequatione $ss = \frac{1:(ly)^2}{y^{2n}}$, quae per istam
 diuisa dabit $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$, ex qua perspicitur casu $y=0$
 fieri s infinitum. Fit ergo fractionis $\frac{1:ly}{y^n}$ valor
 casu $y=0$ infinitus, ideoque posito $y=dx$, habebit $\frac{1}{l dx}$
 ad dx^n rationem infinitam, vti iam supra innuimus.

EXEMPLUM VII.

*Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ casu $x=0$, quo tam
 numerator quam denominator euanescit.*

Sit hoc casu $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, erit sumtis differentialibus
 quoque $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x} : xx} = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}}$, & quia hic idem in-
 commodum occurrit, perpetuoque recurrit, quousque diffe-
 rentiationes continuentur, remedio ante adhibito utamur.
 Prior aequatio dat $x^n = e^{-1:x} s$, & $x^{n(n+1)} = e^{-(n+1)x} s^{n+1}$
 altera aequatio dat $x^n + 1 = e^{-1:x} s : n$, vnde fit $x^{n(n+1)}$
 $= e^{-n:x} s^n : n^n$, qui valor illi aequatus dabit $e^{-1:x} s^n = 1$
 ideoque $s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}}$, si $x=0$. Quare posi-
 to x infinite paruo habebit dx^n ad $e^{-1:x} dx$ rationem in-
 finite

finite magnam, quicumque numerus finitus pro n statuatur: unde sequitur $e^{-1:dx}$ esse infinite paruum homogeneum cum dx^m , si m fuerit numerus infinite magnus.

EXEMPLUM VIII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ casu, quo ponitur $x = \frac{\pi}{2}$ seu arcui 90 graduum.

Sumtis differentialibus obtinebitur haec fractio $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$, quae posito $x = \frac{\pi}{2}$ ob $\sin x = 1$ & $\cos x = 0$ abit in 1: ita ut unitas sit valor quaesitus fractionis propositae. Quod idem patet sine differentiatione: cum enim sit $\cos x = \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$ fractio proposita abit in hanc $\frac{\sqrt{(1 - \sin x)} + \sqrt{(1 + \sin x)}}{\sqrt{(1 + \sin x)} - \sqrt{(1 - \sin x)}}$ quae fit euidenter $= 1$, si fiat $\sin x = 1$.

EXEMPLUM IX.

Inuenire valorem huius expressionis $\frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ casu quo ponitur $x = 1$.

Loco numeratoris & denominatoris eorum differentialibus substitutis prodibit ista fractio: $\frac{x^x(1 + \ln x) - 1}{-1 + 1:x}$; quae cum etiam nunc fiat $= \frac{0}{0}$ posito $x = 1$, suman-

tur denuo differentialia, ut prodeat $\frac{x^x(1+\frac{1}{x})^2 + x^x : x}{1 : x x}$,
 quae posito $x = 1$ abit in 2 , qui est valor fractionis propositae casu $x = 1$.

362. Quoniam hic omnes expressiones, quae quibusdam casibus indeterminatos valores recipere videntur, pertractare constituimus, huc non solum pertinent eae fractiones $\frac{P}{Q}$, quarum numerator ac denominator certo casu evanescunt; sed etiam eiusmodi fractiones, quarum numerator ac denominator certo casu fiunt infiniti, huc sunt referendae: propterea quod earum valores aequè indeterminati videntur. Si scilicet P & Q eiusmodi fuerint functiones ipsius x , ut casu quopiam $x = a$, ambae fiant infinitae, fractioque $\frac{P}{Q}$ induat hanc formam $\frac{\infty}{\infty}$; quoniam infinita aequè ac cyphrae inter se rationem quamcunque tenere possunt, hinc valor verus minime cognosci potest. Hic quidem casus ad praecedentem reuocari potest, fractionem $\frac{P}{Q}$ in hanc formam $\frac{1 : Q}{1 : P}$ transmutando, cuius fractionis nunc numerator ac denominator casu $x = a$ evanescunt; ideoque eius valor modo ante tradito inueniri potest. At vero quoque sine hac transformatione valor inuenietur, si loco x non a , sed $a + dx$ substituatur, quo facto non eiusmodi infinita absoluta ∞ prouenient; sed ita erunt expressa

$\frac{r}{dx}$ vel $\frac{A}{dx^n}$; quae expressiones etsi sunt aequae infinitae ac ∞ , tamen comparatione inter dx eiusue potestates instituta, valor quaesitus facile colligetur.

363. Ad eandem classẽ quoque pertinent producta ex duobus factoribus constantia; quorum alter certo casu $x = a$ evanescit, alter vero in infinitum abit: cum enim quaelibet quantitas per huiusmodi productum $0 \cdot \infty$ repraesentari possit, eius valor indefinitus videtur. Sit PQ huiusmodi productum, in quo, si ponatur $x = a$, fiat $P = 0$ & $Q = \infty$, eius valor per praecepta ante tradita inuenietur, si ponatur $Q = \frac{1}{R}$, tum enim productum PQ transmutabitur in fractionem $\frac{P}{R}$; cuius numerator ac denominator ante casu $x = a$ evanescunt, ideoque eius valor methodo ambo exposita inuestigari poterit. Sic si quaeratur valor huius producti $(1-x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}$

casu $x = 1$, quo fit $1-x = 0$ & $\operatorname{tang} \frac{\pi x}{2} = \infty$, convertatur id in hanc fractionem $\frac{1-x}{\cot \frac{1}{2}\pi x}$, cuius numerator ac denominator casu $x = 1$ evanescunt. Cum igitur sit differentiale numeratoris $(1-x) = -dx$, & differentiale denominatoris $\cot \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi dx}{(\sin \frac{1}{2}\pi x)^2}$, casu $x = 1$

C c c c c 3

valor

valor fractionis propositae erit $= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$,

ob $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

364. Imprimis autem huc sunt referendae eiusmodi expressiones, quae dum ipsi x certus quidam valor tribuitur, abeunt in huiusmodi formam $\infty - \infty$: quoniam enim duo infinita quavis quantitate finita inter se discrepare possunt, manifestum est hoc casu valorem expressionis non determinari, nisi differentia inter illa duo infinita assignari possit. Iste ergo casus occurrit, si proponatur huiusmodi functio $P - Q$, in qua posito $x = a$ fiat tam $P = \infty$ quam $Q = \infty$, quo casu opē regulae ante traditae valor quaesitus non tam facile assignari potest. Etsi enim posito hoc casu fieri $P - Q = f$, sta-

tuatur $e^{P-Q} = e^f$, ita ut sit $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, ubi casu $x = a$

tam numerator e^{-Q} quam denominator e^{-P} evanescit; tamen si regula ante tradita huc transferatur, fiet

$$e^f = \frac{e^{-Q} dQ}{e^{-P} dP}, \text{ vnde ob } e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}, \text{ fieret } 1 = \frac{dQ}{dP},$$

ideoque valor quaesitus ipsius f hinc non innotescit. Quoties quidem P & Q sunt quantitates algebraicae, quoniam hae infinitae fieri nequeunt, nisi sint fractiones, quarum denominatores evanescunt; tum $P - Q$ in unicam fractionem colligi poterit, cuius denominator pari-

pariter euanescent. Quo facto si etiam numerator euanescat, valor modo supra explicato definiatur: sin autem numerator non euanescat, tum eius valor reuera erit infinitus. Sic si huius expressionis $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ valor desideretur casu $x = 1$, quia ea abit in $\frac{1-x}{1-xx} = \frac{-1}{1+x}$, patet valorem quaesitum esse $= -\frac{1}{2}$.

365. Verum si functiones P & Q fuerint transcendentes, tum plerumque haec transformatio ad calculum molestissimum perduceret. Expediet ergo his casibus methodo directa uti, atque loco $x = a$, quo ambae quantitates P & Q in infinitum abeunt, poni $x = a + \omega$, existente ω quantitate infinite parua, pro qua dx accipi poterit. Quo facto si fiat $P = \frac{A}{\omega} + B$ & $Q = \frac{A}{\omega} + C$, manifestum est functionem $P - Q$ abituram esse in $B - C$, qui erit valor finitus. Rationem igitur huiusmodi functionum valores inuestigandi sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{1x}$ casu,
quo ponitur $x = 1$.

Quoniam tam $\frac{x}{x-1}$ quam $\frac{1}{1x}$ fit infinitum positq
 $x = 1$, statuatur $x = 1 + \omega$, atque expressio proposita transformabitur in $\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{1(1+\omega)}$. Cum igitur sit
 $1(1+\omega)$

$$l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \&c. = \omega \left(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.\right)$$

habebitur

$$\frac{(1+\omega)(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.) - 1}{\omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)} = \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \&c.}{\omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega + \&c.}{1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.}$$

Posito nunc ω infinite paruo seu $\omega = 0$, manifestum est valorem quaesitum esse $= \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM II.

Denotantibus e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, & π semicircumferentiam circuli, cuius radius est $= 1$, inuestigare valorem huius expressionis:

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}, \text{ casu } x = 0.$$

Expressio ista proposita exhibet summam huius seriei:

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{4+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{16+xx} + \frac{1}{25+xx} + \&c.$$

vnde si ponatur $x = 0$, prodire debet summa seriei huius $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ quam constat esse $= \frac{\pi\pi}{6}$. Facto autem $x = 0$ expressionis propositae

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}$$

valor maxime videtur indeterminatus, ob omnes terminos infinitos. Ponatur ergo $x = \omega$, existente ω quantitate infinite parua, atque membrum prius $\frac{\pi x - 1}{2xx}$ abit in $-\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega}$. Cum deinde

fit

fit $e^{2\pi\omega} - 1 = 2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$
 alterum membrum $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}$ abit in

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.)} = \frac{1}{2\omega^2(1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \&c.)}$$

At est $\frac{1}{1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \&c.} = 1 - \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^2\omega^2 - \&c.$

vnde posterius membrum fit $= \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{6}\pi^2 - \&c.$

ad quod si prius addatur prodit $\frac{1}{6}\pi^2$, qui est valor quae-
 situs expressionis propositae casu $x = 0$.

Idem quoque per methodum fractionum, quarum
 numerator ac denominator certo casu evanescunt, praes-
 tari potest: expressio enim proposita in hanc fractionem

transmutatur: $\frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} + \pi x + 1}{2 x x e^{2\pi x} - 2 x x}$,

cuius numerator ac denominator casu $x = 0$ evanescunt.
 Sumtis ergo differentialibus oritur:

$$\frac{\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x} - 2\pi e^{2\pi x} + \pi}{4 x e^{2\pi x} + 4\pi x x e^{2\pi x} - 4x}$$

sive haec $\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4 x e^{2\pi x} + 4\pi x x e^{2\pi x} - 4x}$

cuius, si ponatur $x = 0$, adhuc numerator ac denomina-
 tor evanescunt. Quare sumtis denuo differentialibus
 habebitur:

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4 e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x x e^{2\pi x} - 4}$$

D d d d d

seu

$$\text{feu } \frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

$$\text{feu } \frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$$

cuius numerator ac denominator adhuc euanescent casu $x = 0$. Quocirca iterum differentialia sumantur

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

quae fractio posito $x = 0$ abit in $\frac{\pi^2}{6}$, vt ante.

EXEMPLUM III.

Retinentibus e & π eosdem valores, quaeratur valor
expressionis huius casu $x = 0$

$$\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$$

Expressio haec transmutatur in hanc: $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$

cuius numerator ac denominator casu $x = 0$ euanes-
cunt. Ponatur ergo $x = \omega$, & cum fit

$$e^{\pi \omega} = 1 + \pi \omega + \frac{1}{2} \pi^2 \omega^2 + \frac{1}{6} \pi^3 \omega^3 + \&c.$$

formula proposita transmutatur in hanc:

$$\frac{\pi^2 \omega + \frac{1}{2} \pi^3 \omega^2 + \frac{1}{6} \pi^4 \omega^3 + \&c.}{8\omega + 4\pi \omega^2 + 2\pi^2 \omega^3 + \&c.}$$

quae posito ω infinite paruo statim dat $\frac{1}{6} \pi^2$, qui est
valor quaesitus expressionis propositae casu $x = 0$. At

vero expressio proposita $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$, exhibet sum-

|||||

nam huius seriei $\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{25+xx} + \frac{1}{49+xx} + \&c.$
 cuius summa posito $x=0$ utique fit $= \frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2xtang\pi x}$
 casu $x=0$.

Formula haec proposita $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2xtang\pi x}$ exprimit
 summam huius seriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

Si igitur ponatur $x=0$, prodire debet summa seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c. \text{ quae est } = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Quoniam est $tang\pi x = \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$, expressio proposita in-

duet hanc formam: $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi \cos\pi x}{2x \sin\pi x} = \frac{\sin\pi x - \pi x \cos\pi x}{2xx \sin\pi x}$

cuius numerator ac denominator evanescit posito $x=0$.

Ponatur ergo $x=\omega$ & cum sit

$$\sin\pi x = \pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$$

$$\cos\pi x = 1 - \frac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \&c.$$

expressio proposita fiet:

$$\frac{\pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c. - \pi\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\omega^3 - \frac{1}{3}\pi^3\omega^5 + \&c.} = \frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\omega^3 - \&c.}$$

quae ob ω infinite parvum dat $\frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM V.

Cum sit summa huius seriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \&c. = \frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi x}{4x \cos \frac{1}{2} \pi x}$$

inuenire eius summam, si fuerit $x=0$.

Quia est $\sin \frac{1}{2} \pi x = \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{48} \pi^3 x^3 + \&c.$
 & $\cos \frac{1}{2} \pi x = 1 - \frac{1}{8} \pi^2 x^2 + \&c.$ erit expressio
 proposita

$$= \frac{\frac{1}{2} \pi^2 x - \frac{1}{48} \pi^4 x^3 + \&c.}{4x - \frac{1}{2} \pi^2 x^3 + \&c.} = \frac{\frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{48} \pi^4 x^2 + \&c.}{4 - \frac{1}{2} \pi^2 x^2 + \&c.}$$

in qua si fiat $x=0$, valor erit manifesto $= \frac{1}{8} \pi^2$, quam
 esse summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ supra
 pluribus modis est demonstratum. Sin autem pro x su-
 matur numerus par quicunque, summa seriei propositae
 semper est $=0$.

366. In his seriebus, quas binis vltimis exemplis
 tractauimus, aliisque litteram variabilem x continenti-
 bus, ipsi x eiusmodi valores tribui possunt, vt quidam
 termini in infinitum excrescant, quibus quidem casibus
 summa totius seriei fiet infinita. Sic series:

$$\frac{1}{1-xxx} + \frac{1}{4-xxx} + \frac{1}{9-xxx} + \frac{1}{16-xxx} + \&c.$$

si pro x ponatur numerus quicunque integer, vnus per-
 petuo terminus ob denominatorem euanescentem fit in-
 finitus; hancque ob causam ipsa seriei summa infinita
 euadet. Quodsi autem iste terminus infinitus ex serie
 tolla-

tollatur, tum summa reliqua sine dubio erit finita, exprimeturque summa priori infinita termino isto infinito mulctata, hoc modo $\infty - \infty$: quemnam ergo habitura sit valorem determinatum modo hic exposito inueniri poterit; id quod clarius ex subiunctis exemplis perspicietur.

EXEMPLUM I.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu $x=1$, & deuto termino primo, qui
hoc casu in infinitum augetur.

Quia in genere summa est $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \text{ tang. } \pi x}$,

erit summa quaesita $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \text{ tang. } \pi x} - \frac{1}{1-xx}$
posito $x=1$. Sit $x=1+\omega$, & habebitur pro summa

quaesita $\frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega) \text{ tang. } (\pi+\omega\pi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}$.

At est $\text{tang. } (\pi+\omega\pi) = \text{tang. } \omega\pi = \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$

Vnde cum primus terminus $\frac{1}{2xx}$ posito $x=1$ determinatum habeat valorem $\frac{1}{2}$, duo reliqui tantum termini sunt spectandi, qui erunt

$$\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\pi}{2\omega(1+\omega)(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^2)} - \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2)}$$

si quidem ω sit infinite paruum, quo casu etiam ter-

D d d d d 3 mi

minus $\frac{1}{2} \pi^2 \omega^2$ negligi poterit. Proueniet autem

$\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$ posito $\omega = 0$, estque ergo
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ summa seriei: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c.$
 uti aliunde constat.

EXEMPLUM II.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu quo pro x ponitur numerus quicumque integer n

& demto ex serie termino illo $\frac{1}{nn-xx}$,

qui fit infinitus.

Summa ergo haec, quae quaeritur, ita erit expressa
 $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \tan \pi x} - \frac{1}{nn-xx}$, si quidem statua-
 tur $x = n$, quo quidem casu primus terminus $\frac{1}{2xx}$ abit

in $\frac{1}{2nn}$, bini vero reliqui ambo fiunt infiniti. Ponatur
 ergo $x = n + \omega$, & cum sit $\tan(\pi n + \pi \omega) = \tan \pi \omega = \pi \omega$,
 posito ω infinite paruo, habebimus pro summa quaesita:

$$\frac{1}{2nn} - \frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega} + \frac{1}{2n\omega + \omega\omega} \text{ seu}$$

$$\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n+2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n+\omega)} = \frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$$

unde si fiat $\omega = 0$, prodibit summa quaesita

$$= \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}. \quad \text{Quocirca erit } \frac{3}{4nn} =$$

$$\frac{1}{1-nn} + \frac{1}{4-nn} + \frac{1}{9-nn} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2-nn}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \&c.$$

in infinitum, siue erit istius seriei infinitae summa:

$$\frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \frac{1}{(n+3)^2-nn} + \&c.$$

$$= \frac{3}{4nn} + \frac{1}{nn-1} + \frac{1}{nn-4} + \frac{1}{nn-9} + \dots + \frac{1}{nn-(n-1)^2}.$$

EXEMPLUM III.

Inuenire summam huius seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \&c.$$

si ponatur $x=1$, atque terminus primus $\frac{1}{1-xx}$,

qui hoc casu fit infinitus, auferatur.

Cum huius seriei summa sit in genere $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi x}{4x \cos \frac{1}{2} \pi x}$

erit summa quaesita $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi x}{4x \cos \frac{1}{2} \pi x} - \frac{1}{1-xx}$, si pona-

tur $x=1$. Quia vero vterque terminus fit infinitus, ponatur $x=1-\omega$, & cum sit $\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega) = \cos \frac{1}{2}\pi\omega = 1 - \frac{1}{8}\pi^2\omega^2$, & $\cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega) = \sin \frac{1}{2}\pi\omega = \frac{1}{2}\pi\omega$ ob ω infinite paruum, habebitur ista expressio:

$$\frac{\pi(1 - \frac{1}{8}\pi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega} - \frac{1}{2\omega-\omega\omega} = \frac{1}{\omega(2-2\omega)} - \frac{1}{\omega(2-\omega)}$$

quae fit $= \frac{1}{4}$ posito $\omega=0$, estque propterea

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \&c.$$

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Inuenire summam seriei huius :

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \&c.$$

si pro x ponatur numerus quicumque integer impar $2n-1$
isque terminus $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$, qui hoc casu
fit infinitus, e medio tollatur.

Erit ergo summa, quae quaeritur, $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi x}{4x \cos \frac{1}{2} \pi x}$

$-\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ posito $x=2n-1$. Statuamus ergo

$x=2n-1-\omega$, existente ω infinite paruo, fietque

$$\sin \frac{1}{2} \pi x = \sin \left(\frac{2n-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi \omega \right) = \pm \cos \frac{1}{2} \pi \omega,$$

vbi signum superius valet, si sit n numerus impar, inferius vero si sit par. Simili modo erit

$$\cos \frac{1}{2} \pi x = \cos \left(\frac{2n-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi \omega \right) = \pm \sin \frac{1}{2} \pi \omega; \text{ ideoque}$$

$$\text{siue } n \text{ sit par siue impar, erit } \frac{\sin \frac{1}{2} \pi x}{\cos \frac{1}{2} \pi x} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2} \pi \omega} = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi \omega}.$$

Hinc summa quaesita ita exprimetur:

$$\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)} - \frac{1}{\omega[2(2n-1)-\omega]}, \text{ erit-}$$

$$\text{que propterea } = \frac{1}{4(2n-1)^2}. \text{ Sic si sit } n=2, \text{ erit}$$

$$\frac{1}{36} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{40} + \frac{1}{72} + \frac{1}{112} + \&c.$$

cuius summationis veritas aliunde constat.

CAPUT

CAPUT XVI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM INEXPLICABILIVM.

367.

Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita ut non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n}$, quae

utique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio $1. 2. 3. 4. \dots x$, erit functio inexplicabilis ipsius x , quoniam si x sit numerus quicumque, eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per vllum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus deriuari potest. Sit enim proposita series quaecunque

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + & \dots & + & X \end{matrix}$$

cuius summa si formula finita exprimi nequeat, praebebit functionem inexplicabilem ipsius x , nempe

$$S = A + B + C + D + \dots + X.$$

E e e e e

Simili-

Similiter continua producta ex terminis serierum. uti

$$P = A B C D \dots X$$

exhibebunt functiones inexplicabiles ipsius x , quae autem ope logarithmorum ad formam priorem reuocari possunt, erit enim:

$$1/P = 1/A + 1/B + 1/C + 1/D + \dots + 1/X$$

368. Hoc igitur capite methodum explicare constitui, huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia inuestigandi. Quod argumentum, quamuis ad primam huius operis partem, ubi praecepta calculi differentialis sunt tradita, pertinere videatur; tamen quoniam uberiores doctrinae serierum cognitionem postulat, ad quam in hac altera parte peruenire licuit, ordinem naturalem relinquere coacti hoc loco attingamus. Cum autem haec inuestigatio prorsus sit noua, neque a quoquam adhuc tractata, tantum abest ut hanc calculi differentialis partem absolueri queamus, ut potius prima tantum eius elementa adumbrare conemur. Praeterea vero nonnullas quaestiones proponam, quarum enodatio differentiationem huiusmodi functionum inexplicabilium requirat, quo simul usus huius tractationis, qui autem in posterum sine dubio multo amplior erit, clarius perspiciatur.

369. Ad huiusmodi functiones inexplicabiles differentiandas ante omnia necesse est, ut earum valores inuestigemus; quos induunt, si pro x ponatur $x + \omega$.
Sit

Sit igitur

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots + \overset{x}{X}$$

atque ponatur Σ valor ipsius S , quem recipit, si pro x ponatur $x + \omega$, fitque Z terminus seriei respondens indici $x + \omega$. Iam igitur termini, qui respondent indicibus $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, &c. indicentur per X' , X'' , X''' , X^{iv} , &c. atque is, qui convenit indici infinito $x + \infty$ per $X^{|\infty|}$. Similique modo termini competentes indicibus $x + \omega + 1$, $x + \omega + 2$, $x + \omega + 3$ &c. indicentur per Z' , Z'' , Z''' , &c. & fit $Z^{|\infty|}$ terminus respondens indici $x + \omega + \infty$. Quibus positis erit

$$S' = S + X'$$

$$S'' = S + X' + X''$$

$$S''' = S + X' + X'' + X'''$$

&c.

$$S^{|\infty|} = S + X' + X'' + X''' + \dots + X^{|\infty|}$$

Simili modo cum etiam Σ successive terminis Z' , Z'' &c. augeatur, erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$

$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$

$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$

&c.

$$\Sigma^{|\infty|} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \dots + Z^{|\infty|}$$

370. Nunc natura seriei S , S' , S'' , S''' , &c. est perpendenda, qualis futura sit, si in infinitum continue-

E e e e 2

tur

tur: quae si in infinito cum progressionem arithmetica confundatur; quod fit si termini seriei $X, X', X'', X''', \&c.$ in infinito ad aequalitatem convergant, ita ut differentiae seriei $S, S', S'', \&c.$ tandem fiant aequales: hoc casu quantitates $S^{[\omega]}, S^{[\omega+2]}, S^{[\omega+1]} \&c.$ erunt in arithmetica progressionem, & cum fit $\Sigma^{[\omega]} = S^{[\omega+\omega]}$ ob $S^{[\omega+\omega]} = S^{[\omega]} + \omega(S^{[\omega+1]} - S^{[\omega]}) = \omega S^{[\omega+1]} + (1-\omega)S^{[\omega]}$ erit $\Sigma^{[\omega]} = \omega S^{[\omega+1]} + (1-\omega)S^{[\omega]}$. At est $S^{[\omega+1]} = S^{[\omega]} + X^{[\omega+1]}$, vnde fit $\Sigma^{[\omega]} = S^{[\omega]} + \omega X^{[\omega+1]}$, ex quo obtinebitur haec aequatio

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \dots + Z^{[\omega]} = S + X' + X'' + X''' + \dots + X^{[\omega]} + \omega X^{[\omega+1]}$$

ex qua definitur valor quaesitus Σ , quem induit functio S , dum in ea $x + \omega$ loco x substituitur; eritque

$$\Sigma = S + \omega X^{[\omega+1]} + X' + X'' + X''' + \&c. \text{ in infinitum} \\ - Z' - Z'' - Z''' - \&c. \text{ in infinitum}$$

Quare si seriei $A, B, C, D, \&c.$ termini infinitesimi evanescant, terminus $\omega X^{[\omega+1]}$ evanescit, & omitti potest.

371. Exprimitur ergo valor ipsius Σ per novam seriem infinitam, quae exhiberi potest, si seriei $A + B + C + \&c.$ habeatur terminus generalis, ex quo valores terminorum $Z', Z'', Z''', \&c.$ definiri queant. Posito ergo ω infinite parvo, cum fit $\Sigma = S$ differentiale functionis S , hoc differentiale dS per seriem infinitam exprimetur. Atque si nequidem altiores potestates ipsius

ω negligentur, habebitur differentiale completum functionis huius inexplicabilis S, cuius natura, quo clarius ob oculos ponatur, sequentibus exemplis hoc negotium illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x}.$$

Quoniam huius seriei terminus generalis X est $= \frac{1}{x}$

ac propterea

$$\begin{array}{l|l} X' = \frac{1}{x+1} & Z' = \frac{1}{x+1+\omega} \\ X'' = \frac{1}{x+2} & Z'' = \frac{1}{x+2+\omega} \\ X''' = \frac{1}{x+3} & Z''' = \frac{1}{x+3+\omega} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

ob $X^{[\infty+1]} = \frac{1}{x+\infty+1} = 0$, si loco x ponatur $x+\omega$
functio S abibit in Σ , vt fit

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \&c.$$

$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \&c.$$

sue binis his terminis in singulos colligendis, erit

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \&c.$$

E e e e e 3 seu

seu cum sit

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \&c.$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \&c.$$

erit seriebus secundum potestates ipsius ω dispositis

$$\begin{aligned} \Sigma = S + \omega & \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c. \right) \\ & - \omega^2 \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c. \right) \\ & + \omega^3 \left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c. \right) \\ & - \omega^4 \left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

Posito ergo dx pro ω obtinebimus functionis propositae S differentiale completum

$$\begin{aligned} dS = dx & \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c. \right) \\ & - dx^2 \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c. \right) \\ & + dx^3 \left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c. \right) \\ & - dx^4 \left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

EXEM-

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale huius functionis inexplicabilis
ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1}.$$

Quia huius seriei terminus generalis est $X = \frac{1}{2x-1}$;

erit:

$$\begin{array}{l|l} X' = \frac{1}{2x-1} & Z' = \frac{1}{2x-1+2\omega} \\ X'' = \frac{1}{2x+3} & Z'' = \frac{1}{2x+3+2\omega} \\ X''' = \frac{1}{2x+5} & Z''' = \frac{1}{2x+5+2\omega} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

ob terminos huius seriei infinitesimos evanescentes & aequales, prodibit valor ipsius S, si loco x ponatur $x+1$:

$$\begin{aligned} \Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c. \\ \frac{1}{2x+1+2\omega} + \frac{1}{2x+3+2\omega} + \frac{1}{2x+5+2\omega} + \&c. \\ \text{feu} \end{aligned}$$

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)} + \&c.$$

Verum si singuli termini in series secundum dimensiones ipsius ω resoluantur, erit:

$$\Sigma =$$

$$\begin{aligned}
\Sigma = S + & 2\omega \left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \right) \\
& - 4\omega^2 \left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \right) \\
& + 8\omega^3 \left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c. \right) \\
& - 16\omega^4 \left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c. \right) \\
& \&c.
\end{aligned}$$

Ponatur nunc dx pro ω , atque prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis S propositae:

$$\begin{aligned}
dS = & 2dx \left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \right) \\
& - 4dx^2 \left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \right) \\
& + 8dx^3 \left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c. \right) \\
& - 16dx^4 \left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c. \right) \\
& \&c.
\end{aligned}$$

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale completum functionis huius inexpli-
cabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots + \frac{1}{x^n}.$$

Cum huius seriei terminus generalis sit $= \frac{1}{x^n}$, erunt
termini infinitesimi euanescentes & inter se aequales.
Hincque ob

$$\begin{array}{l|l} X' = \frac{1}{(x+1)^n} & Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n} \\ X'' = \frac{1}{(x+2)^n} & Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n} \\ X''' = \frac{1}{(x+3)^n} & Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

erit:

$$X' - Z' = \frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} + \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \&c.$$

$$X'' - Z'' = \frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} + \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \&c.$$

ex quibus inuenitur:

$$\begin{aligned} \Sigma - S &= n\omega \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c. \right) \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \omega^2 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c. \right) \\ &\quad + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c. \right) \\ &\quad \&c. \qquad \text{Fff ff} \qquad \text{Qua.} \end{aligned}$$

Quare posito $\omega = dx$ prodibit differentiale completum functionis S quaesitum:

$$\begin{aligned} dS = & + n dx \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c. \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} dx^2 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c. \right) \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} dx^3 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

362. Ex his quoque summae istarum serierum interpolari, seu valores terminorum summatoriorum exhiberi possunt, quando numerus terminorum non est numerus integer. Si enim ponatur $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque Σ exprimet summam tot terminorum, quot numerus ω continet unitates, etiam si iste numerus ω non sit integer. Ita in exemplo primo si ponatur

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\omega}$$

erit:

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

sive

$$\Sigma = \omega \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c. \right)$$

$$- \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right)$$

$$+ \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right)$$

&c.

In

In exemplo vero tertio erit:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots + \frac{1}{\omega^n}.$$

Valorque ipsius Σ , siue ω sit numerus integer siue fractus, per series sequenti modo exprimeretur:

$$\begin{aligned} \Sigma = & n\omega \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} + \&c. \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{1.2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \&c. \right) \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

373. Haec eadem quoque ad seriem generalem accommodari possunt, cum enim sit

$$S = A + B + C + D + \dots + X$$

atque posito $x + \omega$ loco x , abeat X in Z , & S in Σ , erit:

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

& quia simili modo Z' , Z'' , Z''' , &c. per X' , X'' , X''' , &c. exprimuntur, erit:

$$\begin{aligned} \Sigma = S + \omega X^{[\omega+1]} \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & - \frac{\omega^2}{1.2 dx^2} dd. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & - \frac{\omega^3}{1.2.3 dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & \&c. \end{aligned}$$

& nisi $X^{|\infty+1|}$ sit $= 0$, hoc modo exprimi poterit, ut consideratio infiniti tollatur:

$$X^{|\infty+1|} = X' + (X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + \&c.$$

eritque ergo:

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega [(X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + \&c.]$$

$$- \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$+ \frac{\omega^2}{2 dx^2} dd. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^3}{6 dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

&c.

Si ergo ponatur $\omega = dx$, orietur differentiale completam ipsius $S = A + B + C + \dots + X$, ita expressum:

$$dS = X' dx + dx [(X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + \&c.]$$

$$- d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$+ \frac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

&c.

374. Ponamus esse $x = 0$, fiet $X' = A$, $X'' = B$, &c. ideoque $X' + X'' + X''' + \&c.$ erit series infinita cuius terminus generalis est $= X$. Formentur deinde series ex his terminis generalibus:

$$\frac{dX}{dx}; \frac{ddX}{2 dx^2}; \frac{d^3X}{6 dx^3}; \frac{d^4X}{24 dx^4}; \&c.$$

qua-

quarum serierum in infinitum continuatarum summae
sint :

$$\int. X = \mathfrak{A}$$

$$\int. \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}$$

$$\int. \frac{ddX}{2 dx^2} = \mathfrak{C}$$

$$\int. \frac{d^3X}{6 dx^3} = \mathfrak{D} \quad \&c.$$

& quia posito $x = 0$, fit quoque $S = 0$, & Σ erit
summa seriei $A + B + C + D + \dots + Z$ con-
tinentis ω terminos; est enim Z terminus indicis ω , siue
 ω sit numerus integer siue fractus. Quare habebitur

$$\Sigma = \omega A + \omega [(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.] \\ - \omega \mathfrak{B} - \omega^2 \mathfrak{C} - \omega^3 \mathfrak{D} - \omega^4 \mathfrak{E} - \&c.$$

vbi prima series praetermitti potest, si seriei propositae
termini tandem evanescant.

375. Scribamus nunc x loco ω , abibitque Σ in S
ita vt fit

$$S = A + B + C + D + \dots + X$$

atque idem ipsius S valor iam per seriem infinitam ex-
primeretur hoc modo :

$$S = Ax + x[(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.] \\ - \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \&c.$$

cuius valor cum aequè distincte exprimatur, siue x sit
numerus integer siue fractus, differentialia ipsius S cu-
iusque ordinis hinc facile exhiberi possunt:

F f f f f 3

dS

$$\frac{dS}{dx} = A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.$$

$$= B - 2C + 3D - 4E + \&c.$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = -C - 3D - 6E - 10F + \&c.$$

$$\frac{d^3S}{6dx^3} = -D - 4E - 10F - 20G + \&c.$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = -E - 5F - 15G + \&c.$$

Quare cum differentiale completum sit

$$= dS + \frac{1}{2}ddS + \frac{1}{6}d^3S + \frac{1}{24}d^4S + \&c.$$

erit functionis propositae S differentiale completum :

$$dS = Adx + (B-A)dx + (C-B)dx + (D-C)dx + \&c.$$

$$= Bdx - C(2xdx + dx^2) - D(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$

$$= E(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \&c.$$

376. Hoc ergo modo functionis cuiusque inexplicabilis S differentiale assignari potest, si seriei $A + B + C + D + \&c.$ termini infinitesimi vel evanescant vel inter se sint aequales. Quod si enim huius termini infinitesimi non fuerint $= 0$, tum summa seriei B, quae ex termino generali $\frac{dX}{dx}$ formatur, fiet infinita; at vero cum serie $A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.$ coniuncta summam finitam constituet. At fieri potest, ut termini seriei $A + B + C + D + \&c.$ ita in infinitum augeantur, ut non solum seriei B, sed etiam seriei E summa fiat infinite magna, quo casu non sufficit seri-

seriem $A + (B - A) + (C - B) + \&c.$ adiecisse: sed quoniam hoc casu valores infinitesimi §. 370. considerati, nempe $S^{|\omega|}$, $S^{|\omega+1|}$, $S^{|\omega+2|}$, non amplius in arithmetica sunt progressionem, uti assumseramus, huius progressionis ratio erit habenda. Quemadmodum ergo assumimus, horum terminorum differentias primas esse aequales; ita methodum amplius extendemus, si horum valorum differentias demum secundas, vel tertias, vel ulteriores constantes statuamus.

377. Retento ergo eodem ratiocinio, quo §. 369. sumus usi, ponamus memoratorum valorum differentias demum secundas esse constantes:

$$\begin{aligned} & S^{|\omega|}, S^{|\omega+1|}, S^{|\omega+2|} \\ \text{DIFF. I.} & X^{|\omega+1|}, X^{|\omega+2|} \\ \text{DIFF. II.} & X^{|\omega+2|} - X^{|\omega+1|} \\ \text{Hinc erit } \Sigma &= S^{|\omega|} = S^{|\omega+1|} - \omega X^{|\omega+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \\ & (X^{|\omega+2|} - X^{|\omega+1|}) = S^{|\omega|} - \frac{\omega(\omega-3)}{1.2} X^{|\omega+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X^{|\omega+2|} \end{aligned}$$

Quamobrem habebimus hanc aequationem:

$$\begin{aligned} \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \dots + Z^{|\omega|} &= \\ S + X' + X'' + X''' + \dots + X^{|\omega|} &= \\ \frac{\omega(\omega-3)}{1.2} X^{|\omega+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X^{|\omega+2|} & \text{ ex} \end{aligned}$$

ex qua elicitur :

$$\begin{aligned} \Sigma &= S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \text{ in infinitum} \\ &\quad - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \text{ in infinitum} \\ &\quad + \omega X^{[\omega+1]} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} (X^{[\omega+2]} - X^{[\omega+1]}). \end{aligned}$$

Termini autem isti infinitesimi ita repraesentari poterunt, ut sit

$$\begin{aligned} \Sigma &= S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ &\quad - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ &\quad + \omega X' + \omega \left\{ \begin{aligned} &+ X'' + X''' + X'''' + X'''' + \&c. \\ &- X' - X'' - X''' - X'''' - \&c. \end{aligned} \right\} \\ &\quad + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X'' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \left\{ \begin{aligned} &+ X''' + X'''' + X'''' + \&c. \\ &- 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \&c. \end{aligned} \right\} \\ &\quad - \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \left\{ \begin{aligned} &+ X' + X'' + X''' + \&c. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

vnde simul lex patet, qua haec expressio erit comparata, si differentiae demum tertiae vel quartae vel ultiores fuerint constantes.

378. Cum igitur sit, ut supra demonstrauiamus :

$$Z = X + \frac{\omega dX}{1 dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 X}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

si loco Z' , Z'' , Z''' , &c. valores hinc oriundos substituamus, erit valor ipsius S , si loco x scribatur $x + \omega$, sequens :

$$\Sigma = S$$

$$\begin{aligned}
\Sigma &= S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} +X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} X'' + \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} +X''' + X^{IV} + X^V + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^V - \&c. \end{array} \right\} \\
&- \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} X' + \left\{ \begin{array}{l} +X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{array} \right\} \\
&- \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&- \frac{\omega^2}{2 dx^2} d^2. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&- \frac{\omega^3}{6 dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Si ergo loco ω ponatur dx , prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis propositae S ; scilicet

$$\begin{aligned}
dS &= X' dx + dx \left\{ \begin{array}{l} +X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right\} \\
&- X'' \frac{dx(1-dx)}{1 \cdot 2} - \frac{dx(1-dx)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} +X''' + X^{IV} + X^V + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^V - \&c. \end{array} \right\} \\
&+ X' \frac{dx(1-dx)}{1 \cdot 2} + \left\{ \begin{array}{l} +X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{array} \right\} \\
&+ X''' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left\{ \begin{array}{l} +X^{IV} + X^V + \&c. \end{array} \right\} \\
&- 2X'' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \begin{array}{l} -3X''' - 3X^{IV} - \&c. \\ +3X'' + 3X''' + \&c. \end{array} \right\} \\
&+ X' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left\{ \begin{array}{l} -X' - X'' - \&c. \end{array} \right\} \\
&\&c. \quad \text{Ggg gg} \quad -d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c.] \\
& - \frac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c.] \\
& - \frac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c.] \\
& - \frac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c.] \\
& \&c.
\end{aligned}$$

quae expressio latissime patet, & quotaecunque demum differentiae fuerint constantes, differentiale quaesitum exhibet. Accommodata enim est haec formula ad differentias constantes, & simul lex patet, si forte ulterius progredi necesse sit.

379. Quod si series $A + B + C + D + \&c.$ ex qua formatur functio inexplicabilis

$$S = A + B + C + D + \dots + X$$

ita fuerit comparata, ut eius termini infinitesimi evanescant, tum uti iam notauimus erit:

$$\begin{aligned}
dS = & - d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
& - \frac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
& - \frac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
& - \frac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.] \\
& \&c.
\end{aligned}$$

Sin autem illius seriei termini infinitesimi non sint = 0, sed tamen differentias habeant evanescentes, tum ad istam expressionem insuper addi debet

$$dx \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right\}$$

Ve-

Verum si terminorum infinitesimorum huius seriei $A + B + C + D + \&c.$ differentiae demum secundae evanescant, tum praeterea adici oportet:

$$\frac{dx(dx-1)}{1.2.} \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^V + \&c. \\ - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c. \\ - X' + X' + X'' + X''' + \&c. \end{array} \right\}$$

Atque si memoratorum terminorum infinitesimorum differentiae demum tertiae fuerint evanescentes, tum praeter has iam exhibitas expressiones insuper addi debet.

$$\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3.} \left\{ \begin{array}{l} X''' + X^{IV} + X^V + X^VI + \&c. \\ - 3X''' - 3X^{IV} - 3X^V - \&c. \\ - 2X'' + 3X'' + 3X''' + 3X^{IV} + \&c. \\ + X' - X' - X'' - X''' - \&c. \end{array} \right\}$$

Sicque porro expressiones insuper addendae erunt comparatae, si vltiores demum differentiae terminorum infinitesimorum seriei $A + B + C + D + \&c.$ evanescant. Hincque adeo quaecunque series assumatur, dummodo eius termini infinitesimi tandem ad differentias evanescentes perducantur, functionis inexplicabilis ex ea formatae differentiale definiri poterit.

380. Si ponatur $x=0$, fiet $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$ &c. Quare vti $A + B + C + D + \&c.$ est series, cuius terminus generalis est X , si ex terminis generalibus $\frac{dX}{dx}$; $\frac{ddX}{2dx^2}$; $\frac{d^3X}{6dx^3}$; $\frac{d^4X}{24dx^4}$; &c. simili modo formantur series infinitae, earumque summae denotentur per litteras: \mathfrak{B} ; \mathfrak{C} ; \mathfrak{D} ; \mathfrak{E} ; &c. respectiue. Summa

G g g g 2 ω

ω terminorum seriei $A + B + C + D + \&c.$ ita exprimeretur, vt perinde sit, siue ω sit numerus integer siue secus. Scribamus ergo x pro ω , vt sit,

$$S = A + B + C + D + \dots + X$$

atque si huius seriei termini infinitesimi euanescent, erit

$$S = Bx - Cx^2 + Dx^3 - Ex^4 + \&c.$$

At si termini infinitesimi differentias saltem primas habeant constantes, tum ad hunc valorem insuper addi debet hic:

$$x \left\{ A + B + C + D + E + \&c. \right. \\ \left. - A - B - C - D - \&c. \right\}$$

fin autem illorum terminorum infinitesimorum differentiae demum secundae euanescent, tum praeterea addi debet:

$$\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} + B + C + D + E + F + \&c. \\ - A - 2B - 2C - 2D - 2E - \&c. \\ + A + B + C + D + \&c. \end{array} \right\}$$

Si differentiae demum tertiae fuerint euanescentes, tum insuper adiaci debet haec series infinita:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \begin{array}{l} + C + D + E + F + G + \&c. \\ - 2B - 3C - 3D - 3E - 3F - \&c. \\ + A + 3B + 3C + 3D + 3E + \&c. \\ - A - B - C - D - \&c. \\ \&c. \end{array} \right\}$$

381. Accommodemus haec quoque ad alterum functionum inexplicabilium genus, quae constant continuo producto terminorum aliquot seriei propositae $A + B + C + D + \&c.$ fitque

$$S = A^1 B^2 C^3 D^4 \dots X^x$$

& quaeratur primo valor Σ , in quem S transmutatur, si loco x scribatur $x + \omega$; ponamus autem ut ante esse Z terminum seriei $A + B + C + D + \&c.$ cuius index sit $x + \omega$, uti X respondet indici x . Quo ergo hunc casum ad praecedentem reducamus fumamus logarithmos; eritque

$$1S = 1A + 1B + 1C + 1D + \dots + 1X$$

Quod si iam huius seriei termini infinitesimi evanescant, erit eandem methodum, qua ante vti sumus, adhibendo

$$1\Sigma = 1S + 1X' + 1X'' + 1X''' + \&c. \\ - 1Z' - 1Z'' - 1Z''' - \&c.$$

hincque ad numeros regrediendo erit

$$\Sigma = S \cdot \frac{X'}{Z'} \cdot \frac{X''}{Z''} \cdot \frac{X'''}{Z'''} \cdot \frac{X''''}{Z''''} \cdot \&c.$$

quae ergo expressio valet, si seriei $A, B, C, D, \&c.$ termini infinitesimi vnitati aequentur. Sin autem logarithmi terminorum infinitesimorum huius seriei non evanescant, at tamen differentias habeant evanescentes; tum ad illam seriem, quam pro 1Σ inuenimus, insuper addi debet haec series

$$\omega 1X' + \omega \left(1 \frac{X''}{X'} + 1 \frac{X'''}{X''} + 1 \frac{X''''}{X'''} + \&c. \right) \\ G \quad g \quad g \quad g \quad 3 \quad \text{sicque}$$

ficque numeris sumendis habebitur

$$\Sigma = SX^{I\omega} \cdot \frac{X^{II\omega} \cdot X^{I(1-\omega)}}{Z^I} \cdot \frac{X^{III\omega} \cdot X^{II(1-\omega)}}{Z^{II}} \cdot \frac{X^{IV\omega} \cdot X^{III(1-\omega)}}{Z^{III}} \cdot \&c.$$

382. Quodsi ergo ponamus $x = 0$, quo casu fit $S = 1$, & $X^I = A$, $X^{II} = B$; $X^{III} = C$; &c. Σ denotabit productum ω terminorum huius seriei A, B, C, D &c. Si igitur pro ω scribamus x , ut Σ obtineat valorem, quem ante ipsi S tribueramus, ita ut fit

$$S = \frac{1}{A} \cdot \frac{2}{B} \cdot \frac{3}{C} \cdot \frac{4}{D} \cdot \dots \cdot \frac{x}{X}$$

quia nunc $Z^I, Z^{II}, Z^{III}, \&c.$ abeunt in X^I, X^{II}, X^{III} &c. si logarithmi terminorum infinitesimorum istius seriei $A, B, C, D, E, \&c.$ evanescant, exprimetur S hoc modo.

$$S = \frac{A}{X^I} \cdot \frac{B}{X^{II}} \cdot \frac{C}{X^{III}} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \frac{E}{X^V} \cdot \&c.$$

Sin autem differentiae demum logarithmorum terminorum infinitesimorum seriei $A, B, C, D, \&c.$ evanescant, tum ista functio S sequenti modo exprimetur, ut fit:

$$S = A^x \cdot \frac{B^x A^{1-x}}{X^I} \cdot \frac{C^x B^{1-x}}{X^{II}} \cdot \frac{D^x C^{1-x}}{X^{III}} \cdot \frac{E^x D^{1-x}}{X^{IV}} \cdot \&c.$$

si illorum logarithmorum differentiae secundae demum sint evanescentes, ex praecedentibus facile colligitur, cuiusmodi factores insuper addi debeant; quem casum, cum vix occurrere soleat, hic praetermittamus. Ceterum

rum usum harum expressionum in interpolationis negotio capite sequente ostendam.

383. Hic igitur cum differentiatio huiusmodi functionum inexplicabilium potissimum sit proposita: inuestigemus differentiale huius functionis

$$S = A. B. C. D. \dots X$$

Ad hoc resumamus aequationem ante inuentam

$$I\S = IS + IX' + IX'' + IX''' + \&c.$$

$$I'Z = IZ' + IZ'' + IZ''' + \&c.$$

& cum $I'Z$ oriatur ex IX , si loco x ponatur $x + \omega$, erit

$$I'Z = IX + \frac{\omega}{dx} d. IX + \frac{\omega^2}{2dx^2} dd. IX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3. IX + \&c.$$

quibus valoribus pro $I'Z'$, $I'Z''$, $I'Z'''$, &c. substitutis habebitur

$$I\S = IS - \frac{\omega}{dx} d. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$\&c.$$

Ponatur nunc $\omega = dx$, fietque $I\S = IS + d. IS$, ideoque erit

$$\frac{dS}{S} = d. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$- \frac{1}{2} dd. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$+ \frac{1}{6} d^3. [IX' + IX'' + IX''' + IX^{IV} + \&c.]$$

$$\&c.$$

quae

quae formula valet, si logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. evanescant; sin autem ipsi non evanescant, attamen differentias habeant evanescentes, tum ad praecedentem differentialis completi expressionem insuper addi debet haec series:

$$dx lX' + dx \left(l \frac{X''}{X'} + l \frac{X'''}{X''} + l \frac{X''''}{X'''} + \&c. \right)$$

vt obtineatur differentiale completum.

384. Idem adhuc alio modo praestari potest. Ponatur $x = 0$, quo casu abit lS in 0. Tum formentur series, quarum termini generales sint:

$$lX; \frac{d.lX}{dx}; \frac{dd.lX}{2dx^2}; \frac{d^3.lX}{6dx^3}; \&c.$$

harumque serierum infinitarum summae sint respectue: A, B, C, D, &c. Scribatur x pro ω , vt sit $\Sigma = S$, eritque

$$lS = -Bx - Cx^2 - Dx^3 - Ex^4 - \&c.$$

si quidem logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. cuius terminus generalis est X, evanescant: at si horum logarithmorum differentiae demum evanescant, erit:

$$lS = x lA + x \left(l \frac{B}{A} + l \frac{C}{B} + l \frac{D}{C} + l \frac{E}{D} + \&c. \right) \\ - Bx - Cx^2 - Dx^3 - Ex^4 - \&c.$$

Hincque adeo differentiale ipsius lS erit:

$$\frac{dS}{S} = dx lA + dx \left(l \frac{B}{A} + l \frac{C}{B} + l \frac{D}{C} + l \frac{E}{D} + \&c. \right) \\ - Bdx - 2Cxdx - 3Dx^2dx - 4Ex^3dx - \&c.$$

At

At si differentiale completum desideretur, erit id :

$$\frac{dS}{S} = dx/A + dx \left(l \frac{B}{A} + l \frac{C}{B} + l \frac{D}{C} + l \frac{E}{D} + \&c. \right) \\ - B dx - C(2x dx + dx^2) - D(3x dx + 3x dx^2 + dx^3) \\ - \&c.$$

Ad quarum formularum vsum ostendendum sequentia exempla adiicimus, quae utroque modo resoluemus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2x-1}{2x}.$$

Hic ante omnia notandum est, terminos infinitesimos horum factorum abire in vnitates, ideoque eorum logarithmos euanescere. Cum igitur sit $X = \frac{2x-1}{2x}$, erit

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2}; \quad X'' = \frac{2x+3}{2x+4}; \quad X''' = \frac{2x+5}{2x+6}; \quad \&c.$$

$$\& \text{ generaliter } X^{[n]} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n};$$

H h h h h

vnde

vnde erit:

$$\begin{aligned}
 IX^{[n]} &= l(2x+2n-1) - l(2x+2n) \\
 d.IX^{[n]} &= \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n} \\
 dd.IX^{[n]} &= -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2} \\
 d^3.IX^{[n]} &= +\frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n)^3} \\
 d^4.IX^{[n]} &= -\frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n)^4} \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

vnde erit differentiale completum:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{S} = & -2dx \left\{ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \&c. \right\} \\
 & + \frac{4}{2}dx^2 \left\{ \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \&c. \right\} \\
 & - \frac{8}{3}dx^3 \left\{ \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \&c. \right\} \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

Quod

Quod si autem tantum differentiale primum quaeratur,
erit id:

$$\frac{dS}{S} = - 2 dx \text{ in}$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \&c. \right)$$

quod idem altera methodo §. 394. tradita ita inuestigatur.

$$\text{Cum sit } lX = l \frac{2x-1}{2x}, \text{ erit } \frac{d.lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{dd.lX}{2 dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}; \quad \frac{d^3.lX}{6 dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3} \&c.$$

ideoque fiet

$$A = l \frac{1}{2} + l \frac{3}{4} + l \frac{5}{6} + l \frac{7}{8} + \&c.$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \&c. \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \&c. \end{array} \right\} = 2 l 2$$

$$C = -\frac{4}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \\ -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$D = \frac{8}{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \&c. \end{array} \right\}$$

&c.

H h h h h 2

fue

sive erit :

$$\mathfrak{B} = + \frac{2}{1} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. \right)$$

$$\mathfrak{C} = - \frac{4}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c. \right)$$

$$\mathfrak{D} = + \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. \right)$$

$$\mathfrak{E} = - \frac{16}{4} \left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c. \right)$$

&c.

Quibus valoribus inuentis substitutis erit :

$$\frac{dS}{S} = - 2 \, dx \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. \right)$$

$$+ 4x \, dx \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c. \right)$$

$$- 8x^2 \, dx \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. \right)$$

$$+ 16x^3 \, dx \left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c. \right)$$

&c.

Si igitur fit $x = 0$, quo casu fit $1/S = 0$ & $S = 1$,
erit $dS = - 2 \, dx / 2$.

EXEM.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = 1. 2. 3. 4. . . . X$$

Huius seriei 1, 2, 3, 4, &c. termini in infinitum ita crescunt, ut logarithmorum differentiae euanescant: est enim $l(\infty + 1) - l\infty = l\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$.

Cum igitur sit $X = x$ erit $X' = x + 1$; $X'' = x + 2$; $X''' = x + 3$; &c. porro autem ob $lX = lx$ fiet $d.lX = \frac{dx}{x}$; $dd.lX = -\frac{dx^2}{x^2}$; $d^3.lX = \frac{2dx^3}{x^3}$;

$d^4.lX = -\frac{2.3dx^4}{x^4}$; &c. unde si logarithmi ultimi euanescerent, foret

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & -dx \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \&c. \right) \\ & + \frac{dx^2}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c. \right) \\ & - \frac{dx^3}{3} \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

At cum differentiae demum logarithmorum euanescant, insuper addi debet haec expressio:

$$dx l(x+1) + dx \left(l \frac{x+2}{x+1} + l \frac{x+3}{x+2} + l \frac{x+4}{x+3} + l \frac{x+5}{x+4} + \&c. \right)$$

H h h h h 3 Quia

Quia vero est:

$$l \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.$$

$$l \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \&c.$$

&c.

erit verum differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = dx \, l(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}(dx - dx^2) \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{3}(dx - dx^3) \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \&c. \right)$$

$$- \frac{1}{4}(dx - dx^4) \left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{5}(dx - dx^5) \left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \&c. \right)$$

&c.

Sin autem altero modo differentiale hoc exprimere velimus, quia est

$$lX = lx; \quad \frac{d.lX}{dx} = 1; \quad \frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

$$\frac{d^3.lX}{6dx^3} = \frac{1}{3x^3}; \quad \frac{d^4.lX}{24dx^4} = -\frac{1}{4x^4}; \quad \&c.$$

habe-

habebuntur sequentes series :

$$A = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + \&c.$$

$$B = 1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c. \right)$$

$$C = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. \right)$$

$$D = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right)$$

$$E = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right)$$

Hinc ob $lA = l_1 = 0$, fiet ex §. 384 :

$$lS = x \left(l\frac{2}{1} + l\frac{2}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \&c. \right)$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{2} x^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. \right)$$

$$- \frac{1}{3} x^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{4} x^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. \right)$$

&c.

Binae

Binae autem primae series, per quas x est multiplicatum, etiam si utraque habeat summam infinitam, tamen ambae simul summam habent finitam. Si enim utriusque n termini capiantur, prodibit:

$$l(n+1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n}.$$

At supra §. 142. inuenimus esse

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{Const.} + l n \\ + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^4} - \&c.$$

haecque constans prodit $= 0,5772156649015325$.
Quod si ergo ponatur $n = \infty$, erit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\infty} = \text{Const.} + l \infty,$$

vnde binarum illarum serierum in infinitum continuatarum valor erit $= l(\infty + 1) - \text{Const.} - l \infty = -\text{Const.}$

Ex quo erit:

$$lS = -x. 0,5772156649015325$$

$$+ \frac{1}{2}xx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. \right)$$

$$- \frac{1}{3}x^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{1}{4}x^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right)$$

&c.

vnde differentialia cuiusque ordinis facile reperiuntur.

Erit

Erit enim:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & -dx. 0,5772156649015325 \\ & + xdx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. \right) \\ & - x^2 dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right) \\ & + x^3 dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

At si hae series in vnam colligantur erit:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & -dx. 0,5772156649015325 \\ & + \frac{xdx}{1(1+x)} + \frac{xdx}{2(2+x)} + \frac{xdx}{3(3+x)} + \frac{xdx}{4(4+x)} + \&c. \end{aligned}$$

Quare si fit $x=0$, fiet:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & -dx. 0,5772156649015325 \\ & \text{Ex priori vero expressione hoc casu erit:} \\ \frac{dS}{S} = & -\frac{1}{2}dx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. \right) \\ & + \frac{1}{3}dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. \right) \\ & - \frac{1}{4}dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. \right) \\ & + \frac{1}{5}dx \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

385. Hinc ergo etiam huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia quouis casu speciali exhiberi possunt, propterea quod hic differentialia completa erui-
mus. Quamobrem si tales functiones ingrediantur in
expressiones, quae indeterminatae videntur, cuiusmodi
capite praecedente tractauimus; valores eadem methodo
definiri poterunt, vti ex adiunctis exemplis intelligetur.

EXEMPLUM I.

Determinare valorem huius expressionis :

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$$

eo casu, quando ponitur $x = 1$.

Ponamus $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} = S$,
erit ex §. 372 :

$$S = x \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. \right)$$

$$- x^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. \right)$$

$$+ x^3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. \right)$$

&c.

feu cum sit quoque

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{5} + \&c.$$

$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} - \&c.$$

fi

si quivis terminus superioris seriei cum praecedente inferioris combinetur, prodibit:

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \&c.$$

quae expressio, quoniam poni debet $x=1$ est commodior. Sit ergo $x=1+\omega$, fietque

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

siue

$$\begin{aligned} S &= 1 + \omega \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. \right) = 1 + \mathfrak{B}\omega \\ &\quad - \omega^2 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. \right) = \mathfrak{C}\omega^2 \\ &\quad + \omega^3 \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. \right) = \mathfrak{D}\omega^3 \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Tota ergo expressio posito $x=1+\omega$ abibit in hanc:

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \&c.}{\omega(1+\omega)} = \frac{1}{\omega(1+2\omega)} \text{ seu} \\ &\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \&c.}{(1+\omega)(1+2\omega)} \end{aligned}$$

Ponatur nunc $\omega=0$, atque expressionis propositae valor casu $x=1$, erit:

$$= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.$$

quae series cum sit $= \frac{1}{6}\pi^2$, sequitur valorem quaesitum esse $= \frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM II.

Inuenire valorem huius expressionis :

$$\frac{2x-xx}{(x-1)^2} + \frac{\pi\pi x}{6(x-1)} - \frac{(2x-1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$

casu quo ponitur $x=1$.

Ponatur $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{x}=S$, statua-
turque $x=1+\omega$, fiet vt in exemplo praecedente
inuenimus :

$$S = 1 + B\omega - C\omega^2 + D\omega^3 - \&c. \text{ existente}$$

$$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. = \frac{1}{6}\pi\pi - 1$$

$$C = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.$$

$$D = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.$$

Posito ergo $x=1+\omega$ expressio proposita induet hanc
formam :

$$\frac{1-\omega\omega}{\omega\omega} + \frac{(1+B)(1+\omega)}{\omega} - \frac{(1+2\omega)(1+B\omega-C\omega^2+D\omega^3-\&c.)}{(1+\omega)\omega^2}$$

quae ad eandem denominationem $\omega^2(1+\omega)$ perducta fit :

$$\frac{1+\omega-\omega^2-\omega^3+\omega+2\omega^2+\omega^3+B\omega(1+2\omega+\omega\omega)-1-B\omega+C\omega^2-D\omega^3-2\omega-2B\omega^2+2C\omega^3-\&c.}{\omega^2(1+\omega)}$$

quae reducitur ad hanc formam :

$$\frac{\omega^2 + C\omega^2 + B\omega^3 + 2C\omega^3 - D\omega^3 - \&c.}{\omega^2(1+\omega)}$$

Fiat

Fiat nunc $\omega = 0$, atque prodibit $1 + \mathcal{C}$. Quocirca expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= 1 + \mathcal{C}$, ideoque per hanc seriem exprimeretur:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.$$

cuius summa cum neque per logarithmos, neque per peripheriam circuli π exhiberi possit, valor quaesitus etiamnum alio modo finite assignari non potest. Ex his ergo duobus exemplis usus, quem differentiatio functionum inexplicabilium in doctrina serierum habere potest, satis luculenter perspicitur.

386. In methodo hic tradita functiones inexplicabiles differentiandi assumimus seriei A, B, C, D, E, &c. terminos infinitesimos vel esse $= 0$, vel differentias tandem evanescentes habere; quorum si neutrum contingat, ista methodo uti non licebit. Hancobrem aliam exponam methodum huic conditioni non adstrictam, quam summatio generalis serierum ex termino generali petita & supra fusius explicata suppeditat. Denotent igitur litterae A, B, C, D, E, &c. numeros Bernullianos §. 122. exhibitos, sitque functio inexplicabilis proposita haec:

$$S = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \dots + X$$

& quia supra (130.) ostendimus fore:

$$S = \int X dx + \frac{1}{2}X + \frac{A dX}{1.2 dx} - \frac{B d^3 X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{C d^5 X}{1.2.3.4.5.6 dx^5} - \&c.$$

IIII 3

hinc

hinc facile erit istius functionis S differentiale exhibere erit enim :

$$dS = Xdx + \frac{1}{2}dX + \frac{2ddX}{1.2dx} - \frac{3d^2X}{1.2.3.4dx^2} + \frac{6d^3X}{1.2.3.4.5.6dx^3} - \&c.$$

387. Sin autem progressio proposita coniuncta sit cum geometrica, quo casu termini eius infinitesimi nunquam ad differentias constantes reducuntur, ac propterea methodus prior locum inuenit nullum; tum methodus §. 174. tradita medelam afferet. Si enim proposita sit haec functio :

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \dots + Xp^x,$$

quaerantur valores litterarum $a, \epsilon, \gamma, \delta, \&c.$ ut sit

$$\frac{p-1}{p-e^x} = 1 + au + \epsilon u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \&c.$$

quibus inuentis, uti eos §. 170. exhibuimus, erit :

$$S = \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(X - \frac{a dX}{dx} + \frac{\epsilon ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} - \&c. \right)$$

+ Constante, quae summam reddat = 0, si ponatur $x = 0$, seu quae cuiquam alii casui satisfaciat. Sumto ergo differentiali haec constans ex computo abibit, eritque:

$$dS = \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx lp \left(X - \frac{a dX}{dx} + \frac{\epsilon ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \&c. \right) \\ + \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(dX - \frac{a ddX}{dx} + \frac{\epsilon d^2X}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \&c. \right)$$

siue

$$dS = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(X dx lp - (alp-1) dX + (\epsilon lp - a) \frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \epsilon) \frac{d^3X}{dx^2} + \&c. \right)$$

quod est differentiale quaesitum functionis propositae S .

388. Sin autem functio inexplicabilis proposita ex factoribus constet, eorumque logarithmi infinitesimi differentias habeant constantes siue minus; tum hac quoque methodo differentiale functionis perpetuo exhiberi poterit. Sit enim

$$S = A^1 \cdot B^2 \cdot C^3 \cdot D^4 \cdot \dots \cdot X^x$$

Quia hinc fit

$$1S = 1A + 1B + 1C + 1D + \dots + 1X$$

methodo superiori, numeros Bernoullianos in subsidium vocando erit:

$$1S = \int dx 1X + \frac{1}{2} 1X + \frac{2d.1X}{1.2 dx} - \frac{3d^3.1X}{1.2.3.4 dx^3} + \&c.$$

qua expressione differentiatâ fit:

$$\frac{dS}{S} = dx 1X + \frac{1}{2} d.1X + \frac{2dd.1X}{1.2 dx} - \frac{3d^4.1X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{6d^6.1X}{1.2.3.4.5.6 dx^5} - \frac{Dd^8.1X}{1.2.3 \dots 8 dx^7} + \&c.$$

Hinc si fuerit $X = x$, vt fit:

$$S = 1. 2. 3. 4. \dots x$$

fiet applicatione factâ

$$\frac{dS}{S} = dx 1x + \frac{dx}{2x} - \frac{2dx}{2xx} + \frac{3dx}{4x^4} - \frac{6dx}{6x^6} + \&c.$$

quae forma, si x fit numerus valde magnus, commodius vsurpatur, quam eae, quas ante inuenimus.



CAPUT XVII.

DE INTERPOLATIONE SERIERUM.

389.

Series interpolari dicitur, dum eius termini assignantur, qui respondent indicibus fractis vel etiam surdis. Si igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum quicumque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio praebeat terminum respondentem. Verum si series ita fuerit comparata, ut eius terminus generalis nullo modo exhiberi queat; tum interpolatio huiusmodi serierum plerumque est maxime difficilis, neque maximam partem termini indicibus non integris respondentes aliter nisi per series infinitas definiri possunt. Quoniam ergo in Capite praecedente huiusmodi expressionum, quae more consueto finite exprimi non possunt, valores quibuscunque indicibus respondentes determinauimus; ea tractatio maximam afferet utilitatem ad interpolationes perficiendas. Quam ob causam usum, qui ex superiori Capite in hoc negotium redundat, hic diligentius prosequemur.

390. Sit ergo proposita series quaecunque

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots + \overset{x}{X}$$

cuius terminus generalis X sit cognitus, summatorius autem S lateat. Hinc formetur alia series, cuius terminus
gene-

generalis aequetur illius seriei termino summatorio, eritque ista noua series:

$$\overset{1}{A}; \overset{2}{(A+B)}; \overset{3}{(A+B+C)}; \overset{4}{(A+B+C+D)}; \overset{5}{(A+B+C+D+E)}; \\ \&c.$$

eiusque terminus generalis seu indici indefinito x respondens erit $= A + B + C + D + \dots + X = S$, qui cum explicite non sit cognitus, interpolatio huius nouae seriei iisdem difficultatibus erit obnoxia, quas ante meminimus. Ad hanc ergo seriem interpolandam investigari oportet valores ipsius S , quos recipit, si loco x numeri quicunque non integri substituantur. Si enim x esset numerus integer, tum conueniens ipsius S valor sine difficultate reperiretur, additione scilicet tot terminorum seriei $A + B + C + D + \&c.$ quot x contineat vnitates.

391. Quo igitur ea, quae in Capite praecedente sunt tradita, in vsum vocari possint, ponamus x esse numerum integrum, ita vt valor ei respondens $S = A + B + C + \dots + X$ sit cognitus, & quaeramus valorem Σ , in quem S transmutetur, si loco x scribatur $x + \omega$, existente ω fractione quacunque; eritque Σ terminus seriei propositae interpolandae, qui respondet indici $x + \omega$; quo ergo inuento, interpolatio huius seriei erit in promptu. Sit Z terminus seriei $A, B, C, D, E, \&c.$ qui respondet indici $x + \omega$, sintque $Z', Z'', Z''', \&c.$ termini eius consecutiui indices habentes $x + \omega + 1; x + \omega + 2; x + \omega + 3; \&c.$

K k k k k

Ac

Ac primo quidem ponamus seriei A, B, C, D, &c. terminos infinitesimos euanescere. His ergo positis series

A ; $(A+B)$; $(A+B+C)$; $(A+B+C+D)$; &c. cuius terminus indici x respondens est

$$S = A + B + C + \dots + X$$

interpolabitur quaerendo eius terminum Σ , qui indici fracto $x + \omega$ respondeat, erit autem vti inuenimus :

$$\Sigma = S + \frac{X'}{1} - \frac{X''}{2} + \frac{X'''}{6} - \frac{X''''}{24} + \&c.$$

ficque habebitur series infinita isti termino quaesito Σ aequalis, quae ob

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

in hanc formam transmutatur, vt fit :

$$\begin{aligned} \Sigma = S & - \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & - \frac{\omega^2}{2 dx^2} dd. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & - \frac{\omega^3}{6 dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ & \&c. \end{aligned}$$

quarum formularum ea, quae quouis casu commodior videatur, adhiberi poterit.

392. Sumamus pro A, B, C, D, &c. feriem harmonicam quamcunque $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \&c.$ cuius

cuius terminus generalis seu indicis x respondens est

$$\frac{1}{a+(x-1)b} = X. \text{ Hinc formata fit ista series:}$$

$$\frac{1}{a}; \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right); \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right); \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b}\right) \&c.$$

cuius propterea terminus indicis x respondens erit:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \dots + \frac{1}{a+(x-1)b}.$$

Si iam Σ denotet terminum istius seriei indicis $x + \omega$

respondentem, ob $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$, erit

$$X' = \frac{1}{a+bx}; \quad Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$$

$$X'' = \frac{1}{a+b+bx}; \quad Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$

$$X''' = \frac{1}{a+2b+bx}; \quad Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$

&c.

&c.

hincque orietur:

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx} + \&c.$$

$$\frac{1}{a+bx+b\omega} + \frac{1}{a+b+bx+b\omega} + \frac{1}{a+2b+bx+b\omega} + \&c.$$

Kkkkk 2

alte-

altera expressio autem erit huiusmodi :

$$\begin{aligned}\Sigma = S + b\omega & \left(\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a+b+bx)^2} + \frac{1}{(a+2b+bx)^2} + \&c. \right) \\ & - b^2\omega^2 \left(\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a+b+bx)^3} + \frac{1}{(a+2b+bx)^3} + \&c. \right) \\ & + b^3\omega^3 \left(\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a+b+bx)^4} + \frac{1}{(a+2b+bx)^4} + \&c. \right) \\ & \&c.\end{aligned}$$

EXEMPLUM I.

Proposita sit ista series :

$$1; (1+\frac{1}{2}); (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}); (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}); \&c.$$

*cuius terminos, qui indicibus fractis respondent,
inueniri oporteat.*

Erit ergo $a=1$ & $b=1$; vnde si terminus indici integro x respondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x},$$

terminusque indici fracto $x+\omega$ respondens vocetur $= \Sigma$,
erit :

$$\begin{aligned}\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} + \&c. \\ \frac{1}{1+x+\omega} + \frac{1}{2+x+\omega} + \frac{1}{3+x+\omega} + \frac{1}{4+x+\omega} + \frac{1}{5+x+\omega} - \&c.\end{aligned}$$

Notandum autem est, si inuentus fuerit terminus respondens indici fracto ω , quem ponamus $= T$, ex eo termini-

minum indicis $x + \omega$ facile inueniri posse; erit enim, si T' , T'' , T''' , &c. denotent terminos indicibus $1 + \omega$, $2 + \omega$, $3 + \omega$, &c. respondentes:

$$T' = T + \frac{1}{1 + \omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1 + \omega} + \frac{1}{2 + \omega}$$

$$T''' = T + \frac{1}{1 + \omega} + \frac{1}{2 + \omega} + \frac{1}{3 + \omega} \text{ \&c.}$$

unde sufficit eos tantum terminos, qui respondent indicibus ω unitate minoribus, inuestigasse. Quem in finem ponamus $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque terminus seriei T indici fracto ω respondens ita exprimeretur:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{\&c.}$$

$$- \frac{1}{1 + \omega} - \frac{1}{2 + \omega} - \frac{1}{3 + \omega} - \frac{1}{4 + \omega} - \text{\&c.}$$

vel his fractionibus in series infinitas conuersis prodibit altera expressio:

$$T = +\omega \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{\&c.} \right)$$

$$- \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{\&c.} \right)$$

$$+ \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{\&c.} \right)$$

$$- \omega^4 \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{\&c.} \right)$$

&c.

K k k k k 3

quae

Cum igitur sufficiat terminos indicibus vnitate minoribus assignasse, sit $x = 0$, & $S = 0$: quocirca si terminus indici ω conueniens ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c.$$

$$- \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{3+2\omega} - \frac{1}{5+2\omega} - \frac{1}{7+2\omega} - \frac{1}{9+2\omega} - \&c.$$

& si ω numerum quemcunque denotare ponatur, quoniam T est terminus indici ω respondens, erit T terminus generalis seriei propositae, qui etiam hoc modo exprimetur:

$$T = \frac{2\omega}{1(1+2\omega)} + \frac{2\omega}{3(3+2\omega)} + \frac{2\omega}{5(5+2\omega)} + \frac{2\omega}{7(7+2\omega)} + \&c.$$

vel ita:

$$T = 2\omega \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. \right)$$

$$- 4\omega^2 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \&c. \right)$$

$$+ 8\omega^3 \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c. \right)$$

$$- 16\omega^4 \left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \&c. \right)$$

$$\&c.$$

Pona-

Ponamus esse $\omega = \frac{1}{2}$, erit terminus huic indici respon-

$$\text{dens } T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. = \frac{1}{2},$$

eruntque

$$\begin{array}{l} \text{Ind.} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \\ \text{Term.} \quad \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}; \\ \quad \&c. \end{array}$$

Si fit $\omega = \frac{1}{4}$; erit

$$T = +1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c. \quad \text{siue} \\ -\frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{11} - \frac{2}{15} - \&c.$$

$$T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

393. Quod si ergo huius seriei generalis:

$$\frac{1}{a}; \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} \right); \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} \right); \&c.$$

quaeratur terminus respondens indici $= \frac{1}{2}$, ponatur in expressionibus §. praeced. $x = 0$, & $\omega = \frac{1}{2}$; fietque $S = 0$, & terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens quaesitus erit

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \&c.$$

siue terminis ad maiorem uniformitatem perductis erit

$$\frac{1}{2} \Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \&c.$$

in qua serie cum signa $+$ & $-$ alternentur, sumendis continuis differentiis per methodum supra expositam valor ipsius $\frac{1}{2} \Sigma$ per seriem magis conuergentem exprimetur.

Erunt

Erunt autem differentiarum series:

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2a(2a+b)}; \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)}; \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)}; \&c. \\ & \frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)}; \frac{2bb}{(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)}; \&c. \\ & \frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)}; \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

Ex quibus concluditur fore:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma &= \frac{1}{4a} + \frac{1b}{8a(2a+b)} + \frac{1 \cdot 2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)} \\ &+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c. \end{aligned}$$

Hincque ergo habebitur:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}bb}{2a(2a+b)(2a+2b)} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2}b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c. \end{aligned}$$

quae series maxime conuergit, atque valorem termini Σ facili labore proxime exhibet.

394. Quod si autem in genere seriei A, B, C, D, E, &c. termini infinitesimi euanescent, terminusque indici ω respondens fuerit $= Z$, eiusque sequentes, qui indicibus $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, &c. respondeant, sint Z' , Z'' , Z''' , Z^{iv} , &c. Si in superioribus (391) ponatur

L1111

$x = 0$,

$x=0$, ut sit $S=0$ & $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$, &c. sequetur, si formetur huiusmodi series:

A , $(A+B)$, $(A+B+C)$, $(A+B+C+D)$, &c. eiusque terminus indici ω respondens ponatur $=\Sigma$, fore $\Sigma=(A-Z')+(B-Z'')+(C-Z''')+(D-Z^{iv})+\&c.$ ex qua expressione termini quicunque intermedii defini-ri poterunt. Sufficiet autem ad interpolationem perfi-ciendam eos terminos inuestigasse, qui respondeant indi-cibus ω vnitate minoribus. Si enim terminus Σ indici huiusmodi cuicunque ω respondens fuerit repertus, ii-que qui conueniant indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. ponantur Σ' , Σ'' , Σ''' , Σ^{iv} , &c. erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$

$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$

$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$

&c.

EXEMPLUM I.

Interpolare hanc seriem:

$$1; (1+\frac{1}{4}); (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}); (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16});$$

&c.

Sit Σ huius seriei terminus respondens indici ω , & cum haec series formata sit ex summatione huius:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$$

cuius terminus indici ω respondens est $=\frac{1}{\omega^2}$ erit

$$Z=$$

$$Z = + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \&c.$$

Quod si ergo seriei propositae quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, poni debet $\omega = \frac{1}{2}$, fietque:

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{25} + \frac{1}{9} - \frac{1}{49} + \&c. \text{ siue}$$

$$\Sigma = 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \&c. \right)$$

$$\text{Cum igitur sit } 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \&c. = \frac{\pi^2}{12}, \text{ erit}$$

$$\Sigma = 4 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right) = 4 - \frac{1}{3} \pi^2, \text{ qui est termi-}$$

nus indici $\frac{1}{2}$ respondens. Hinc ergo respondebunt

$$\text{Indicibus } \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \&c.$$

$$\text{Termini } 4 - \frac{1}{3} \pi^2; \frac{4}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \pi^2; \frac{4}{4} + \frac{4}{9} + \frac{4}{16} - \frac{1}{3} \pi^2; \&c.$$

EXEMPLUM II.

Interpolare hanc seriem:

$$1; \left(1 + \frac{1}{9}\right); \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\right); \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49}\right)$$

$$\&c.$$

Si Σ terminus respondens indici cuicunque ω , & cum haec series formata sit ex summatione huius:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \&c.$$

$$\text{ex qua fit terminus indici } \omega \text{ respondens } Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^2}$$

$$\text{erit } Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^2}; Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^2}; Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^2}$$

$$\&c.$$

L11112

Quam-

Quamobrem habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+2\omega)^2} - \frac{1}{(3+2\omega)^2} - \frac{1}{(5+2\omega)^2} - \frac{1}{(7+2\omega)^2} - \&c.$$

Ponamus $\omega = \frac{1}{2}$, vt inueniamus terminum seriei propositae respondentem indici $= \frac{1}{2}$, qui erit:

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \&c. = \frac{\pi\pi}{12},$$

ex quo termini, qui medium interiacent inter binos quosvis datos, sequenti modo exprimentur. Respondebunt

Ind. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; &c.

Term. $\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{\pi\pi}{12}$; &c.

EXEMPLUM III.

Interpolare hanc seriem:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$1; \left(1 + \frac{1}{2^n}\right); \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right); \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right); \&c.$$

Sit vt ante Σ terminus indici ω respondens, erit

$$Z = \frac{1}{\omega^3}; \& Z' = \frac{1}{(1+\omega)^n}; Z'' = \frac{1}{(2+\omega)^n}; Z''' = \frac{1}{(3+\omega)^n}$$

&c. hincque habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \&c.$$

Si

Si igitur desideretur terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens, erit

$$is = 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \&c.$$

$$\text{feu} = 2^n \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \&c. \right)$$

Quare si ponatur:

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$$

erit seriei propositae terminus qui indicis $\frac{1}{2}$ respondet
 $= 2^n (1 - \mathfrak{N})$; hincque respondebunt

Indic. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$

Term. $2^n - 2^n \mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n \mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n \mathfrak{N}$; &c.

EXEMPLUM IV.

Interpolare hanc seriem:

$$1; \left(1 + \frac{1}{3^n}\right); \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right); \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}\right); \&c.$$

Sit Σ terminus qui indicis cuicunque ω respondeat,
 & cum sit $Z = \frac{1}{(2\omega-1)^n}$, erit:

$$Z' = \frac{1}{(2\omega+1)^n}; Z'' = \frac{1}{(2\omega+3)^n}; Z''' = \frac{1}{(2\omega+5)^n}; \&c.$$

atque

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

$$- \frac{1}{(1+2\omega)^n} - \frac{1}{(3+2\omega)^n} - \frac{1}{(5+2\omega)^n} - \frac{1}{(7+2\omega)^n} - \&c.$$

L l l l l 3

Po-

Ponatur $\omega = \frac{1}{2}$, & prodibit terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c. = \mathfrak{N},$$

ex quo porro erunt reliqui termini inter binos datos medii

Indices: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; &c.

Termini: \mathfrak{N} ; $\frac{1}{2^n} + \mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{N}$; &c.

395. Ponamus nunc seriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius summatione series interpolanda formatur, terminos infinitesimos non evanescere, sed ita esse comparatos, ut eorum differentiae evanescant; sitque X huius seriei terminus respondens indici x , & Z terminus respondens exponenti $x + \omega$; tum vero sint X' , X'' , X''' , X'''' , &c. termini ipsum X sequentes, & Z' , Z'' , Z''' , &c. termini ipsum Z sequentes. Quibus positis proponatur haec series interpolanda:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ A; & (A+B); & (A+B+C); & (A+B+C+D); & \&c. \end{array}$$

cuius terminus indici x respondens fit $= S$, at terminus indici $x + \omega$ respondens fit $= \Sigma$; eritque ex iis, quae Capite praecedente sunt tradita:

$$\begin{aligned} \Sigma &= S + X' + X'' + X''' + \&c. \\ &\quad - Z' - Z'' - Z''' - \&c. \\ &\quad + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - \&c. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Quia

Quia autem ut ante sufficit terminos indicibus unitate minoribus respondentes inuestigasse, ponamus $x = 0$, ut sit $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, &c. eritque terminus indici ω respondens:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') + \&c. \\ + \omega A + \omega [(B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \&c.]$$

Vel si differentias has more supra recepto exprimere velimus quo est $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$; &c. habebitur:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') + \&c. \\ + \omega (A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.)$$

395. Sin autem seriei $A, B, C, D, E, \&c.$ ex cuius summatione series interpolanda formatur, termini infinitesimi neque ipsi euanescent, neque differentias primas habeant euanescentes; tum plures series ad valorem ipsius Σ exprimendum adiici debebunt, quoad scilicet ad differentias terminorum infinitesimorum euanescentes perueniatur. Sit enim ut ante seriei $A, B, C, D, E, \&c.$ terminus indici x respondens $= X$, eumque sequentes $X', X'', X''', \&c.$ indici autem $x + \omega$ respondeat terminus Z , quem sequantur $Z', Z'', \&c.$ atque proponatur haec series:

$$\overset{1}{A}; \overset{2}{(A+B)}; \overset{3}{(A+B+C)}; \overset{4}{(A+B+C+D)}; \&c.$$

cuius terminus indici x respondens sit

$$S = A + B + C + D + \dots + X$$

in-

indici vero $x + \omega$ respondeat terminus Σ ; ita ut

indicibus	respondeant termini
$x + \omega + 1$	$\Sigma' = \Sigma + Z'$
$x + \omega + 2$	$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$
$x + \omega + 3$	$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$
&c.	&c.

Si iam differentiae terminorum ita exprimantur, ut fit

$$\begin{aligned} \Delta X' &= X'' - X'; \quad \Delta X'' = X''' - X''; \quad \Delta X''' = X'''' - X'''; \quad \&c. \\ \Delta^2 X' &= \Delta X'' - \Delta X'; \quad \Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X''; \quad \Delta^2 X''' = \Delta X'''' - \Delta X'''; \quad \&c. \\ \Delta^3 X' &= \Delta^2 X'' - \Delta^2 X'; \quad \Delta^3 X'' = \Delta^2 X''' - \Delta^2 X''; \quad \&c. \end{aligned}$$

ex §. 377. terminus Σ sequenti modo exprimetur:

$$\begin{aligned} \Sigma &= S && + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ &&& - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ &&& + \omega [X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \Delta X'''' + \&c.] \\ &&& + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} [\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \Delta^2 X'''' + \&c.] \\ &&& + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} [\Delta^2 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \Delta^3 X'''' + \&c.] \\ &&& \&c. \end{aligned}$$

397. Sufficit, uti iam notauimus, tot huiusmodi series adiecisse, donec ad terminorum infinitesimorum differentias euanescentes perueniatur: si enim has ipsas series quoque in infinitum continuare velimus, vel eo usque saltem, donec terminorum finitorum differentiae euanescant; tum ob

$$Z' =$$

$$Z' = X' + \omega \Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} \Delta^3 X' + \&c.$$

tota expressio inuenta contrahetur in hanc:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} \Delta^2 X' + \&c.$$

quae terminum summatorium seriei $A+B+C+D+\&c.$ inuoluit; qui autem si esset cognitus, interpolatio nullam haberet difficultatem. Interim tamen & hac formula uti licebit, quippe quae, quoties abrumpitur, quemvis terminum interpolandum finite & algebraicae expressum exhibet: sin autem in infinitum progrediatur, plerumque praestat priorem formulam adhibere, in qua ratio terminorum infinitesimorum habetur. Haec vero, si ponatur $x=0$, ut Σ denotet terminum indici ω respondentem, ob $S=0$ hanc formam induet:

$$\begin{aligned} \Sigma = & \quad + A + B + C + D + \&c. \\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ & + \omega [A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} [\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} [\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \&c.] \\ & \&c. \end{aligned}$$

M m m m m

Vel

Vel si ponatur breuitatis gratia :

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} = \epsilon; \quad \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \gamma; \quad \&c.$$

erit :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \alpha A + \epsilon \Delta A + \gamma \Delta^2 A + \delta \Delta^3 A + \&c. \\ &+ A + \alpha \Delta A + \epsilon \Delta^2 A + \gamma \Delta^3 A + \&c. — Z' \\ &+ B + \alpha \Delta B + \epsilon \Delta^2 B + \gamma \Delta^3 B + \&c. — Z'' \\ &+ C + \alpha \Delta C + \epsilon \Delta^2 C + \gamma \Delta^3 C + \&c. — Z''' \\ &\&c. \end{aligned}$$

quarum serierum horizontalium numerus in infinitum quidem progreditur, at quaelibet finito terminorum numero constat.

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{2}{3}; \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}; \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}; \&c.$$

Sit huius seriei terminus indici ω respondens $= \Sigma$, & cum ea oriatur ex summatione huius seriei :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \&c. \quad \text{erit} \quad Z = \frac{\omega}{\omega+1};$$

& quia termini infinitesimi differentias suas primas iam habent euanescentes, differentiae tantum primae sunt accipiendae, quae erunt :

$$\text{ob} \quad A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{2}{3}; \quad C = \frac{3}{4}; \quad D = \frac{4}{5}; \quad \&c.$$

$$\Delta A = \frac{1}{2 \cdot 3}; \quad \Delta B = \frac{1}{3 \cdot 4}; \quad \Delta C = \frac{1}{4 \cdot 5}; \quad \&c.$$

Hinc

Hinc ergo habebitur:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c. \\ &+ \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \frac{\omega}{5.6} + \&c. \\ &- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c. \end{aligned}$$

feu ob $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \&c. = \omega$; erit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \omega + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c. \\ &- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c. \end{aligned}$$

Si ergo quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, erit is

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \&c.$$

$$\text{feu } \Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{5.11} - \frac{1}{6.13} - \&c.$$

$$\text{ideoque } \frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \frac{1}{8.9} - \frac{1}{10.11} - \frac{1}{12.13} - \&c.$$

$$\begin{aligned} \text{feu } \frac{1}{2}\Sigma &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \&c. \\ &+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c. \end{aligned}$$

M m m m m 2

Qua-

Quare cum fit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c. = \frac{1}{2}$

erit $\frac{1}{2} \Sigma = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \&c. = \frac{1}{2} - \frac{7}{12},$

ideoque $\Sigma = 2 \frac{1}{2} - \frac{7}{6}.$

398. Pergamus nunc ad series interpolandas, quarum termini ex factoribus sunt conflati, sitque proposita haec series generalissima :

$A^1; A^2B; A^3BC; A^4BCD; A^5BCDE; \&c.$

cuius terminus indici ω respondens sit $= \Sigma$. Erit ergo 1Σ terminus respondens indici ω in hac ferie :

$1A; (1A + 1B); (1A + 1B + 1C); (1A + 1B + 1C + 1D);$
 $\&c.$

Quodsi ergo ponamus huius seriei terminos infinitesimos evanescere; atque seriei $A, B, C, D, E, \&c.$ terminum indici ω respondentem esse Z , eiusque sequentes indicibus $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \&c.$ respondentes esse Z', Z'', Z''', Z'''' , &c. erit ex supra demonstratis :

$$1\Sigma = \frac{1A + 1B + 1C + 1D + \&c.}{1Z' - 1Z'' - 1Z''' - 1Z'''' - \&c.}$$

Hinc igitur ad numeros progrediendo habebitur :

$$\Sigma = \frac{A}{Z'} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \&c.$$

399. Quodsi autem terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. logarithmi non evanescent, sed habeant differentias evanescentes, erit vti vidimus:

$$l\Sigma = + lA + lB + lC + \&c.$$

$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

$$+ \omega lA + \omega \left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \&c. \right)$$

hincque ad numeros a logarithmis procedendo fiet

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega} B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega} C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega} D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega} E^{\omega}}{Z''''} \cdot \&c.$$

At si illorum logarithmorum infinitesimorum differentiae demum secundae evanescant, erit:

$$l\Sigma = lA + lB + lC + lD + \&c.$$

$$+ lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c.$$

$$+ \omega \left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} \left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DE}{E^2} + \&c. \right)$$

Ex his itaque obtinebitur:

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{2}} B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2}}$$

$$\frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2}} B^{\frac{\omega(2-\omega)}{1 \cdot 2}} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2}} B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2}} C^{\frac{\omega(2-\omega)}{1 \cdot 2}} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2}}}{Z' Z''} \&c.$$

M m m m 3 quae

quae si $\omega < 1$ commodius ita exprimetur :

$$\Sigma = \frac{A \frac{\omega(3-\omega)}{1.2} \cdot A \frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2} \cdot B \frac{\omega(2-\omega)}{1.2} \cdot B \frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2} \cdot C \frac{\omega(2-\omega)}{1.2}}{\frac{\omega(1-\omega)}{B \frac{1.2}{C \frac{1.2}{Z'}}} \cdot \frac{\omega(1-\omega)}{D \frac{1.2}{Z''}}} \cdot \&c.$$

400. Accommodemus hanc interpolationem ad istam seriem :

$$\frac{a}{b} ; \frac{a(a+c)}{b(b+c)} ; \frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)} ; \frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)} ; \&c.$$

cuius factores desumpti sunt ex hac serie :

$$\frac{a}{b} ; \frac{a+c}{b+c} ; \frac{a+2c}{b+2c} ; \frac{a+3c}{b+3c} ; \&c.$$

cuius terminorum infinitesimorum logarithmi sunt $= 0$.

$$\text{Erit ergo } Z = \frac{a-c+c\omega}{b-c+c\omega} ; Z' = \frac{a+c\omega}{b+c\omega} ; \&c.$$

Hinc si illius seriei terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit ex §. 398 :

$$\Sigma = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)} \cdot \frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)} \cdot \frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)} \cdot \&c.$$

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit :

$$\Sigma = \frac{a(2b+c)}{b(2a+c)} \cdot \frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)} \cdot \frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)} \cdot \&c.$$

EXEM-

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem :

$$\frac{1}{2} ; \frac{1.3}{2.4} ; \frac{1.3.5}{2.4.6} ; \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} ; \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} ; \&c.$$

Cum hic fit $a=1$, $b=2$, & $c=2$; si terminus
indici cuicunque ω respondens $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)} \cdot \frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)} \cdot \frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)} \cdot \frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)} \cdot \&c.$$

Hinc si termini, qui indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c.
respondent, ponantur Σ' , Σ'' , Σ''' , &c. erit:

$$\Sigma' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega} \cdot \Sigma$$

&c.

Si itaque desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto
 $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \&c.$$

Verum posito $\pi =$ semicircumferentiae circuli, cuius
radius est $= 1$, supra ostendimus esse:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \&c.$$

Hanc-

Hancobrem termini intermedii indicibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. per peripheriam circuli exprimi poterunt, hoc modo :

$$\text{Indices: } \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2}$$

$$\text{Termini: } \frac{2}{\pi}; \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}; \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\pi}; \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2}{\pi} \text{ \&c.}$$

Quam eandem interpolationem *Wallisus* in arithmetica infinitorum inuenit.

401. Consideremus nunc istam seriem :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ a; & a(a+b); & a(a+b)(a+2b); & a(a+b)(a+2b)(a+3b); & \&c. \end{array}$$

cuius factores hanc progressionem arithmeticam constituunt: $a, (a+b), (a+2b), (a+3b), (a+4b), \&c.$

huiusque termini infinitesimi ita sunt comparati, ut eorum logarithmorum differentiae euanescent. Cum igitur sit

$$Z = a - b + b\omega, \quad \&$$

$$Z' = a + b\omega; \quad Z'' = a + b + b\omega; \quad Z''' = a + 2b + b\omega; \quad \&c.$$

si Σ denotet terminum seriei propositae, cuius index est $= \omega$, erit :

$$\Sigma = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega} \cdot \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega} \cdot \&c.$$

Hocque valore inuenito, si ω denotet numerum quemvis fractum unitate minorem, termini sequentes indicibus $1+\omega, 2+\omega, 3+\omega, \&c.$ respondentes ita determinabuntur, ut sit

$$\Sigma' =$$

$$\Sigma' = (a + b\omega) \Sigma$$

$$\Sigma'' = (a + b\omega)(a + b + b\omega) \Sigma$$

$$\Sigma''' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)(a + 2b + b\omega) \Sigma$$

&c.

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{5}{2}b} \cdot \&c.$$

ideoque sumtis quadracis:

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a + \frac{1}{2}b)(a + \frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a + \frac{3}{2}b)(a + \frac{5}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a + \frac{5}{2}b)(a + \frac{7}{2}b)} \cdot \&c.$$

402. Ponatur in serie quam supra tractauimus:

$$\frac{f}{g}; \frac{f(f+h)}{g(g+h)}; \frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}; \frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}; \&c.$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $= \Theta$, erit:

$$\Theta = \frac{f(g + \frac{1}{2}h)}{g(f + \frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g + \frac{3}{2}h)}{(g+h)(f + \frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g + \frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f + \frac{5}{2}h)} \cdot \&c.$$

statuatur nunc: $f = a$; $g = a + \frac{1}{2}b$; & $h = b$; erit:

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a + \frac{1}{2}b)(a + \frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a + \frac{3}{2}b)(a + \frac{5}{2}b)} \cdot \&c.$$

ideoque fiet $\Sigma^2 = a\Theta$, & $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Quocirca si huius seriei:

$$a; a(a+b); a(a+b)(a+2b); a(a+b)(a+2b)(a+3b); \&c.$$

N n n n n

ter-

terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens statuatur $= \aleph$; atque huius seriei:

$$\frac{1}{a + \frac{1}{2}b}; \frac{2}{a(a+b)}; \frac{3}{a(a+b)(a+2b)}; \dots$$

terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Theta$; erit $\aleph = \sqrt{a \Theta}$.

Cum igitur hic seriei solorum numeratorum terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens sit $= \aleph$, si in serie denominatorum terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Lambda$; erit $\Theta = \frac{\aleph}{\Lambda}$; at est $\Theta = \frac{\aleph^2}{a}$, vnde fiet $\aleph = \frac{a}{\Lambda}$, seu $\aleph \Lambda = a$, quibus theorematibus interpolatio huiusmodi serierum non mediocriter illustratur.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec series interpolanda:

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c.

Quia hic est $a = 1$, & $b = 1$, si terminus indicis ω respondens ponatur $= \aleph$, erit:

$$\aleph = \frac{1-\omega}{1+\omega} \cdot \frac{2-\omega}{2+\omega} \cdot \frac{3-\omega}{3+\omega} \cdot \frac{4-\omega}{4+\omega} \cdot \dots$$

Hic pro ω semper fractio vnitatis minor accipi potest nihilominus enim interpolatio per totam seriem extenditur. Nam si termini indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ponantur \aleph' , \aleph'' , \aleph''' , &c.

erit:

erit:

$$M' = (1 + \omega) M$$

$$M'' = (1 + \omega)(2 + \omega) M$$

$$M''' = (1 + \omega)(2 + \omega)(3 + \omega) M$$

&c.

Seriei ergo propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit:

$$M = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}; \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}; \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}; \text{ \&c. } \text{ siue}$$

$$M^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \text{ \&c. }$$

$$\text{Vnde cum sit } \pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \text{ \&c. }$$

$$\text{erit } M^2 = \frac{\pi}{4} \text{ \& } N = \frac{\sqrt{\pi}}{2} : \text{ hincque respondebunt}$$

$$\text{Indicibus : } \frac{\frac{1}{2}}{1}; \frac{\frac{3}{2}}{3}; \frac{\frac{5}{2}}{5}; \frac{\frac{7}{2}}{7}; \text{ \&c. }$$

$$\text{Termini : } \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \text{ \&c. }$$

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec series interpolanda :

$$1; 1.3; 1.3.5; 1.3.5.7; \text{ \&c. }$$

Quia hic est $a = 1$; $b = 2$; si terminus indici ω respondens ponatur $= N$, erit:

$$M = \frac{1^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{1+2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{3+2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} \cdot 7^{\omega}}{5+2\omega} \cdot \text{ \&c. }$$

N n n n n 2

ter.

terminique ordine sequentes ita erunt comparati:

$$M' = (1 + 2\omega) M$$

$$M'' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega) M$$

$$M''' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)(5 + 2\omega) M$$

&c.

Si igitur seriei propositae desideretur terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens, isque vocetur $= M$, erit:

$$M = \frac{V_{1.3}}{2} \cdot \frac{V_{3.5}}{4} \cdot \frac{V_{5.7}}{6} \cdot \frac{V_{7.9}}{8} \cdot \&c. \quad \text{ergo}$$

$$M^2 = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \&c. = \frac{2}{\pi},$$

ideoque habebitur $M = V \frac{2}{\pi}$. At respondebunt

Indicibus: $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \&c.$

Termini: $V \frac{2}{\pi}; 2 \cdot V \frac{2}{\pi}; 2.4 V \frac{2}{\pi}; 2.4.6 V \frac{2}{\pi}; \&c.$

Quodsi ergo prior series & haec inuicem multiplicentur ut habeatur haec series:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2; 1^2.2.3; 1^2.2.3^2.5; 1^2.2.3^2.4.5.7; 1^2.2.3^2.4.5^2.7.9; \\ & & & & \&c. \end{array}$$

cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens erit $= \frac{V\pi}{2} \cdot V \frac{2}{\pi} = \frac{1}{V_2}$;

quod facile perspicitur, si isti seriei haec forma tribuatur:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1.2}{2}; \frac{1.2.3.4}{2^2}; \frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}; \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4}; \&c. \end{array}$$

cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ respondens manifesto est $= \frac{1}{V_2}$.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Sit ista series proposita interpolanda :

$$\frac{1}{n} ; \frac{2}{1 \cdot 2} ; \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} ; \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ; \&c.$$

Considerentur huius seriei numeratores ac denominatores seorsim, & cum numeratores sint :

$$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \&c.$$

fiet applicatione facta, $a = n$, & $b = -1$, vnde huius seriei terminus indicis ω respondens erit $==$

$$n^\omega \cdot \frac{n^{1-\omega} (n-1)^\omega}{n-\omega} \cdot \frac{(n-1)^{1-\omega} (n-2)^\omega}{n-1-\omega} \cdot \frac{(n-2)^{1-\omega} (n-3)^\omega}{n-2-\omega} \cdot \&c.$$

quae autem expressio ob factores in negatiuos abeuntes nihil certi monstrat. Transformetur ergo series proposita, ponendo breuitatis gratia $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = N$, in hanc :

$$N \left(\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} ; \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} ; \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)} ; \&c. \right)$$

cuius denominatores cum constent duobus factoribus, alteri constituent hanc seriem :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) ; 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) ; 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3) ; \&c.$$

cuius terminus indicis ω respondens, conuenit cum termino huius seriei :

$$N n n n n 3 \quad 1 ;$$

1 ; 1.2 ; $1.2.3$; $1.2.3.4$; $1.2.3.4.5$; &c.

indici $n - \omega$ respondente : qui est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1+n-\omega} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2+n-\omega} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3+n-\omega} \cdot \&c.$$

Sit autem huius seriei terminus indicis $1 - \omega$ respondens $\equiv \Theta$; erit :

$$\Theta = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2-\omega} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3-\omega} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4-\omega} \cdot \&c.$$

atque cum respondeant :

Indicibus : $1 - \omega$; $2 - \omega$; $3 - \omega$

Termini : Θ ; $(2 - \omega)\Theta$; $(2 - \omega)(3 - \omega)\Theta$; &c.

indici $n - \omega$ respondebit hic terminus :

$$(2 - \omega)(3 - \omega)(4 - \omega) \dots (n - \omega)\Theta.$$

Deinde illorum denominatorum alteri factores constituent hanc feriem :

1 ; 1.2 ; $1.2.3$; $1.2.3.4$; $1.2.3.4.5$; &c.

si terminus indicis ω respondens ponatur $\equiv \Lambda$; erit :

$$\Lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1+\omega} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2+\omega} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3+\omega} \cdot \&c.$$

Quibus inuentis si ipsius seriei propositae :

$$\frac{n}{1} ; \frac{n(n-1)}{1.2} ; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} ; \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} ; \&c.$$

ter-

terminus indici ω respondens ponatur Ξ , erit:

$$M = \frac{N}{\Lambda \cdot (2-\omega)(3-\omega)(4-\omega) \dots (n-\omega) \Theta}.$$

At vero est:

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega) \dots (n-\omega)} = \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \dots \frac{n}{n-\omega},$$

atque

$$\Lambda \Theta = \frac{1 \cdot 2}{(1+\omega)(2-\omega)} \cdot \frac{2 \cdot 3}{(2+\omega)(3-\omega)} \cdot \frac{3 \cdot 4}{(3+\omega)(4-\omega)} \cdot \&c.$$

Ex quibus terminus indici ω respondens quaesitus erit:

$$M = \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \cdot \frac{5}{5-\omega} \dots \frac{n}{n-\omega} \cdot \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3 \cdot 4} \cdot \&c. \text{ in infinitum.}$$

Indici ergo $\frac{1}{2}$ respondebit iste terminus:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \&c.$$

qui reducitur ad $\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1)} \cdot \frac{4}{\pi}$, seu

$$\text{erit} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1)}.$$

Si

Si fuerit $n = 2$, prodibit ista series interpolanda:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, &c.

cuius propterea terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens est $= \frac{16}{3^2}$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur terminus respondens indici $= \frac{1}{2}$ in hac serie:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \&c.$$

Oritur haec series ex praecedente si ponatur $n = \frac{1}{2}$, eritque propterea terminus quaesitus, qui fit $= N$:

$$N = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.4.6.8 \dots 2n}{1.3.5.7 \dots (2n-1)} \text{ posito } n = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ponatur } \frac{2.4.6.8 \dots 2n}{1.3.5.7 \dots (2n-1)} = \Theta \text{ si sit } n = \frac{1}{2},$$

eritque Θ terminus respondens indici $\frac{1}{2}$ in hac serie:

$$\frac{2}{1} ; \frac{2.4}{1.3} ; \frac{2.4.6}{1.3.5} ; \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7} ; \&c.$$

qui ex superioribus prodit $= \frac{\pi}{2}$. Quocirca seriei propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, qui quaeritur, erit $= 1$. Quoniam autem in ista serie, si terminus indici cuicunque ω respondens ponatur $= N$, sequens eum erit

$$N' =$$

$M' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega} M$; series proposita ita mediis terminis
interiiciendis interpolabitur:

Indices: 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3 $\frac{7}{2}$

Termini: 1; 1; $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{-1.1}{2.4}$; 0; $\frac{1.1.3}{2.4.6}$; 0; &c.

EXEMPLUM. V.

Si n fuerit numerus quicunque fractus, inuenire terminum
indici ω respondentem in serie:

1; $\frac{n}{1}$; $\frac{n(n-1)}{1.2}$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$
&c.

Si expressionem $\frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-\omega}$

cum §. 400. comparemus, fiat $a=1$, $c=1$, $b=1-\omega$,
ibique loco ω posito n , erit:

$$\frac{1}{1-\omega} \cdot \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)} \cdot \frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)} \cdot \&c.$$

vnde terminus quaesitus indici ω respondens si ponatur
 $= M$, erit:

$$M = \frac{(1-\omega+n).2}{(1+n)(2-\omega)} \cdot \frac{(2-\omega+n).3}{(2+n)(3-\omega)} \cdot \&c. \cdot \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.3} \cdot \&c.$$

ideoque

$$M = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1(1+n)} \cdot \frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2(2+n)} \cdot \frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3(3+n)} \cdot \&c.$$

O o o o o

quo-

quoties ergo $n - \omega$ fuerit numerus integer valor ipsius M rationaliter exprimi potest.

Sic si fit $n = \omega$ erit $M = 1$

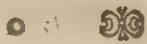
si $n = 1 + \omega$ erit $M = n$

si $n = 2 + \omega$ erit $M = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

si $n = 3 + \omega$ erit $M = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

&c.

At si fuerit $\omega - n$ numerus integer affirmatiuus, erit semper $M = 0$.



CAPUT XVIII.
DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS
IN RESOLUTIONE FRACTIONUM.

403.

Methodus fractionem quamvis propositam in fractiones simplices resoluendi, quam in Introductione exposuimus etsi, per se satis est facilis; tamen ope calculi differentialis ita perfici potest, ut saepenumero multo minori negotio in usum vocari possit. Praecipue vero si denominator fractionis resoluendae fuerit indefiniti gradus, methodus ante exposita plerumque non mediocriter impeditur, dum loco quantitatis incognitae substitutio valoris, quem ex quopiam factore induit, fieri debet. Imprimis autem his casibus diuisio denominatoris per factorem iam inuentum nimis fit molesta. Quae operatio, si calculus differentialis in subsidium vocetur, euitari poterit, ita ut non opus sit alterum denominatoris factorem, qui oritur si denominator per factorem iam cognitum diuidatur, nosse. Hunc autem usum praestat methodus determinandi valorem fractionis, cuius numerator ac denominator certo casu ambo euanescent, cuius beneficio, quemadmodum resolutio fractionum iam supra tradita commodior & tractabilior reddi queat, hoc Capite doceamus, simulque finem huic libro, in quo usum calculi differentialis in Analyfi exposuimus, imponamus.

O o o o o 2

404.

404. Si igitur proposita fuerit fractio quaecunque $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator sint functiones variabilis quantitatis x , rationales & integrae; primum videndum est, utrum x in numeratore P tot pluresue dimensiones habeat, quam in denominatore Q . Quod si eveniat, complectetur fractio $\frac{P}{Q}$ in se partem integram huius formae $A + Bx + Cx^2 + \&c.$ quae divisionis ope inde erui poterit: pars reliqua erit fractio eundem denominatorem Q habens, sed cuius numerator erit functio puta R pauciores ipsius x dimensiones continens, quam denominator Q , ita ut ulterior resolutio instituenda sit in fractione $\frac{R}{Q}$. Interim tamen non opus est nosse hunc novum numeratorem R , sed eadem fractiones simplices, quas fractio $\frac{R}{Q}$ suppeditatura esset, elici possunt immediate ex fractione proposita $\frac{P}{Q}$; prouti iam supra notavimus.

405. Praeter partem integram igitur, si quam continet fractio $\frac{P}{Q}$, erui debent fractiones simplices, quarum denominatores sint vel binomiales huius formae $f + gx$, vel trinomiales huiusmodi $f + 2x \cos \phi . \sqrt{fg + gxx}$, vel eiusmodi formularum quadrata, cubiue seu altiores potestates. Hique denominatores omnes erunt factores denominatoris Q , ita ut quilibet denominatoris ipsius Q factor praebeat fractionem simplicem. Scilicet si denomi-

minator Q factorem habeat $f+gx$, ex eo nascetur fractio simplex huiusmodi $\frac{A}{f+gx}$; sin autem factor fuerit

$(f+gx)^2$, binæ fractiones $\frac{A}{(f+gx)^2} + \frac{B}{f+gx}$.

Atque ex denominatoris Q factore cubico $(f+gx)^3$ orientur tres fractiones simplices huius formae:

$\frac{A}{(f+gx)^3} + \frac{B}{(f+gx)^2} + \frac{C}{f+gx}$; & ita porro.

Quodsi autem denominator Q factorem habuerit trinomialem huiusmodi $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$, ex eo orientur fractio simplex talis formae $\frac{A+ax}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$;

& si duo huiusmodi factores fuerint aequales uti $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2$, hinc prodibunt duae fractiones

$\frac{A+ax}{(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2} + \frac{B+bx}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$.

Huiusmodi autem factor cubicus $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^3$ dabit tres fractiones simplices, biquadratus quatuor, & ita porro.

406. Resolutio ergo fractionis cuiuscunque $\frac{P}{Q}$ ita instituitur. Quaerantur primo omnes factores tam simplices seu binomiales, quam trinomiales denominatoris Q , & si qui fuerint inter se aequales, ii probe notentur, & instar vnus habeantur. Tum ex singulis his denominatoris factoribus eliciantur fractiones simplices, vel modo iam supra ostenso, vel eo, quem hic sumus

tradituri, & qui pro lubitu in locum prioris substitui poterit. Quo facto aggregatum omnium istarum fractionum simplicium vna cum parte integra, si quam continet fractio proposita $\frac{P}{Q}$, huius valorem exhaurient. Inventionem quidem factorum denominatoris Q hic tanquam cognitam assumimus, cum pendeat a resolutione aequationis $Q=0$; methodumque hic trademus per calculum differentialem pro dato quouis denominatoris factore fractionem simplicem inde ortam definiendi. Quod, cum istarum fractionum simplicium denominatores iam habeantur, praestabitur, si numeratorem cuiusque fractionis inuestigare doceamus.

407. Ponamus ergo fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere $f+gx$, ita ut sit $Q=(f+gx)S$ neque vero hic alter factor S insuper eundem factorem $f+gx$ contineat. Sit fractio simplex ex isto factore orta $= \frac{U}{f+gx}$; & complementum huiusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ita ut sit $\frac{U}{f+gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$. Erit ergo $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{U}{f+gx} = \frac{P-US}{(f+gx)S}$; ideoque $V = \frac{P-US}{f+gx}$. Cum igitur V sit functio integra ipsius x , necesse est ut $P-US$ sit diuisibile per $f+gx$; ac propterea si ponatur $f+gx=0$ seu $x=-\frac{f}{g}$, expres-

sio

fit $P - \mathcal{A}S$ euanesceat. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, & cum fit

$P - \mathcal{A}S = 0$, erit $\mathcal{A} = \frac{P}{S}$, vti iam supra inuenimus.

Cum autem fit $S = \frac{Q}{f+gx}$, fiet $\mathcal{A} = \frac{(f+gx)P}{Q}$, si

vbique ponatur $f+gx = 0$, seu $x = \frac{-f}{g}$. Quo-

niam vero hoc casu tam numerator $(f+gx)P$, quam denominator Q euanesceat; per ea, quae de valore huiusmodi fractionum inuestigando exposuimus, erit

$\mathcal{A} = \frac{(f+gx)dP + Pgdx}{dQ}$, si quidem ponatur $x = \frac{-f}{g}$.

Hoc autem casu ob $(f+gx)dP = 0$, erit $\mathcal{A} = \frac{gPdx}{dQ}$; ficque per differentiationem valor numeratoris \mathcal{A} expedite reperitur.

408. Si igitur fractionis propositae $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat simplicem $f+gx$, ex eo orietur fractio simplex $\frac{\mathcal{A}}{f+gx}$, existente $\mathcal{A} = \frac{gPdx}{dQ}$, postquam hic vbique loco x valor $\frac{-f}{g}$ ex aequatione $f+gx = 0$ oriundus fuerit substitutus. Hoc ergo modo non necesse est, vt ante quaeratur alter denominatoris Q factor S , qui oritur, si Q per $f+gx$ diuidatur. Hinc si Q non in factoribus exprimatur, hanc diuisionem saepe non parum molestam, praecipue si x in deno-

nominate Q habeat exponentes indefinitos, omittere poterimus, cum valor ipsius \mathcal{A} ex formula $\frac{gPdx}{dQ}$ obtineatur. Sin autem denominator Q iam in factoribus fuerit expressus, ita ut inde valor ipsius S sponte pateat, tum praefenda erit altera expressio, qua inuenimus $\mathcal{A} = \frac{P}{S}$, ponendo pariter ubique $x = \frac{-f}{g}$. Sicque pro inueniendo valore ipsius \mathcal{A} quouis casu ea formula adhiberi poterit, quae commodior & expeditior videatur. Vsum autem nouae formulae aliquot exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^9}{1+x^{17}}$, cuius fractionem simplicem ex denominatoris factore $1+x$ oriundam definiri oporteat.

Quoniam hic est $Q = 1 + x^{17}$, cuius etsi factor $1+x$ constat, tamen si, uti prima methodus postulat per eum diuidere velimus, prodiret

$$S = 1 - x + xx - x^3 + \dots + x^{16}.$$

Commodius igitur utemur noua formula $\mathcal{A} = \frac{gPdx}{dQ}$;

quia itaque est $f=1$, $g=1$, & $P=x^9$, ob $dQ=17x^{16}dx$,

$$\text{fiet } \mathcal{A} = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}, \text{ posito } x = -1, \text{ vnde fit}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{17}, \text{ \& fractio simplex ex denominatoris factore}$$

$$1+x \text{ oriunda erit } \frac{-1}{17(1+x)}.$$

EX.

EXEMPLUM II.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-x^{2n}}$, fractionem simplicem ex denominatoris factore $1-x$ oriundam inuestigare.

Ob factorem propositum $1-x$, erit $f=1$, & $g=-1$.
 Tum vero denominator $Q=1-x^{2n}$ dat $dQ=-2nx^{2n-1}dx$;
 vnde propter $P=x^m$ obtinebitur $\mathcal{A}=\frac{x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Posi-
 toque ex aequatione $1-x=0$, $x=1$, fiet $\mathcal{A}=\frac{1}{2n}$;
 ita vt fractio simplex futura sit haec $\frac{1}{2n(1-x)}$.

EXEMPLUM III.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^k+3x^n}$, eius fractionem simplicem ex denominatoris factore $1-x$ oriundam determinare.

Hic ergo fit $f=1$; $g=-1$; $P=x^m$; $Q=1-4x^k+3x^n$
 & $\frac{dQ}{dx}=-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}$; vnde fit $\mathcal{A}=\frac{x^m}{-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}}$
 & posito $x=1$, erit $\mathcal{A}=\frac{1}{4k-3n}$. Fractio ergo simplex ex isto denominatoris factore simplici $1-x$ oriunda erit $=\frac{1}{(4k-3n)(1-x)}$.

409. Ponamus nunc fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere quadratum $(f+gx)^2$, & fractiones simplices hinc oriundas esse $= \frac{\mathcal{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathcal{B}}{f+gx}$.
 Sit $Q = (f+gx)^2 S$ & complementum $= \frac{V}{S}$; ita ut sit $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathcal{A}}{(f+gx)^2} - \frac{\mathcal{B}}{f+gx}$; & $V = \frac{P - \mathcal{A}S - \mathcal{B}(f+gx)S}{(f+gx)^2}$.
 Quia nunc V est functio integra, necesse est ut sit $P - \mathcal{A}S - \mathcal{B}S(f+gx)$ diuisibile per $(f+gx)^2$; & cum S factorem $f+gx$ amplius non contineat, quoque haec expressio $\frac{P}{S} - \mathcal{A} - \mathcal{B}(f+gx)$ diuisibilis erit per $(f+gx)^2$; ideoque facto $f+gx=0$, seu $x = -\frac{f}{g}$ non solum ipsa, sed etiam eius differentiale $d. \frac{P}{S} - \mathcal{B}g dx$ euanescet. Fiat ergo $x = -\frac{f}{g}$, eritque ex priori aequatione $\mathcal{A} = \frac{P}{S}$; ex posteriori vero erit $\mathcal{B} = \frac{1}{gdx} d. \frac{P}{S}$; quibus valoribus inuentis habebuntur fractiones quaesitae: $\frac{\mathcal{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathcal{B}}{f+gx}$.

EXEMPLUM.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$, cuius denominator factorem habet $(1-x)^2$, inuenire fractiones simplices hinc oriundas.

Cum hic sit $f=1, g=-1, P=x^m$ & $Q=1-4x^3+3x^4$,
erit $S=1+2x+3xx$; $\frac{P}{S} = \frac{x^m}{1+2x+3xx}$, &
d. $\frac{P}{S} = \frac{mx^{m-1}dx + 2(m-1)x^m dx + 3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}$.

Hinc posito $x=1$, erit:

$$A = \frac{1}{6} \text{ \& } B = -1 \cdot \frac{6m-8}{36} = \frac{4-3m}{18};$$

vnde fractiones quaesitae erunt: $\frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{4-3m}{18(1-x)}$.

410. Habeat fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q tres factores simplices aequales, seu sit $Q=(f+gx)^3$, sintque fractiones simplices ex hoc factore cubico $(f+gx)^3$ oriundae hae: $\frac{A}{(f+gx)^3} + \frac{B}{(f+gx)^2} + \frac{C}{f+gx}$; complementum vero harum fractionum ad fractionem propositam $\frac{P}{Q}$ constituendam sit $\frac{V}{S}$, eritque $V = \frac{P - AS - BS(f+gx) - CS(f+gx)^2}{(f+gx)^3}$. Quare

haec expressio $\frac{P}{S} = A - B(f+gx) - C(f+gx)^2$

P p p p p 2

diui-

diuisibilis erit per $(f+gx)^3$; ynde posito $f+gx=0$
 seu $x = -\frac{f}{g}$, non solum ipsa haec expressio, sed etiam
 eius differentiale primum & secundum euadet $= 0$. Erit
 scilicet ponendo $x = -\frac{f}{g}$:

$$\frac{P}{S} - \mathcal{A} - \mathcal{B}(f+gx) - \mathcal{C}(f+gx)^2 = 0$$

$$d.\frac{P}{S} - \mathcal{B}gdx - 2\mathcal{C}gdx(f+gx) = 0$$

$$dd.\frac{P}{S} - \mathcal{C}g^2dx^2 = 0.$$

Ex prima aequatione ergo erit $\mathcal{A} = \frac{P}{S}$

Ex secunda vero erit $\mathcal{B} = \frac{1}{gdx} d.\frac{P}{S}$

Ex tertia denique definitur $\mathcal{C} = \frac{1}{2g^2dx^2} dd.\frac{P}{S}$.

411. Generaliter ergo si fractionis $\frac{P}{S}$ denominator
 Q factorem habeat $(f+gx)^n$, ita vt sit $Q = (f+gx)^n S$;
 positis fractionibus simplicibus ex hoc factore $(f+gx)^n$
 oriundis his:

$$\frac{\mathcal{A}}{(f+gx)^n} + \frac{\mathcal{B}}{(f+gx)^{n-1}} + \frac{\mathcal{C}}{(f+gx)^{n-2}} + \frac{\mathcal{D}}{(f+gx)^{n-3}} + \frac{\mathcal{E}}{(f+gx)^{n-4}} + \&c.$$

quoad ad ultimam, cuius denominator est $f+gx$, per-
 veniatur, si ratiocinium vt ante instituitur, reperietur
 haec expressio:

$$\frac{P}{S} - \mathcal{A} - \mathcal{B}(f+gx) - \mathcal{C}(f+gx)^2 - \mathcal{D}(f+gx)^3 - \mathcal{E}(f+gx)^4 - \&c.$$

diui-

diuisibilis esse debere per $(f + gx)^n$, hinc tam ipsa, quam singula eius differentialia vsque ad gradum $n-1$, casu $x = \frac{-f}{g}$ euanescere debebunt. Ex quibus aequationibus concludetur fore ponendo vbique $x = \frac{-f}{g}$:

$$\mathcal{A} = \frac{P}{S}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{1 \cdot g dx} d. \frac{P}{S}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot g^2 dx^2} dd. \frac{P}{S}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot g^3 dx^3} d^3. \frac{P}{S}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot g^4 dx^4} d^4. \frac{P}{S} \quad \&c.$$

Vbi quidem notandum est, differentialia ista ipsius $\frac{P}{S}$ ante capi oportere, quam loco x ponatur $\frac{-f}{g}$, alias enim variabilitas ipsius x tolleretur.

412. Facilius ergo hoc modo isti numeratores \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , &c. exprimuntur, quam eo modo, qui in Introductione est traditus, & saepenumero quoque hac noua ratione eorum valores expeditius reperiuntur. Quae comparatio quo facilius institui queat, valores litterarum \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , &c. priori modo definiamus:

P p p p p 3

Po-

Posito $x = \frac{-f}{g}$

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\Omega}{S}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{K}}{S}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{S}}{S}$$

Statuatur relicto x variabili.

$$\frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx} = \mathfrak{P} \text{ erit}$$

$$\frac{P - \mathfrak{B}S}{f + gx} = \Omega \text{ erit}$$

$$\frac{\Omega - \mathfrak{C}S}{f + gx} = \mathfrak{K} \text{ erit}$$

$$\frac{\mathfrak{K} - \mathfrak{D}S}{f + gx} = \mathfrak{S} \text{ erit}$$

& ita porro.

413. Quodsi autem fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q non omnes factores simplices habeat reales, tum bini imaginariorum iunctim sumantur, quorum productum erit reale. Sit ergo denominatoris Q factor $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$, qui positus $= 0$ dat hunc duplicem valorem imaginarium:

$$x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi; \quad \text{ex quo erit}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}} \sin n\phi.$$

Ponamus esse $Q = (ff - 2fgx \cos \phi + ggxx) S$, atque S praeterea per $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$ non esse divisibile. Sit fractio ex isto factore denominatoris oriunda:

$$\frac{\mathfrak{A} + ax}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx}$$

&

& complementum ad propositam $\frac{P}{Q}$ fit $\frac{V}{S}$, erit

$$V = \frac{P - (A + ax)S}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx}; \text{ vnde } P - (A + ax)S$$

ac propterea quoque $\frac{P}{S} - A - ax$ diuisibile erit per

$ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$. Euanesceat ergo $\frac{P}{S} - A - ax$ si ponatur $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx = 0$, hoc est si ponatur

$$\text{vel } x = \frac{f}{g} \cos \phi + \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$$

$$\text{vel } x = \frac{f}{g} \cos \phi - \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi.$$

414. Quoniam P & S sunt functiones integrae ipsius x , fiat in utroque seorsim vtraque substitutio; & quia pro quauis potestate ipsius x , puta x^n binomium hoc $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos^n \phi \pm \frac{f^n}{g^n \sqrt{-1}} \sin^n \phi$ substitui debet.

Ponamus primo vbique $\frac{f^n}{g^n} \cos \phi$ pro x^n , hocque facto abeat P in \mathfrak{P} , & S in \mathfrak{S} . Deinde ponatur vbique $\frac{f^n}{g^n} \sin^n \phi$ pro x^n , hocque facto abeat P in \mathfrak{p} & S in \mathfrak{s} ; vbi notandum est ante has substitutiones vtramque functionem P & S penitus debere euolui, ita vt, si forte factoribus sint implicatae, ii per actualem multiplicationem tollantur. His valoribus \mathfrak{P} , \mathfrak{p} , \mathfrak{S} , \mathfrak{s} , inuentis, manifestum erit, si ponatur:

$$x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi \quad \text{func-}$$

functionem P abituram esse in $\mathcal{P} \pm \frac{p}{\sqrt{-1}}$, &

functionem S abituram esse in $\mathcal{S} \pm \frac{s}{\sqrt{-1}}$. Hinc

cum $\frac{P}{S} = \mathcal{A} - ax$ feu $P = (\mathcal{A} + ax)S$ utroque casu evanescere debeat, erit:

$$\mathcal{P} \pm \frac{p}{\sqrt{-1}} = \left(\mathcal{A} + \frac{af}{g} \cos \phi \pm \frac{af}{g\sqrt{-1}} \sin \phi \right) \left(\mathcal{S} \pm \frac{s}{\sqrt{-1}} \right)$$

unde ob signa ambigua hae duae aequationes orientur:

$$\mathcal{P} = \mathcal{A} \mathcal{S} + \frac{af\mathcal{S}}{g} \cos \phi - \frac{af s}{g} \sin \phi$$

$$p = \mathcal{A} s + \frac{af s}{g} \cos \phi + \frac{af \mathcal{S}}{g} \sin \phi$$

ex quibus eliminando \mathcal{A} eruitur:

$$\mathcal{S} p - s \mathcal{P} = \frac{af(\mathcal{S}^2 + s^2)}{g} \sin \phi; \text{ ideoque erit}$$

$$a = \frac{g(\mathcal{S} p - s \mathcal{P})}{f(\mathcal{S}^2 + s^2) \sin \phi}.$$

Deinde eliminando $\sin \phi$ erit:

$$\mathcal{S} p + s p = (\mathcal{S}^2 + s^2) \left(\mathcal{A} + \frac{af}{g} \cos \phi \right). \text{ Ergo}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{S} p + s p}{\mathcal{S}^2 + s^2} - \frac{(\mathcal{S} p - s \mathcal{P}) \cos \phi}{(\mathcal{S}^2 + s^2) \sin \phi}.$$

$$415. \text{ Cum iam sit } S = \frac{Q}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx};$$

quia posito $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx = 0$ tam numerator quam denominator evanescant, erit hoc casu:

$$S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg \cos \phi}. \quad \text{Po.}$$

Ponamus nunc, si vbique substituatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos^n \phi$,
 functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in Ω ; sin autem statuatur
 $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin^n \phi$, eam abire in q ; atque manifestum est
 si ponatur $x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$

functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\Omega \pm \frac{q}{\sqrt{-1}}$. Ex quo functio S
 abibit in $\frac{\Omega \pm q\sqrt{-1}}{\pm 2fg \sin \phi \sqrt{-1}}$. Cum ergo sit $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$

eodem valore pro x posito, habebitur:

$$\Omega \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}} \sin \phi - 2fg\mathfrak{s} \sin \phi.$$

$$\text{Erit ergo } \mathfrak{s} = \frac{-\Omega}{2fg \sin \phi} \quad \& \quad \mathfrak{S} = \frac{q}{2fg \sin \phi}.$$

Hisque valoribus substitutis, fiet $a = \frac{2gg(pq + p\Omega)}{\Omega^2 + q^2}$

$$\& \quad \mathfrak{A} = \frac{2fg(pq - p\Omega) \sin \phi}{\Omega^2 + q^2} - \frac{2fg(pq + p\Omega) \cos \phi}{\Omega^2 + q^2}.$$

416. Hinc ergo idonea obtinetur ratio ex quouis
 factore secundae potestatis fractionem simplicem forman-
 di, hicque cum ipse fractionis propositae denominator
 in computo retineatur, diuisionem, qua valor litterae S
 definiri deberet, & quae saepe non parum est molesta,

Q q q q q

eui-

euitamus. Si igitur fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat talem $ff - 2fgx \cos \phi + ggx x$, sequenti modo fractio simplex ex hoc factore oriunda, quam fingamus $= \frac{A + ax}{ff - 2fgx \cos \phi + ggx x}$, definiatur. Ponatur $x = \frac{f}{g} \cos \phi$, & pro quavis ipsius x potestate x^n scribatur $\frac{f^n}{g^n} \cos^n \phi$; quo facto abeat P in \mathfrak{P} , & functio $\frac{dQ}{dx}$ in Ω . Deinde ibidem ponatur $x = \frac{f}{g} \sin \phi$, & potestas eius quacvis $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin^n \phi$; abeatque P in \mathfrak{p} , & $\frac{dQ}{dx}$ in q .

Inuentisque hoc modo valoribus litterarum \mathfrak{P} , Ω , \mathfrak{p} & q quantitates A & a ita definientur,

$$\text{ut sit } A = \frac{2fg(\mathfrak{P}q - \mathfrak{p}\Omega) \sin \phi}{\Omega^2 + q^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\Omega + \mathfrak{p}q) \cos \phi}{\Omega^2 + q^2}$$

$$a = \frac{2gg(\mathfrak{P}\Omega + \mathfrak{p}q)}{\Omega^2 + q^2}.$$

Fractio ergo ex denominatoris Q factore $ff - 2fgx \cos \phi + ggx x$ oriunda erit :

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}q - \mathfrak{p}\Omega) \sin \phi + 2g(\mathfrak{P}\Omega + \mathfrak{p}q)(gx - f \cos \phi)}{(\Omega^2 + q^2)(ff - 2fgx \cos \phi + ggx x)}.$$

EXEMPLUM I.

Si proposita fuerit haec fractio $\frac{x^m}{a+bx^n}$, cuius denomina-
tor $a+bx^n$ factorem habeat hunc: $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$
inuenire fractionem simplicem huic factori
conuenientem.

Quoniam hic est $P = x^m$ & $Q = a + bx^n$,
erit $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1}$, vnde fiet:

$$p = \frac{f^m}{g^m} \cos m\phi \quad ; \quad p = \frac{f^m}{g^m} \sin m\phi$$

$$Q = \frac{nb f^{n-1}}{g^{n-1}} \cos(n-1)\phi \quad ; \quad q = \frac{nb f^{n-1}}{g^{n-1}} \sin(n-1)\phi.$$

$$\text{Ex his erit: } Q^2 + q^2 = \frac{n^2 b^2 f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}};$$

$$pq - pQ = \frac{nb f^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(n-m-1)\phi;$$

$$\text{atque } pQ + pq = \frac{nb f^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(n-m-1)\phi.$$

Quamobrem erit fractio simplex quaesita:

$$\frac{2g^{n-m}[f\sin\phi.\sin(n-m-1)\phi + gx\cos(n-m-1)\phi - f\cos\phi.\cos(n-m-1)\phi]}{nb f^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)}$$

seu

$$\frac{2g^{n-m}[gx\cos(n-m-1)\phi - f\cos(n-m)\phi]}{nb f^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)}.$$

Qq q q 2

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec fractio $\frac{1}{x^m(a+bx^n)}$, cuius denomina-
tor factorem habeat $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$, inuenire
fractionem simplicem inde oriundam.

Cum sit $P = 1$, & $Q = ax^m + bx^{m+n}$,
erit $\frac{dQ}{dx} = m ax^{m-1} + (m+n)bx^{m+n-1}$, ideoque

posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\phi$ ob $P = x^0$ & $\phi = 1$.

$$\Omega = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}} \cos(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi$$

& $\psi = 0$; atque

$$q = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(m+n-1)\phi$$

Ergo

$$\Omega^2 + q^2 = \frac{m^2 a^2 f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} + \frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}} \cos n\phi$$

$$+ \frac{(m+n)^2 b^2 f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Quodsi vero est $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$ diuisor ipsius

$$a+bx^n, \text{ erit } a + \frac{bf^n}{g^n} \cos n\phi = 0 \text{ \& } \frac{bf^n}{g^n} \sin n\phi = 0,$$

$$\text{vnde } aa = \frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}.$$

Erit

Erit ergo :

$$\begin{aligned}\Omega^2 + q^2 &= \frac{(m+n)^2 b b f^2(m+n-1)}{g^2(m+n-1)} - \frac{m(2n+m) a a f^2(m-1)}{g^2(m-1)} \\ &= \frac{n n a a f^2(m-1)}{g^2(m-1)} - \frac{n n b b f^2(m+n-1)}{g^2(m+n-1)}.\end{aligned}$$

Deinde vero erit :

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}q - p\Omega &= \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi \\ &= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [(m+n) \sin(m+n-1)\phi - m \cos n\phi \cdot \sin(m-1)\phi] \\ &= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [n \cos n\phi \sin(m-1)\phi + (m+n) \sin n\phi \cos(m-1)\phi]\end{aligned}$$

$$\& \quad \mathfrak{p}\Omega + p q ==$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} [(m+n) \cos(m+n-1)\phi - m \cos n\phi \cdot \cos(m-1)\phi]$$

Vel cum $ff = 2fg \cos \phi + g g x x$ fit quoque diuisor ipsius $a x^{m-1} + b x^{m+n-1}$, erit :

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}} \cos(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi = 0$$

$$\& \quad \frac{af^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(m+n-1)\phi = 0,$$

vnde erit :

$$\Omega = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(m+n-1)\phi \quad \& \quad q = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(m+n-1)\phi$$

feu

$$\Omega = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}} \cos(m-1)\phi \quad \& \quad q = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}} \sin(m-1)\phi.$$

Q q q q q 3

Ex

Ex quibus resultabit fractio quaesita :

$$+ \frac{2g^m [f \cos m\phi - gx \cos (m-1)\phi]}{n a f^{m-1} (ff - 2fgx \cos \phi + ggxx)}.$$

Quae formula ex priori exemplo sequitur, si ponatur m negativum, unde non opus fuisset hunc casum peculiarem constitui.

EXEMPLUM III.

Si huius fractionis $\frac{x^m}{a + bx^n + cx^{2n}}$ denominator habuerit factorem $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$, fractionem simplicem inuestigare ex hoc factore oriundam.

Si $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$ est factor denominatoris $a + bx^n + cx^{2n}$, erit vt supra ostendimus :

$$a + \frac{bf^n}{g^n} \cos n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}} \cos 2n\phi = 0$$

$$\& \frac{bf^n}{g^n} \sin n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}} \sin 2n\phi = 0.$$

Cum igitur sit $P = x^m$ & $Q = a + bx^n + cx^{2n}$, erit $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}$; unde efficitur :

$$p = \frac{f^m}{g^m} \cos m\phi \quad \& \quad y = \frac{f^m}{g^m} \sin m\phi :$$

$$\Omega = \frac{nb f^{n-1}}{g^{n-1}} \cos (n-1)\phi + \frac{2nc f^{2n-1}}{g^{2n-1}} \cos (2n-1)\phi$$

$$q = \frac{nb f^{n-1}}{g^{n-1}} \sin (n-1)\phi + \frac{2nc f^{2n-1}}{g^{2n-1}} \sin (2n-1)\phi.$$

Quam-

Quamobrem habebimus :

$$\Omega^2 + q^2 = \frac{n^2 f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}} \left(bb + \frac{4bcf^n}{g^n} \cos n\phi + \frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}} \right).$$

At ex duabus prioribus aequationibus est :

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}} \left(bb + \frac{2bcf^n}{g^n} \cos n\phi + \frac{ccf^{2n}}{g^{2n}} \right) = aa;$$

ideoque

$$\frac{4bcf^n}{g^n} \cos n\phi = \frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}} - 2bb - \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

quo valore ibi substituto erit :

$$\Omega^2 + q^2 = \frac{n^2 f^{2n-2}}{g^{2n-2}} \left(\frac{2aa g^{2n}}{f^{2n}} - bb + \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}} \right)$$

seu

$$\Omega^2 + q^2 = \frac{n^2 (2aag^{4n} - bbf^{2n}g^{2n} + 2ccf^{4n})}{ff g^{4n-2}}.$$

Deinde erit : $\mathcal{P}q - p\Omega =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}} \sin(2n-m-1)\phi$$

$\mathcal{P}\Omega + pq =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}} \sin(2n-m-1)\phi.$$

Quibus valoribus inuentis erit fractio simplex quaesita :

$$\frac{2fg(\mathcal{P}q - p\Omega) \sin\phi + 2g(\mathcal{P}\Omega + pq)(gx - f \cos\phi)}{(\Omega^2 + q^2)(ff - 2fgx \cos\phi + ggx)}$$

417. Hae autem fractiones facilius exprimentur, si ipsos denominatorum factores determinemus. Sit igitur denominator fractionis propositae:

$$a + b x^n$$

cuius factor trinomialis si ponatur:

$$ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$$

erit vti in Introductione ostendimus:

$$a + \frac{bf^n}{g^n} \cos n\phi = 0 \quad \& \quad \frac{bf^n}{g^n} \sin n\phi = 0,$$

cum igitur sit $\sin n\phi = 0$, erit vel $n\phi = (2k-1)\pi$, vel $n\phi = 2k\pi$, priori casu erit $\cos n\phi = -1$, posteriori $\cos n\phi = +1$. Si ergo a & b sint quantitates affirmatiuae, prior casus solus locum habebit, quo fit $a = \frac{bf^n}{g^n}$; ac propterea:

$$f = a^{\frac{1}{n}} \quad \& \quad g = b^{\frac{1}{n}}$$

retineamus autem loco harum quantitatum irrationalium litteras f & g , seu ponamus potius $a = f^n$ & $b = g^n$, ita vt factores inuestigari debeant huius functionis:

$$f^n + g^n x^n$$

Cum igitur sit $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, vbi k numerum quemcunque affirmatiuum integrum designare potest; at vero maiores numeri pro k non sunt sumendi, quam qui reddant $\frac{2k-1}{n}$ vnitatem minorem; hinc fractionis propositae $(f^n + g^n x^n)$ factores erunt sequentes:

$$ff -$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{5\pi}{n} + ggxx$$

&c.

vbi notandum est si n sit numerus impar, vnum factorem haberi binomium hunc:

$$f + gx$$

sin autem n sit numerus par, nullus factor aderit binomius.

EXEMPLUM I.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ in suas fractiones simplices.

Cum denominatoris vnusquisque factor trinomialis contineatur in hac forma:

$$ff - 2fgx \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$$

erit in §. praecedente Exempl. I. $a = f^n$, $b = g^n$, &

$$\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad \text{vnde erit:}$$

$$\sin(n-m-1)\phi = \sin(m+1)\phi = \sin \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} \quad \&$$

$$\cos(n-m-1)\phi = -\cos(m+1)\phi = -\cos \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}.$$

Rrrrr

Hinc

Hinc ex isto factore oritur fractio simplex haec:

$$\frac{2f \sin \frac{(2k-1)\pi}{n} \sin \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx \right)}.$$

Quamobrem fractio proposita resoluetur in has simplices:

$$\frac{2f \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{\pi}{n} \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{\pi}{n} + ggxx \right)}$$

$$\frac{2f \sin \frac{3\pi}{n} \cdot \sin \frac{3(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{3(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{3\pi}{n} \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{3\pi}{n} + ggxx \right)}$$

$$\frac{2f \sin \frac{5\pi}{n} \cdot \sin \frac{5(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{5(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{5\pi}{n} \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{5\pi}{n} + ggxx \right)}$$

&c.

Si ergo n fuerit numerus par, hoc modo omnes oriuntur fractiones simplices; sin autem m fit numerus impar, ob factorem binomium $f + gx$, ad fractiones hoc modo resultantes insuper addi debet haec:

$$\frac{\frac{+}{n} \cdot \frac{1}{m}}{n g^{n-m-1} g^m (f + gx)}$$

vbi signum $+$ valet, si m fuerit numerus par, contra signum $-$. Si m fuerit numerus maior quam n , tum
ad

has fractiones accedent insuper partes integrae huiusmodi

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \&c.$$

quamdiu exponentes manent affirmatiui, eritque:

$$Ag^n = 1; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{g^n}$$

$$Af^n + Bg^n = 0 \quad . \quad . \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n + Cg^n = 0 \quad . \quad . \quad C = +\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n + Dg^n = 0 \quad . \quad . \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c.

&c.

EXEMPLUM II.

Resolvere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n + g^n x^n)}$ in suas fractiones simplices.

Quod ad factores ipsius $f^n + g^n x^n$ attinet, ex iis oriuntur eadem fractiones, quas exemplo praecedente eruimus, dummodo ibi sumatur m negative: super est igitur tantum, ut fractiones simplices ex denominatoris altero factore x^m definiamus, quod hoc modo commodissime fit: statuatur fractio proposita $= \frac{A}{x^m} + \frac{N x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}$, eritque

$$Af^n = 1; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{f^n}$$

$$Ag^n + N = 0 \quad . \quad . \quad N = -\frac{g^n}{f^n}.$$

R r r r r 2

Si

Si $n-m$ adhuc fuerit numerus negatiuus, simili modo erit operandum, ita vt, si m fuerit numerus quantumuis magnus, resultent huiusmodi fractiones simplices

$$\frac{A}{x^m} + \frac{B}{x^{m-n}} + \frac{C}{x^{m-2n}} + \frac{D}{x^{m-3n}} + \&c.$$

cuius seriei tot termini sunt sumendi, quot habentur ipsius x exponentes affirmatiui in denominatore. Eritque

$$Af^n = 1; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{f^n}$$

$$Ag^n + Bf^n = 0 \quad \dots \quad B = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$Bg^n + Cf^n = 0 \quad \dots \quad C = +\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$Cg^n + Df^n = 0 \quad \dots \quad D = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c.

&c.

Fractio ergo proposita omnino in has fractiones simplices resoluetur:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c. \\ & \frac{-2fg^m \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{(m-1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{\pi}{n} \right)}{n f^{n+m-1} \left(ff - 2fgx \cos \frac{\pi}{n} + ggxx \right)} \\ & \frac{-2fg^m \sin \frac{3\pi}{n} \cdot \sin \frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{3(m-1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{3\pi}{n} \right)}{n f^{n+m-1} \left(ff - 2fgx \cos \frac{3\pi}{n} + ggxx \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{-2fg^m \sin \frac{5\pi}{n} \cdot \sin \frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{5(m-1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{5\pi}{n} \right)}{nf^{n+m-1} \left(ff - 2fgx \cos \frac{5\pi}{n} + g g x x \right)}$$

&c.

Quibus formulis si n fuerit numerus impar, ob $f + gx$ factorem denominatoris, insuper adiici debet:

$$\frac{\pm g^m}{nf^{n+m-1} (f + gx)}$$

vbi signorum ambiguum \pm superius valet, si m fuerit numerus par, inferius vero si m impar.

418. Consideremus nunc quoque formulam $a + bx^n$, si b sit numerus negatiuus, sitque proposita haec functio:

$$f^n - g^n x^n$$

cuius primo semper erit factor $f - gx$; atque si n sit numerus par, quoque $f + gx$ eius erit factor. Reliqui vero erunt trinomiales, quorum forma generalis si ponatur

$$ff - 2fgx \cos \phi + g g x x$$

erit $f^n - f^n \cos n\phi = 0$ & $f^n \sin n\phi = 0$ siue $\sin n\phi = 0$ & $\cos n\phi = 1$. Quibus vt satisfiat, oportet esse $n\phi = 2k\pi$ existente k numero quocunque integro, atque propterea

erit $\phi = \frac{2k\pi}{n}$. Factor ergo generalis erit:

$$ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi}{n} + g g x x$$

sumendo ergo pro $2k$ omnes numeros pares exponente n minores, prodibunt factores trinomiales omnes:

$$R r r r r 3$$

$$ff -$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{6\pi}{n} + ggxx$$

&c.

EXEMPLUM I.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ in suas
fractiones simplices.

Quoniam denominatoris factor est $f - gx$, inde orietur
fractio huiusmodi $\frac{\mathcal{A}}{f - gx}$, ad cuius numeratorem inue-
niendum, ponatur $x^m = P$ & $f^n - g^n x^n = Q$, erit
 $dQ = -ng^n x^{n-1}$, fietque $\mathcal{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1} x^{n-1}}$,
posito $x = \frac{f}{g}$. Ergo erit $\mathcal{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$, hincque
fractio simplex ex factore $f - gx$ orta erit:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m (f - gx)}$$

Si n sit numerus par, quia tum denominatoris factor
quoque est $f + gx$, ponatur fractio simplex inde ori-
unda $= \frac{\mathcal{A}}{f + gx}$, erit $\mathcal{A} = \frac{-gx^m}{ng^n x^{n-1}} = \frac{-x^m}{ng^{n-1} x^{n-1}}$, po-
sito

fito $x = \frac{-f}{g}$. Fiet ergo ob $n-1$ numerum imparem
 $g^{n-1}x^{n-1} = -f^{n-1}$: at erit $x^n = \frac{\pm f^n}{g^n}$, vbi signum su-
 perius valet, si m fuerit numerus par, inferius si m sit
 numerus impar. Quare cum sit $\mathcal{A} = \frac{\pm 1}{n f^{n-m-1} g^m}$, erit
 fractio simplex ex factore $f + gx$ oriunda haec:

$$\frac{\pm 1}{n f^{n-m-1} g^m (f + gx)}$$

Deinde cum factorum trinomialium forma generalis sit:

$$ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi}{n} + ggx^2,$$

si comparatio cum Exemplo 1. §. 416. instituat, erit $a = f^2$,
 $b = -g^2$ & $\phi = \frac{2k\pi}{n}$; vnde $\sin \phi = 0$ & $\cos n\phi = 1$;
 atque $\sin(n-m-1)\phi = -\sin(m+1)\phi = -\sin \frac{2k(m+1)\pi}{n}$,
 & $\cos(n-m-1)\phi = \cos(m+1)\phi = \cos \frac{2k(m+1)\pi}{n}$.

Ex quibus erit fractio simplex hinc oriunda:

$$\frac{2f \sin \frac{2k\pi}{n} \cdot \sin \frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{2k(m+1)\pi}{n} (gx - f \cos \frac{2k\pi}{n})}{n f^{n-m-1} g^m (ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi}{n} + ggx^2)}$$

Hancobrem fractiones simplices quaesitae erunt:

$$\frac{\pm 1}{n f^{n-m-1} g^m (f - gx)}$$

+

$$\begin{aligned}
& + 2f \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{2(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{2(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{2\pi}{n} \right) \\
& \frac{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{2\pi}{n} + ggxx \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{4\pi}{n} + ggxx \right)} \\
& + 2f \sin \frac{4\pi}{n} \cdot \sin \frac{4(m+1)\pi}{n} - 2 \cos \frac{4(m+1)\pi}{n} \left(gx - f \cos \frac{4\pi}{n} \right) \\
& \frac{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{4\pi}{n} + ggxx \right)}{n f^{n-m-1} g^m \left(ff - 2fgx \cos \frac{6\pi}{n} + ggxx \right)} \&c.
\end{aligned}$$

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio:

$$\frac{1}{n f^{n-m-1} g^m (f + gx)}$$

cuius signum superius - est sumendum, si m fuerit numerus par; inferius si impar. Praeterea vero si m sit numerus non minor quam n , adiciendae sunt partes integrae:

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \&c.$$

quamdiu exponentes non fuerint negatiui, eritque:

$$-Ag^n = 1 \quad \text{seu} \quad A = -\frac{1}{g^n}$$

$$Af^n - Bg^n = 0 \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n - Cg^n = 0 \quad C = -\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n - Dg^n = 0 \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c.

&c.

EX.

EXEMPLUM II.

Resolvere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ in suas
fractiones simplices.

Fractiones quae ex denominatoris factore $f^n - g^n x^n$ oriuntur, eadem erunt quae ante, dummodo in illis formulis m negative accipiat. Quare ad alterum factorem x^m est respiciendum, ex quo si ponamus has fractiones resultare :

$$\frac{A}{x^m} + \frac{B}{x^{m-n}} + \frac{C}{x^{m-2n}} + \frac{D}{x^{m-3n}} + \&c.$$

quae series eousque est continuanda, donec exponentes ipsius x fiant negativi. Erit vero

$$A f^n = 1 ; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{f^n}$$

$$B f^n - A g^n = 0 \quad . \quad . \quad B = \frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$C f^n - B g^n = 0 \quad . \quad . \quad C = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$D f^n - C g^n = 0 \quad . \quad . \quad D = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fraçtio ergo proposita resolvetur in has fractiones simplices :

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{g^m}{n f^{n+m-1} (f - g x)}$$

S s s s s

$$\begin{aligned}
& \frac{+ 2fg^m \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{2(m-1)\pi}{n} (gx - f \cos \frac{2\pi}{n})}{nf^{n+m-1} (ff - 2fgx \cos \frac{2\pi}{n} + g^2xx)} \\
& \frac{+ 2fg^m \sin \frac{4\pi}{n} \sin \frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{4(m-1)\pi}{n} (gx - f \cos \frac{4\pi}{n})}{nf^{n+m-1} (ff - 2fgx \cos \frac{4\pi}{n} + g^2xx)} \\
& \frac{+ 2fg^m \sin \frac{6\pi}{n} \sin \frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos \frac{6(m-1)\pi}{n} (gx - f \cos \frac{6\pi}{n})}{nf^{n+m-1} (ff - 2fgx \cos \frac{6\pi}{n} + g^2xx)}
\end{aligned}$$

&c.

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio :

$$\frac{+ g^m}{nf^{n+m-1} (f + gx)}$$

quae autem praetermittitur, si n fuerit numerus impar. Signorum ambiguum vero superius — valet, si m sit numerus par, inferius vero +, si m sit numerus impar.

419. Hoc ergo modo omnes fractiones, quarum denominator ex duobus constat membris huiusmodi $a + bx^n$, in fractiones simplices resolvuntur. At si denominator constet tribus huiusmodi membris $a + bx^n + cx^{2n}$, tum primum videndum est, vtrum is in duos factores reales prioris formae resolui possit. Hoc enim si eueniat, resolutio in fractiones simplices modo ante exposito institui poterit. Si enim proponatur huiusmodi fractio

$$\frac{x^m}{(f^n + g^n x^n)(f^n + h^n x^n)} \quad \text{ea}$$

ea primum in duas fractiones transformabitur huiusmodi:

$$\frac{a x^m}{f^n + g^n x^n} + \frac{\epsilon x^m}{f^n + h^n x^n}$$

eritque $a f^n + \epsilon f^n = 1$ & $a h^n + \epsilon g^n = 0$, vnde fit

$$a = \frac{1}{f^n} - \epsilon = -\frac{\epsilon g^n}{h^n}; \text{ ideoque habebitur}$$

$$\epsilon = \frac{h^n}{f^n(h^n - g^n)} \text{ \& } a = \frac{g^n}{f^n(g^n - h^n)}.$$

Si exponens m fuerit maior quam n , transmutatio in sequentes fractiones erit commodior:

$$\frac{a x^{m-n}}{f^n + g^n x^n} + \frac{\epsilon x^{m-n}}{f^n + h^n x^n}$$

qua fit $a + \epsilon = 0$ & $a h^n + \epsilon g^n = 1$, ideoque

$$a = \frac{1}{h^n - g^n} \text{ \& } \epsilon = \frac{1}{g^n - h^n}.$$

Vtra autem transformatio adhibeatur, vtraque fractio hoc modo oriunda methodo ante exposita resoluetur in suas fractiones simplices, quae iunctim sumtae fractioni propositae erunt aequales.

420. Simili modo methodus haecenus tradita sufficiet, si denominator ex pluribus membris constet huiusmodi $a + b x^n + c x^{2n} + d x^{3n} + e x^{4n} + \&c.$ dummodo is in factores formae $f^n \pm g^n x^n$ resolui queat. Ponamus enim occurrere hanc fractionem in suas fractiones simplices resoluendam:

$$\frac{x^m}{(a - x^n)(b - x^n)(c - x^n)(d - x^n)}.$$

S s s s s 2

Haec

Haec primum resoluetur in has :

$$\frac{Ax^m}{a-x^n} + \frac{Bx^m}{b-x^n} + \frac{Cx^m}{c-x^n} + \frac{Dx^m}{d-x^n} + \&c.$$

quarum numeratores sequenti modo determinabuntur, ut sit

$$A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

$$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)}, \&c.$$

Hac ergo praeparatione facta, singulae istae fractiones methodo ante exposita in suas fractiones simplices resolventur; quae cunctae in vnam summam erunt colligendae.

421. Quodsi vero huiusmodi denominator $a+bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + \&c.$ non omnes factores formae $f^n + g^n x^n$ habeant reales, bini imaginarii erunt coniungendi. Ponamus ergo huiusmodi binorum factorum productum esse :

$$f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos \omega + g^{2n} x^{2n}$$

& cum haec expressio nullos habeat factores simplices reales, ponamus factores trinomiales in hac forma generali contineri :

$$ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$$

quorum numerus erit $= n$. Posito ergo $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\phi$, orietur haec aequatio :

$$1 - 2 \cos \omega \cdot \cos n\phi + \cos 2n\phi = 0.$$

De-

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$; erit quoque:

$$-2 \cos \omega \cdot \sin n\phi + \sin 2n\phi = 0$$

quae diuisa per $\sin n\phi$ dat $\cos n\phi = \cos \omega$, sicque simul priori aequationi fatisfit. Erit ergo $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ denotante k numerum quemuis integrum, ideoque erit

$$\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}, \text{ \& factores omnes continebuntur in hac}$$

$$\text{forma: } ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$$

vnde sequentes habebuntur factores:

$$ff - 2fgx \cos \frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx \text{ \&c.}$$

quorum tot sunt sumendi, donec eorum numerus fiat $= n$.

422. Si igitur proponatur ista fractio in suas fractiones simplices resoluenda:

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos \omega + g^{2n} x^{2n}}$$

quoniam denominatoris factor trinomialis quicunque continetur in hac forma: $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$

existente $\Phi = \frac{2k\pi + \omega}{n}$, consideretur ista fractio :

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1} \cos \omega + g^{2n} x^{2n+1}}$$

illi aequalis, ac ponatur numerator $x^m = P$ ac denominator $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1} \cos \omega + g^{2n} x^{2n+1} = Q$: erit $\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos \omega + (2n+1)g^{2n} x^{2n}$.

Hinc ponendo $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\Phi$; erit :

$$P = \frac{f^m}{g^m} \cos m\Phi \quad \text{feu} \quad P = \frac{f^m}{g^m} \cos \frac{m(2k\pi + \omega)}{n} \quad \&$$

$$Q = f^{2n} [1 - 2(n+1) \cos \omega \cos n\Phi + (2n+1) \cos 2n\Phi].$$

Cum autem sit $\cos n\Phi = \cos \omega$, erit $\cos 2n\Phi = 2 \cos^2 \omega - 1$; ideoque $Q = f^{2n} (-2n + 2n \cos^2 \omega) = -2nf^{2n} \sin^2 \omega$.

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\Phi$, fiet :

$$p = \frac{f^m}{g^m} \sin m\Phi = \frac{f^m}{g^m} \sin \frac{m(2k\pi + \omega)}{n} \quad \&$$

$$q = -f^{2n} [2(n+1) \cos \omega \sin n\Phi - (2n+1) \sin 2n\Phi]$$

ob $\sin 2n\Phi = 2 \sin n\Phi \cos n\Phi = 2 \cos \omega \sin n\Phi$; erit

$q = 2nf^{2n} \cos \omega \sin n\Phi$. Cum autem sit $n\Phi = 2k\pi + \omega$, erit $\sin n\Phi = \pm \sin \omega$ & $q = \pm 2nf^{2n} \sin \omega \cos \omega$.

His inuentis erit: $\Omega^2 + q^2 = 4n^2 f^{4n} \sin^2 \omega$

$$Pq - p\Omega = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} (\pm \cos m\Phi \sin \omega \cos \omega + \sin m\Phi \sin \omega)^2$$

$$\text{siue } Pq - p\Omega = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin \omega \cos (m\Phi \mp \omega) \quad \text{feu}$$

$$Pq -$$

$$pq - p\Omega = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin \omega \cdot \cos \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

$$p\Omega + pq = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} (-\cos m\phi \sin \omega^2 \pm \sin m\phi \cdot \sin \omega \cos \omega)$$

$$p\Omega + pq = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin \omega \cdot \sin (m\phi \mp \omega). \quad \text{feu}$$

$$p\Omega + pq = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin \omega \cdot \sin \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}.$$

Hinc ex denominatoris factore: $ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$

nascitur ista fractio simplex:

$$\frac{\pm f \sin \frac{2k\pi \pm \omega}{n} \cos \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm \sin \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} (gx - f \cos \frac{2k\pi \pm \omega}{n})}{nf^{\frac{2n-m}{2}} g^{m-1} \sin \omega (ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx)}$$

feu

$$\frac{\pm gx \sin \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm f \sin \frac{2k(m-1)\pi \pm (m-n-1)\omega}{n}}{nf^{\frac{2n-m}{2}} g^{m-1} \sin \omega (ff - 2fgx \cos \frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx)}.$$

EXEMPLUM.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2fng^n x^n \cos \omega + g^{2n} x^{2n}}$
in suas fractiones simplices.

Istae fractiones simplices quaesitae ergo erunt:

$$\frac{\pm f \sin \frac{\omega}{n} \cos \frac{(m-n)\omega}{n} \pm \sin \frac{(m-n)\omega}{n} (gx - f \cos \frac{\omega}{n})}{nf^{\frac{2n-m}{2}} g^{m-1} \sin \omega (ff - 2fgx \cos \frac{\omega}{n} + ggxx)} - f$$

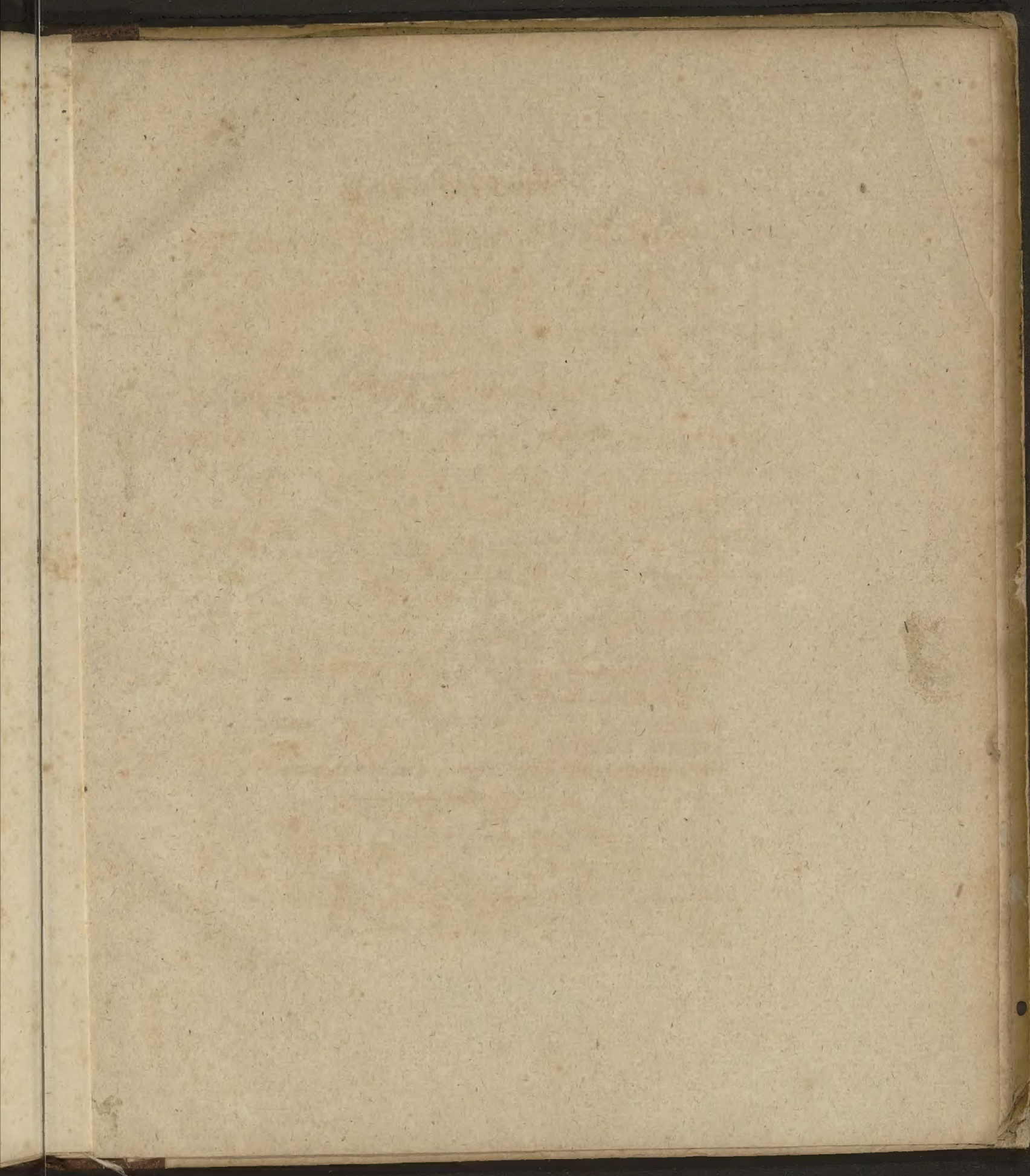
$$\begin{aligned}
& -f \sin \frac{2\pi - \omega}{n} \operatorname{cof} \frac{2m\pi - (m-n)\omega}{n} - \sin \frac{2m\pi - (m-n)\omega}{n} \left(gx - f \operatorname{cof} \frac{2\pi - \omega}{n} \right) \\
& \hline
& n f^{\frac{2n-m}{n}} g^{\frac{m-1}{n}} \sin \omega \left(ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx \right) \\
& + f \sin \frac{2\pi + \omega}{n} \operatorname{cof} \frac{2m\pi + (m-n)\omega}{n} + \sin \frac{2m\pi + (m-n)\omega}{n} \left(gx - f \operatorname{cof} \frac{2\pi + \omega}{n} \right) \\
& \hline
& n f^{\frac{2n-m}{n}} g^{\frac{m-1}{n}} \sin \omega \left(ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx \right) \\
& - f \sin \frac{4\pi - \omega}{n} \operatorname{cof} \frac{4m\pi - (m-n)\omega}{n} - \sin \frac{4m\pi - (m-n)\omega}{n} \left(gx - f \operatorname{cof} \frac{4\pi - \omega}{n} \right) \\
& \hline
& n f^{\frac{2n-m}{n}} g^{\frac{m-1}{n}} \sin \omega \left(ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx \right) \\
& + f \sin \frac{4\pi + \omega}{n} \operatorname{cof} \frac{4m\pi + (m-n)\omega}{n} + \sin \frac{4m\pi + (m-n)\omega}{n} \left(gx - f \operatorname{cof} \frac{4\pi + \omega}{n} \right) \\
& \hline
& n f^{\frac{2n-m}{n}} g^{\frac{m-1}{n}} \sin \omega \left(ff - 2fgx \operatorname{cof} \frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx \right)
\end{aligned}$$

&c.

ficque eousque erit progrediendum, quoad harum fractionum numerus fuerit n . Si m fuerit numerus vel maior quam $2n-1$ vel numerus negatius, priori casu partes integrae, posteriori vero fractiones insuper sunt adiciendae, quae modo ante exposito facile inveniuntur.

BEROLINI
EX OFFICINA MICHAELIS.





Biblioteka Jagiellońska



stdr0014989

